1. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+5}{x^2-3}=\frac{4+5}{4-3}=9$ 2. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{x^3-3x+1}{x-4}+1\right)=\frac{0-3\cdot 0+1}{0-4}+1=-\frac{1}{4}+1=\frac{3}{4}$. 3. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x}{x-1}=\frac{1}{0}=\infty$

4. $\lim\limits_{x\to\sqrt{3}}\frac{x^2-3}{x^4+x^2+1}=\frac{0}{9+3+1}=0$

Раскрытие неопределенности $\frac{0}{0}$

5. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)\sqrt{x-2}}{x^2-1}=\frac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)\sqrt{2-x}}{(x-1)(x+1)}=\frac{1}{2}$

6. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-2x+1}{x^3-x}=\frac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{x(x^2-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{x(x-1)(x+1)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-1}{x(x+1)}=\frac{0}{2}=0$

7. $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}=\frac{0}{0}=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{(2x-1)(4x^2+2x+1)}{6(x-1/2)(x-1/3)}=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{2(x-1/2)(4x^2+2x+1)}{6(x-1/2)(x-1/3)}=$

$=\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{4x^2+2x+1}{3(x-1/3)}=\frac{4\frac{1}{4}+2\frac{1}{2}+1}{3(1/2-1/3)}=6$ где $6x^2-5x+1=0$ $x_{1,2}=\frac{5\pm\sqrt{25-24}}{12}=\frac{5\pm 1}{12}$ $x_1=1/2$, $x_2=1/3$

Раскрытие неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}=\frac{\infty}{\infty}$ Разделим числитель и знаменатель дроби на x^4 (наивысшая степень)

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}}{1-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^4}}=\frac{0}{1}=0$ $(\frac{1}{x}\to\frac{1}{\infty}=0\quad \frac{1}{x^3}\to\frac{1}{\infty}=0)$

9 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2-1}{2x^2+1}=\frac{\infty}{\infty}$ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-\frac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x^2}}=\frac{1-0}{2+0}=\frac{1}{2}$

Раскрытие неопределенности $\frac{0}{0}$, умножая числитель и знаменатель на выражение, сопряженное знаменателю

10. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4-5x}{x^2-3x+1}=\frac{\infty}{\infty}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1-\frac{5}{x^3}}{\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^3}+\frac{1}{x^4}}=\frac{1-0}{0-0+0}=\infty$

11. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}=\frac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sqrt{1+x^2}-1)(\sqrt{1+x^2}+1)}{x(\sqrt{1+x^2}+1)}==\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x^2-1)}{x(\sqrt{1+x^2}+1)}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}x=\frac{1}{2}0=0$

12. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x^2}-1}{x^2}=\frac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\sqrt[3]{1+x^2}-1)((\sqrt[3]{1+x^2})^2+\sqrt{1+x^2}+1)}{x^2((\sqrt{1+x^2})^2+\sqrt{1+x^2}+1)}=\frac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\frac{1+x^2-1}{x^2}=\frac{1}{3}\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2}=\frac{1}{3}$

13. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x+6}-2}{\sqrt{x+7}-3}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(\sqrt[3]{x+6}-2)((\sqrt[3]{x+6})^2+2\sqrt[3]{x+6}+4)(\sqrt{x+7}+3)}{(\sqrt{x+7}-3)(\sqrt{x+7}+3)((\sqrt[3]{x+6})^2+2\sqrt[3]{x+6}+4)}=$

$=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(\sqrt[3]{x+6}-2)((\sqrt[3]{x+6})^2+2\sqrt{x+6}+4)}{(\sqrt{x+7}-3)(\sqrt{x+7}+3)}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x+6-8)}{(x+7-9)}=\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{x-2}=\frac{1}{2}$.

Применение 1-ого замечательного предела.

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1 \text{ или } \lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}=1$$

14. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 3x}{x}=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin 3x}{3x}\right)3=3\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 3x}{3x}=3\cdot1=3$

15. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 5x}{\sin 7x}=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin 5x}{5x}\right)5x\left(\frac{7x}{\sin 7x}\right)7x=\frac{5}{7}.$

16. $\lim\limits_{x\to0}\frac{tg2x}{3x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 2x}{\cos 2x\cdot3x}=\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin 2x}{2x}\right)\frac{2x}{\cos 2x 3x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2}{3\cos 2x}=\frac{2}{3\cos 0}=\frac{2}{3}.$

17. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=2\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{x/2}\right)\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{x/2}\right)\frac{\frac{x}{2}\frac{x}{2}}{x^2}=2\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2}{4x^2}=2\frac{1}{4}=\frac{1}{2}.$

18. $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-2x-3}{tg2\pi x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{t\to0}\frac{(t+3)^2-2(t+3)-3}{tg2\pi(t+3)}=$

Пусть x-3=t при x$\to$3 t$\to$0 x=t+3

$=\lim\limits_{t\to0}\frac{t^2+6t+9-2t-6-3}{tg(2\pi t+6\pi)}=\lim\limits_{t\to0}\frac{t^2+4t}{tg2\pi t}=\lim\limits_{t\to0}\frac{t(t+4)}{\frac{\sin 2\pi t}{\cos 2\pi t}}=\lim\limits_{t\to0}\left(\frac{2\pi t}{\sin 2\pi t}\right)\frac{(t+4)\cos 2\pi t}{2\pi}=$

$=\lim\limits_{t\to0}\frac{(t+4)cos2\pi t}{2\pi}=\frac{4\cos 0}{2\pi}=\frac{4}{2\pi}=\frac{2}{\pi}.$

Применение 2-ого замечательного предела.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e \qquad (1^\infty)$$

19. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+2}{x+1}\right)^{x+2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{(x+1)+1}{x+1}\right)^{x+2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{x+1+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{x+1}\left(1+\frac{1}{x+1}\right)=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+1}\right)^{x+1}\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x+1}\right)=e\cdot1=e.$

20. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+5}{x-3}\right)^{2x+3}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{(x-3)+3+5}{x-3}\right)^{2x+3}=\lim\limits_{x\to\infty}\left((1+\frac{8}{x-3})^{\frac{x-3}{8}\cdot(2x+3)}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{8(2x+3)}{x-3}}=e^{16}$

21. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+5}{2x+8}\right)^{3x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{(2x+8)-8+5}{2x+8}\right)^{3x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left((1+\frac{-3}{2x+8})^{\frac{2x+8}{-3}}\right)^{\frac{-3}{2x+8}(3x-1)}=e^{-\frac{9}{2}}$

22. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3x+4}{x^2-5x+8}\right)^{3x+2}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{(x^2-5x+8)+5x-8+3x+4}{x^2-5x+8}\right)^{3x+2}=$

$=\lim\limits_{x\to\infty}\left((1+\frac{8x-4}{x^2-5x+8})^{\frac{x^2-5x+8}{8x-4}}\right)^{\frac{8x-4}{x^2-5x+8}(3x+2)}=\lim\limits_{x\to\infty}e^{\frac{(8x-4)(3x+2)}{x^2-5x+8}}=e^{24}.$

Раскрытие неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$

$1)\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{x+2}}$ $2)\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-3}{300x+100}$ $3)\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2-2x-3}{3x^2+10x+3}$ $4)\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-2}{\sqrt{x^2+2x}}$

$5)\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^6-2x^2+2}}{\sqrt{x^4+2x}}$ $6)\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^3+2x^2-3x}{6x^3+10x^2-2}$ $7)\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-5}{5x^3+x^2-2}$

Раскрытие неопределенности $\frac{0}{0}$

$a^2-b^2=(a-b)(a+b),\ a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2),\ a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),\ где\ \ x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$8)\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2-5x+2}{3x^2-12x+12}$ $9)\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$ $10)\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x-3}$ $11)\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4}$

$12)\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+4x^2+4x}{x^2-x-6}$ $13)\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$

Раскрытие неопределенности $\frac{0}{0}$ **, умножая числитель и знаменатель на выражение, сопряженное знаменателю**

$14)\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{\sqrt{3x^2-x+4}-2}$ $15)\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$ $16)\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+9}-3}$ $17)\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$

Раскрытие неопределенности $\infty-\infty$

$18)\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2-4}\right)$ $19)\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{x^6+4x^3}-\sqrt{x^6-4x^2}\right)$

Раскрытие неопределенности $\frac{0}{0}$ **, используя эквивалентные бесконечно малые.**

1. $\sin\alpha(x)\sim\alpha(x)$ при $\alpha(x)\to 0,\sin 0=0$. 9. $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2},\ \cos 0=1.$
2. $tg\,\alpha(x)\sim\ \alpha(x)$ при $\alpha(x)\to 0,tg0=0$.
3. $arc\sin\alpha(x)\sim\ \alpha(x)$ при $\alpha(x)\to 0,arc\sin 0=0$.

4 $arctg\,\alpha(x)\sim\ \alpha(x)$ при $\alpha(x)\to 0,arctg\,0=0$.

5. $\ln(1+\alpha(x))\sim\alpha(x)$ при $\alpha(x)\to 0,\ln 1=0$. 6. $e^{\alpha(x)}-1\sim\ \alpha(x)$ при $\alpha(x)\to 0,å^0=1$.

$1)\lim\limits_{x\to 2}\frac{\arcsin(x^2-2x)}{e^{tgx}-1}$ $2)\lim\limits_{x\to 1}\frac{arctg(x^2-x)}{e^{\sin(x-1)}-1}$ $3)\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{2^x-1}$ $4)\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{1-5^{x^2}}$

$5)\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin^2 3x}{xtg3x}$ $6)\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{arc}tg^2 3x-x^2}{xtg3x}$ $7)\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg3x}{e^{-x}-1}$ $8)\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg3x+\ln(x+1)}{e^{-x}+e^x-2}$

$9)\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x^2-2x}{2x^2-e^x+1}$ $10)\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-4x+3}{\ln(3x-2)}$ $11)\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{\sqrt{x+9}-3}$

$12)\lim\limits_{x\to -2}\frac{\sin(x+2)}{x^2-4}$ $13)\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-tg^4 x}{2^{2x^2}-3^{x^2}}$ $14)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+2}{2x+1}\right)^{x+2}$ $15)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x}{x^2+1}\right)^{x^2+2}$

Раскрытие неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$

$1)\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{\sqrt{x+2}}$ $2)\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-3}{300x+100}$ $3)\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2-2x-3}{3x^2+10x+3}$ $4)\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-2}{\sqrt{x^2+2x}}$

$5)\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt[3]{x^6-2x^2+2}}{\sqrt{x^4+2x}}$ $6)\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^3+2x^2-3x}{6x^3+10x^2-2}$ $7)\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+2x-5}{5x^3+x^2-2}$

Раскрытие неопределенности $\frac{0}{0}$

$a^2-b^2=(a-b)(a+b),\ a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2),\ a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2),\ где\ \ x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$8)\lim\limits_{x\to 2}\frac{2x^2-5x+2}{3x^2-12x+12}$ $9)\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-12x+20}$ $10)\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x-3}$ $11)\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x-4}$

$12)\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+4x^2+4x}{x^2-x-6}$ $13)\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+3x^2+2x}{x^2-x-6}$

Раскрытие неопределенности $\frac{0}{0}$ **, умножая числитель и знаменатель на выражение, сопряженное знаменателю**

$14)\lim\limits_{x\to 0}\frac{2x}{\sqrt{3x^2-x+4}-2}$ $15)\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{x+1}-1}$ $16)\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+4}-2}{\sqrt{x^2+9}-3}$ $17)\lim\limits_{x\to 4}\frac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$

Раскрытие неопределенности $\infty-\infty$

$18)\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2-4}\right)$ $19)\lim\limits_{x\to 0}\left(\sqrt{x^6+4x^3}-\sqrt{x^6-4x^2}\right)$

Раскрытие неопределенности $\frac{0}{0}$ **, используя эквивалентные бесконечно малые.**

1. $\sin\alpha(x)\sim\alpha(x)$ при $\alpha(x)\to 0, \sin 0=0$. 9. $1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}, \cos 0=1.$
2. $tg\,\alpha(x)\sim\alpha(x)$ при $\alpha(x)\to 0, tg0=0$.
3. $arc\sin\alpha(x)\sim\alpha(x)$ при $\alpha(x)\to 0, arc\sin 0=0$.
4. $arctg\,\alpha(x)\sim\alpha(x)$ при $\alpha(x)\to 0, arctg\,0=0$.
5. $\ln(1+\alpha(x))\sim\alpha(x)$ при $\alpha(x)\to 0, \ln 1=0$. 6. $e^{\alpha(x)}-1\sim\alpha(x)$ при $\alpha(x)\to 0$, å$^0=1$.

$1)\lim\limits_{x\to 2}\frac{\arcsin\left(x^2-2x\right)}{e^{tgx}-1}$ $2)\lim\limits_{x\to 1}\frac{arctg\left(x^2-x\right)}{e^{\sin(x-1)}-1}$ $3)\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 4x}{2^x-1}$ $4)\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{1-5^{x^2}}$

$5)\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin^2 3x}{xtg3x}$ $6)\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg^2 3x-x^2}{xtg3x}$ $7)\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg3x}{e^{-x}-1}$ $8)\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctg3x+\ln(x+1)}{e^{-x}+e^x-2}$

$9)\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x^2-2x}{2x^2-e^x+1}$ $10)\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-4x+3}{\ln(3x-2)}$ $11)\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 6x}{\sqrt{x+9}-3}$ $12)\lim\limits_{x\to -2}\frac{\sin(x+2)}{x^2-4}$

$13)\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin^2 x-tg^4x}{2^{2x^2}-3^{x^2}}$ $14)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+2}{2x+1}\right)^{x+2}$ $15)\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x}{x^2+1}\right)^{x^2+2}$