АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

В пространстве XYZ всякой поверхности P соответствует уравнение F(x,y,z)=0 с тремя переменными x, y, z . Линия L в трехмерном пространстве определяется как результат пересечения двух поверхностей: $L = P_1 x P_2$. Таким образом, аналитически линия L задается системой двух уравнений с тремя переменными $L: \begin{cases} F_1(x,y,z)=0 \\ F_2(x,y,z)=0 \end{cases}$.Простейшей из поверхностей является плоскость.

Плоскость

Плоскость π задается уравнением первой степени относительно x,y,z. $\pi: Ax + By + Cz + Д = 0$. Это общее уравнение плоскости. Здесь A, B, C - координата ты нормального вектора $\vec{N} = (A, B, C)$ (рис. 27).

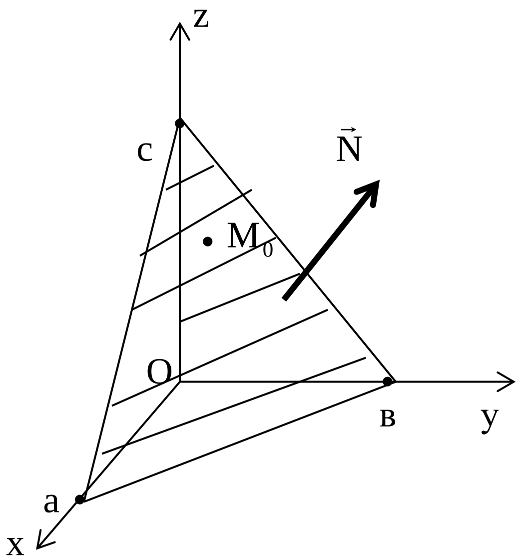

Рис. 27

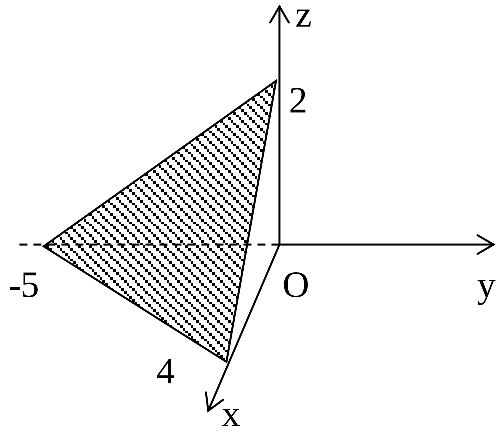

Рис. 28

Если плоскость π проходит через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, то ее уравнение имеет вид $\pi: A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$. Чтобы построить плоскость, рекомендуется ее уравнение записать в «отрезках»: $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$.

Пример. Построить плоскость 5x - 4y + 10z – 20 = 0 (рис. 28).

Решение. 5x – 4y + 10z= 20, $\frac{5x}{20} - \frac{4y}{20} + \frac{10z}{20} = 1$, $\frac{x}{4} + \frac{y}{-5} + \frac{z}{2} = 1$.

Итак, a = 4, b = - 5, c = 2 .

Известно, что если точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ не лежат на одной прямой, то они определяют единственную плоскость. Ее уравнение имеет вид

$$\pi: \begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Пример. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1, 0, -3)$, $M_2(4, -1, 2)$, $M_3(2, -2, 1)$.

Решение. $\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z+3 \\ 4-1 & -1-0 & 2+3 \\ 2-1 & -2-0 & 1+3 \end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix} x-1 & y & z+3 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}=0.$

Разложим определитель по элементам первой строки:

$(x-1)\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} - y\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + (z+3)\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=0, \qquad 6(x-1)-7y-5(z+3)=0.$

$\pi:\quad 6x-7y-5z-21=0.$

Пусть заданы две плоскости $\pi_1: \ A_1x+B_1y+C_1z+Д_1=0, \quad \vec{N}_1(A_1,B_1,C_1),$

$\pi_2: \ A_2x+B_2y+C_2z+Д_2=0, \quad \vec{N}_2(A_2,B_2,C_2)$. Угол Θ между ними численно равен углу между их нормальными векторами $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$, поэтому

$$\cos\Theta=\frac{\vec{N}_1\cdot\vec{N}_2}{|\vec{N}_1|\cdot|\vec{N}_2|}=\frac{A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2+C_1\cdot C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

В частности, если $\pi_1\|\pi_2$, то $\vec{N}_1\|\vec{N}_2$ и $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$. Если же $\pi_1\perp\pi_2$, то $\vec{N}_1\perp\vec{N}_2$; тогда $\cos\Theta=0$, т.е. $A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2+C_1\cdot C_2=0$.

Пример. Какой угол образуют плоскости $\pi_1: x-2y-z+4=0$, $\pi_2=3x+y-2z-7=0$?

Решение. Здесь $\vec{N}_1(1,-2,-1), \quad \vec{N}_2(3,1,-2), \quad \vec{N}_1\cdot\vec{N}_2=3-2+2=3.$

$|\vec{N}_1|=\sqrt{1+4+1}=\sqrt{6}, \quad |\vec{N}_2|=\sqrt{9+1+4}=\sqrt{14}$. $\cos\Theta=\frac{3}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{14}}=\frac{3}{2\sqrt{21}}$

Прямая линия в пространстве

Известно, что две плоскости π_1 и π_2 пересекаются по прямой $\ell=\pi_1\times\pi_2$. Поэтому уравнения прямой ℓ имеют вид

$$\ell:\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+Д_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+Д_2=0. \end{cases}$$

Это <u>общие уравнения</u> прямой ℓ в трехмерном пространстве.

Положение прямой ℓ будет определено, если известны некоторая точка $M_0=(x_0,y_0,z_0)$ на этой прямой и вектор $\vec{S}=(m,n,p)$, которому прямая ℓ параллельна (рис. 29). Если $M=(x,y,z)$- произвольная точка прямой ℓ, то $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$. Так как $\overrightarrow{M_0M}\|\vec{S}$, то

$$\ell:\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}. \qquad (8)$$

Здесь $\vec{S}=(m,n,p)$- направляющий вектор прямой ℓ.

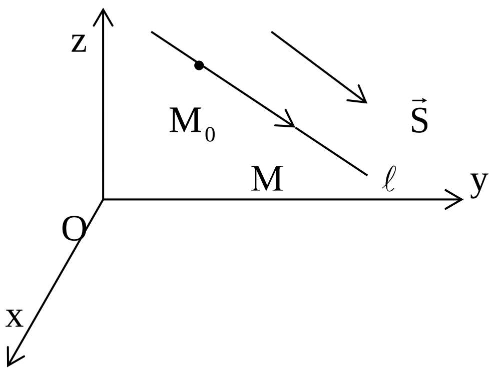

Рис. 29

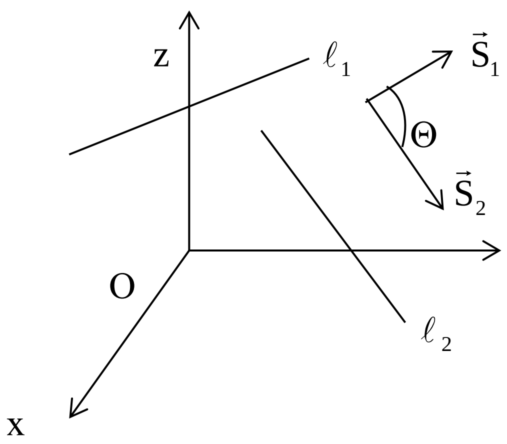

Рис. 30

Уравнеия (8) называются каноническими уравнения прямой ℓ.

Как и на плоскости, прямую ℓ в пространстве можно задать с помощью двух точек $M_1(x_1,y_1,z_1)$ и $M_2(x_2,y_2,z_2)$, через которые она проходит:

$$\ell: \frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}.$$

Пример. Написать уравнение прямой ℓ, которая проходит через точки $M_1(1,-3,5)$ и $M_2(0,4,-2)$.

$$\frac{x-1}{0-1}=\frac{y+3}{4+3}=\frac{z-5}{-2-5} \quad \text{или} \quad \frac{x-1}{-1}=\frac{y+3}{7}=\frac{z-5}{-7}.$$

В механике часто используются <u>параметрические уравнения</u> прямой ℓ: $x=x_0+mt,\quad y=y_0+nt,\quad z=z_0+pt,\quad -\infty<t<+\infty.$

Пример. Уравнения полученной прямой записать в параметрической форме. Приравнивая каждое из отношений параметру t, получим

$\frac{x-1}{-1}=t, \frac{y+3}{7}=t, \frac{z-5}{-7}=t$. Отсюда следует, что x = - t + 1, y = 7t – 3, z = - 7t + 5.

Угол между двумя прямыми ℓ_1 и ℓ_2 - это угол Θ между их направляющими векторами (рис. 30) $\vec{S}_1=(m_1,n_1,p_1)$ и $\vec{S}_2=(m_2,n_2,p_2)$.

Поэтому $\cos\Theta=\frac{\vec{S}_1\cdot\vec{S}_2}{|\vec{S}_1|\cdot|\vec{S}_2|}=\frac{m_1\cdot m_2+n_1\cdot n_2+p_1\cdot p_2}{\sqrt{m_1^2+n_1^2+p_1^2}\cdot\sqrt{m_2^2+n_2^2+p_2^2}}$.

Если $\ell_1\| \ell_2$, то $\vec{S}_1\|\vec{S}_2$, поэтому $\frac{m_1}{m_2}=\frac{n_1}{n_2}=\frac{p_1}{p_2}$. Если $\ell_1\perp\ell_2$, то $\vec{S}_1\perp\vec{S}_2$ и $\cos\Theta=0$, поэтому $m_1\cdot m_2+n_1\cdot n_2+p_1\cdot p_2=0$.

Пример. Написать уравнения прямой ℓ, которая проходит через точку $M(1,-2,3)$ параллельно прямой ℓ_1: $\frac{x+2}{1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{-5}$.

Решение. Так как $\ell \| \ell_1$, то $\vec{S} \| \vec{S}_1$. Это значит, что в качестве направляющего вектора прямой ℓ можно взять вектор $\vec{S}_1 = (1,3,-5)$. Канонические уравнения искомой прямой имеют вид $\ell: \ \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z-3}{-5}$.

Задание №1

Составить уравнение плоскости, проходящей через:

а) точки $M_1(3;-1;2)$ и $M_2(-1;2;5)$ параллельно оси *0z;*

б) точку $M_1(3;-1;2)$ перпендикулярно вектору $\overrightarrow{M_1M_2}$.

Задание №2

Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(2;0;-1)$ и $M_2(-3;1;3)$ параллельно вектору $\vec{s} = (1;2;-1)$.

Задание №3

Составить уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(-2;0;0)$, $M_2(0;4;0)$ и $M_3(0;0;5)$.

Задание №4

Найти угол между плоскостями $2x+3y+z-2=0$ и $x+y-2z+5=0$.

$x+y+z-3=0$.

Задание №5

Найти расстояние от точки $Ì_0(1,1,0)$ до плоскости $2x+2y-2z+5=0$.

Задание№6

Написать каноническое уравнение прямой, проходящей через точку $M(2;0;-3)$ параллельно:

а) вектору $\vec{l}(2;-3;5)$; б) прямой $\dfrac{x-1}{5} = \dfrac{y+2}{2} = \dfrac{z+1}{-1}$; в) оси *0x*;

г) прямой $\begin{cases} 3x-y+2z-7=0; \\ x+3y-2z-3=0. \end{cases}$ д) прямой $\begin{cases} x=-2+t; \\ y=2t; \\ z=1-0{,}5t. \end{cases}$

Задание№7

Написать каноническое уравнение прямой:

$$\begin{cases} 2x-y+2z-3=0; \\ x+2y-z-1=0. \end{cases}$$

Задание№8

Убедиться, что прямые $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y+2}{-3} = \dfrac{z-5}{4}$ и $\dfrac{x-7}{3} = \dfrac{y-2}{2} = \dfrac{z-1}{-2}$ лежат в одной плоскости и написать её уравнение.

Задание№9

Составить уравнение прямой, проходящей через точки пересечения плоскости $x-3y+2z+1=0$ с прямыми $\dfrac{x-5}{5} = \dfrac{y+1}{-2} = \dfrac{z-3}{-1}$, $\dfrac{x-3}{4} = \dfrac{y+4}{-6} = \dfrac{z-5}{2}$.

Задание № 10

Найти уравнение прямой, проходящей через точки $A(0;2;1)$ и $B(-3;7;0)$.

Задание №11

Установить взаимное расположение плоскостей:

а) $3x+4y-z+8=0$ и $6x+8y-2z-3=0$.

б) $3x-6y+3z-12=0$ и $-x+2y-z+4=0$.

в) $x+2y-5z+1=0$ и $2x+4y+2z-7=0$.

К 1-му занятию выполнить задания 1-5, ко 2-му занятию выполнить задания 6-11