

Первое условие, которое надлежит выполнять в математике, – это быть точным, второе – быть ясным и, насколько можно, простым.

Г. Лейбниц

Введение

Цель изучения общего курса математики вузов состоит в том, чтобы углубить знания по изученным разделам и ознакомиться с некоторыми новыми разделами математики, которые обогащают общую культуру, развивают логическое мышление и широко используются в математическом моделировании задач, с которыми встречается современный инженер в своей деятельности.

Данное пособие предназначено для студентов технических, строительных направлений бакалавриата и специалитета для всех форм обучения, изучающих курс математики. В пособии изложено интегральное исчисление функции одной действительной переменной: неопределённый интеграл, определённый интеграл, дифференциальные уравнения и приложения дифференциальных уравнений при составлении математических моделей.

В каждом разделе изложены необходимые теоретические сведения, основные определения и формулы, достаточные для решения задач. Пособие составлено таким образом, что наряду с теоретической частью содержит подробный разбор типовых задач, решение которых позволит читателю глубже понять и закрепить изученный материал.

Предлагаются также задачи для самостоятельной работы, к которым приведены ответы в конце каждого раздела. Предложенные в учебном пособии задачи для самостоятельной работы могут использоваться преподавателем для работы на практических занятиях, а также при подготовке к контрольной работе и итоговой форме контроля.

Пособие также содержит задачи, способствующие лучшему освоению математического подхода к решению прикладных задач в различных сферах человеческой деятельности.

В конце каждого раздела содержатся контрольная работа и задания для самостоятельного решения, которые являются заданиями по целому разделу курса. Задания выдаются по вариантам и являются индивидуальными для студента в каждой академической группе.

Глава 1. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

§ 1. Непосредственное интегрирование

Многие физические и геометрические задачи сводятся к нахождению производных от функций. Наряду с этим ряд задач сводится к обратной операции – отысканию функции по ее производной. Эта операция называется **интегрированием**, следовательно, интегрирование должно заключаться в следующем: задана производная – требуется найти функцию [1].

Определение. Функцию $y = F(x)$, заданную на промежутке x , называют *первообразной* для функции $y = f(x)$, заданной на том же промежутке, если для всех $x \in X$ выполняется равенство $F'(x) = f(x)$ (или, что то же самое, равенство $dF(x) = f(x)dx$). Например, для функции $f(x) = \cos x$ первообразной будет функция $F(x) = \sin x$, т. к. $F'(x) = (\sin x)' = \cos x = f(x)$ для всех x ; для функции $3x^2$ первообразной будет функция x^3 , т.к. $(x^3)' = 3x^2$ для всех x ; для скорости V точки первообразной будет путь S , который прошла эта точка, т. к. $S'_t = V$, и так далее.

Так как первообразная имеет производную, следовательно, она непрерывна. Но верно и более глубокое утверждение: если функция $f(x)$ непрерывна, то она имеет первообразную. В интегральном исчислении мы будем иметь дело только с непрерывными функциями.

Если функция $y = F(x)$ является первообразной для функции $y = f(x)$ на промежутке X , то и любая из функций вида $y = F(x) + C$ является первообразной для $y = f(x)$ на том же промежутке. Это следует из того, что

$$(F(x) + C)' = F'(x) + C' = f(x) + 0 = f(x).$$

Нетрудно убедиться в верности и обратного утверждения: если $F(x)$ есть первообразная $f(x)$, то все первообразные для $f(x)$ содержатся в формуле $F(x) + C$.

Определение. Совокупность всех первообразных для заданной функции $f(x)$ на промежутке x называется **неопределенным интегралом** этой функции и обозначается так: $\int f(x)dx$ (читается: "интеграл эф

от $икс$ дэ $икс$ ”);

- $f(x)$ называется подынтегральной функцией;
- произведение $f(x)dx$ – подынтегральным выражением;
- $\int$ – знаком интеграла;
- x – переменной интегрирования.

Если $F(x)$ есть первообразная для $f(x)$, то $\int f(x)dx = F(x) + C$ (C – произвольная константа). Например, $\int \cos x dx = \sin x + C$; $\int 3x^2 dx = x^3 + C$.

Из определения интеграла следует, что каждой формуле дифференциального исчисления $F'(x) = f(x)$ соответствует формула $\int f(x)dx = F(x) + C$ в интегральном исчислении, так что в частности вся таблица производных может быть переписана в виде таблицы интегралов:

I. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, где $n \neq -1$;

II. $\int \frac{dx}{x} = \ln |x| + C$;

III. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$;

IV. $\int e^x dx = e^x + C$;

V. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \begin{cases} \arcsin x + C \\ -\arccos x + C \end{cases}$;

VI. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$;

VII. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2+a} \right|$;

VIII. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2 \cdot a} \cdot \ln \left| \frac{x+a}{x-a} \right| + C$

;

IX. $\int \cos x dx = \sin x + C$;

X. $\int \sin x dx = -\cos x + C$;

XI. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$;

XII. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$;

XIII. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \begin{cases} \operatorname{arctg} x + C \\ -\operatorname{arcctg} x + C \end{cases}$;

XIV. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$;

XV. $\int (\sqrt{x^2+a}) dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2+a} + \frac{a}{2} \ln \left| x + \sqrt{x^2+a} \right| + C$;

XVI. $\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b)$.

Займемся теперь основными свойствами неопределенных интегралов и правилами их вычисления [2].

Примем без доказательства свойства неопределенного интеграла:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$;
2. $d\int f(x)dx = f(x)dx$.
3. $\int dF(x) = F(x) + C$;
4. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$. (k —постоянная);
5. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$ и $u = \varphi(x)$, то $\int f(u)du = F(u) + C$.

В частности, $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + C$, где $a \neq 0$.

$$6. \int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

Пример 1. Найти $\int \frac{3x^3 - 5x\sqrt[3]{x} + 4x - \sqrt{x}}{x\sqrt{x}}dx$.

Решение. Разделим почленно числитель на знаменатель; в результате подынтегральная функция раскладывается на слагаемые, каждое из которых проинтегрируем:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^3 - 5x\sqrt[3]{x} + 4x - \sqrt{x}}{x\sqrt{x}}dx &= \int \left(3\frac{x^3}{x\sqrt{x}} - 5\frac{x\sqrt[3]{x}}{x\sqrt{x}} + 4\frac{x}{x\sqrt{x}} - \frac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x}} \right)dx = \\ &= \int \left(3x^{3/2} - 5x^{-1/6} + 4x^{-1/2} - \frac{1}{x} \right)dx = 3\int x^{3/2}dx - 5\int x^{-1/6}dx + 4\int x^{-1/2}dx - \\ &- \int \frac{1}{x}dx = 3\frac{x^{3/2+1}}{3/2+1} - 5\frac{x^{-1/6+1}}{-1/6+1} + 4\frac{x^{-1/2+1}}{-1/2+1} - \ln|x| + C = \frac{6}{5}x^{5/2} - 6x^{5/6} + \\ &+ 8x^{1/2} - \ln|x| + C = \frac{6}{5}x^2\sqrt{x} - 6\sqrt[6]{x^5} + 8\sqrt{x} - \ln|x| + C. \end{aligned}$$

Пример 2. Найти $\int \frac{x^2dx}{x^2+4}$.

Решение. Прибавляя и вычитая в числителе подынтегральной функции число 4, получим

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2dx}{x^2+4} &= \int \frac{x^2+4-4}{x^2+4}dx = \int \left(1 - \frac{4}{x^2+4} \right)dx = \int dx - 4\int \frac{dx}{x^2+4} = \\ &= x - 4 \cdot \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C = x - 2 \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C. \end{aligned}$$

Пример 3. Найти $\int (1-3^x)^2dx$.

Решение. Возведём в квадрат подынтегральную функцию и проинтегрируем каждое слагаемое, имеем

$$\int (1 - 3^x)^2 dx = \int (1 - 2 \cdot 3^x + 9^x) dx = \int dx - 2 \int 3^x dx + \int 9^x dx = x - 2 \frac{3^x}{\ln 3} + \frac{9^x}{\ln 9} + C.$$

Пример 4. Найти $\int \operatorname{ctg}^2 x dx$

Решение. Для упрощения подынтегрального выражения воспользуемся тригонометрической формулой

$$1 + \operatorname{ctg}^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}.$$

Откуда получаем

$$\int \operatorname{ctg}^2 x dx = \int \left(\frac{1}{\sin^2 x} - 1 \right) dx = \int \frac{dx}{\sin^2 x} - \int dx = -\operatorname{ctg} x - x + C.$$

Пример 5. Вычислить $\int \operatorname{tg}^3 x d \operatorname{tg} x$.

Воспользуемся свойством 5 неопределённого интеграла, где $u = \operatorname{tg} x$, имеем

$$\int \operatorname{tg}^3 x d \operatorname{tg} x = \frac{(\operatorname{tg} x)^{3+1}}{3+1} + C = \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} + C.$$

§ 2. Интегрирование подстановкой

Замена переменной (подстановка) $x = \varphi(t)$ в интеграл производится по формуле

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt; \quad (1.1)$$

при этом говорят, что в интеграле слева сделана замена переменной (подстановка) $x = \varphi(t)$. Формулой (1.1) можно пользоваться следующим образом: подобрать функцию $x = \varphi(t)$ так, чтобы, подставив вместо x подынтегральное выражение, получить более простой интеграл.

Теорема: Если требуется найти интеграл $\int f(x) dx$, но сложно отыскать первообразную, то с помощью замены $x = \varphi(t)$ и $dx = \varphi'(t) dt$ получается:

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt.$$

Доказательство: Продифференцируем предлагаемое равенство:

$$d \int f(x) dx = d(\int f[\varphi(t)] \varphi'(t) dt)$$

По рассмотренному выше свойству №2 неопределенного интеграла получим

$$f(x)dx = f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt.,$$

что с учетом введенных обозначений и является исходным предположением. Теорема доказана.

Пример 1. Найти $\int \sqrt{5x-3}dx$.

Решение. Данный интеграл окажется табличным, если под знаком дифференциала будет стоять аргумент $5x-3$ подынтегральной функции $\sqrt{5x-3}$. Так как $d(5x-3)=5dx$, то

$$\int \sqrt{5x-3}dx = \frac{1}{5} \int (5x-3)^{1/2} d(5x-3) = \frac{2(5x-3)^{3/2}}{15} + C.$$

При вычислении воспользовались формулой $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, где $n = \frac{1}{2}$.

Пример 2. Найти $\int \sin(3x+1)dx$.

Решение. Заметим, что $dx = \frac{1}{3} d(3x+1)$, т.к. $d(5x-3) = (5x-3)'dx = 5dx$. Целесообразно ввести переменную $t = 3x+1$. Тогда $dx = \frac{1}{3} dt$. Заменяя всюду под интегралом dx на $\frac{1}{3} dt$, $3x+1$ на t , получим

$$\int \sin(3x+1)dx = \frac{1}{3} \int \sin t dt = -\frac{1}{3} \cos(3x+1) + C.$$

На основании вышеизложенного можно ввести формулу

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C, \text{ где } a \neq 0., \quad (1.2)$$

где $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$.

$$\text{Тогда } \int e^{2x+3} dx = \frac{1}{2} e^{2x+3} + C.$$

Из формулы (1.2) получим

$$1. \int \sin(ax+b) dx = -\frac{1}{a} \cos(ax+b) + C.$$

$$2. \int \cos(ax+b)dx = \frac{1}{a} \sin(ax+b) + C.$$

$$3. \int \frac{1}{(ax+b)}dx = \frac{1}{a} \ln(ax+b) + C.$$

Пример 3. Найти $\int \frac{3e^{2x} dx}{\sqrt{e^{4x} + 5}}$.

Решение. Заметим, что $e^{4x} = (e^{2x})^2$. Целесообразно ввести переменную $e^{2x} = t$. Тогда $de^{2x} = dt$; $(e^{2x})' dx = dt$; $e^{2x} 2dx = dt$. Заменяя всюду под интегралом $e^{2x} dx$ на $\frac{dt}{2}$, e^{2x} на t , получим

$$\int \frac{3dt}{2\sqrt{t^2 + 5}} = \frac{3}{2} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + 5}} = \frac{3}{2} \ln|t + \sqrt{t^2 + 5}| + C = \frac{3}{2} \ln|e^{2x} + \sqrt{e^{4x} + 5}| + C.$$

Пример 4. Найти $\int \frac{2 \sin x dx}{\sqrt{3 + \cos^2 x}}$.

Решение. Заметим, что $\sin x dx = -d \cos x$, т.к. $d \cos x = (\cos x)' dx = -\sin x dx$. Целесообразно ввести переменную $t = \cos x$. Заменяя всюду под интегралом $\sin x dx$ на $-dt$, $\cos x$ на t , получим

$$\int \frac{2 \sin x dx}{\sqrt{3 + \cos^2 x}} = -2 \int \frac{dt}{\sqrt{3 + t^2}} = -2 \ln|t + \sqrt{3 + t^2}| + C = -2 \ln|\cos x + \sqrt{3 + \cos^2 x}| + C.$$

Задания для решения в аудитории

Найти интегралы.

$$1. \int \frac{(\sqrt{x} + 2)^2}{x^3} dx.$$

$$2. \int 3^x \left(3 + \frac{3^{-x}}{\sin^2 x} \right) dx.$$

$$3. \int \left(\frac{5}{x^2 + 9} - \frac{1}{\sqrt{x^2 - 3}} \right) dx.$$

$$4. \int \frac{1 + x^2 + 3 \cos^2 x}{(1 + x^2) \cos^2 x} dx.$$

$$5. \int \sqrt{4x - 3} dx.$$

$$6. \int \frac{1}{\sin^2(1 - 5x)} dx.$$

$$7. \int \frac{dx}{5x-2}.$$

$$8. \int 2^{3x-1} dx.$$

$$9. \int \frac{\left(2 - e^{-\frac{1}{x}}\right)}{x^2} dx.$$

$$10. \int x^2 e^{1-x^3} dx.$$

$$11. \int \frac{dx}{(1+x^2) \operatorname{arctg}^2 x}.$$

$$12. \int \frac{\cos x dx}{\sin^3 x}.$$

Ответы

$$1. -\frac{1}{x} - \frac{8}{3x\sqrt{x}} - \frac{2}{x^2} + C. \quad 2. \frac{3^{x+1}}{\ln 3} - \operatorname{ctg} x + C.$$

$$3. \frac{5}{3} \operatorname{arcc} \operatorname{tg} \frac{x}{3} - \ln \left| x + \sqrt{x^2 - 3} \right| + C. \quad 4. \operatorname{tg} x + 3 \operatorname{arctg} x + C.$$

$$5. \frac{1}{6} \cdot \sqrt{(4x-3)^3} + C. \quad 6. \frac{1}{5} \operatorname{ctg}(1-5x) + C. \quad 7. \frac{1}{5} \ln(5x-2) + C.$$

$$8. \frac{2^{3x-1}}{3 \ln 2} + C. \quad 9. -\frac{2}{x} + e^{-\frac{1}{x}} + C. \quad 10. -\frac{e^{1-x^3}}{3} + C. \quad 11. -\frac{1}{\operatorname{arctg} x} + C.$$

$$12. -\frac{1}{2 \sin^2 x} + C.$$

§ 3. Интегрирование по частям

Пусть $u = u(x)$ и $v = v(x)$ имеют непрерывные производные на некотором промежутке x . Найдем дифференциал производных этих функций: $d(uv) = u'v du + uv' dv$.

Так как по условию функции $u'v$ и uv' непрерывны, можно проинтегрировать обе части этого равенства: $\int d(uv) = \int u'v dx + \int uv' dv$ или $\int d(uv) = \int v du + \int u dv$, но $\int d(uv) = uv + C$, следовательно,

$$\int u dv = uv - \int v du. \quad (1.3)$$

Формула (1.3) называется **формулой интегрирования по частям**.

Сущность метода интегрирования по частям вполне соответствует его названию. Дело в том, что при вычислении интеграла этим

методом подынтегральное выражение $f(x)dx$ представляют в виде произведения множителей $u(x)$ и $dv(x)$; при этом dx обязательно входит в $dv(x)$. В результате получается, что заданный интеграл находят по частям: сначала находят $\int dv$, а затем $\int v dv$. Естественно, что этот метод применим лишь в случае, если задача нахождения указанных интегралов более проста, чем нахождение заданного интеграла [3].

Пример 1. Найти $\int x \sin x dx$.

Решение. Положим $u = x$; $dv = \sin x dx$, тогда $du = dx$; $v = \int \sin x dx = -\cos x$.

По формуле (1.3) находим

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C.$$

Рассмотрим некоторые конкретные способы разбиения подынтегрального выражения на множители u и dv .

В интегралах вида $\int P(x)e^{ax} dx$, $\int P(x)\sin ax dx$, $\int P(x)\cos ax dx$, где $P(x)$ – многочлен относительно x ; a – некоторое число, полагают $u = P(x)$, а все остальные сомножители – за dv .

Пример 2. Найти $\int (x+5)e^{2x} dx$.

Решение. Положим $u = x+5$; $dv = e^{2x} dx$, тогда $du = (x+5)' dx$ или $du = dx$, т.к. $(x+5)' = x' + 5' = 1 + 0 = 1$. Следовательно, оставшиеся сомножители равны dv . Таким образом, $dv = e^{2x} \frac{1}{2} d2x$, интегрируя последнее равенство, получим $v = \frac{1}{2} \int e^{2x} d2x = \frac{1}{2} e^{2x}$.

По формуле (1.3) находим

$$\begin{aligned} \int (x+5)e^{2x} dx &= (x+5) \frac{1}{2} e^{2x} - \frac{1}{2} \int e^{2x} dx = \frac{(x+5)}{2} e^{2x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \int e^{2x} d2x = \\ &= \frac{(x+5)}{2} e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x} + C. \end{aligned}$$

В интегралах вида $\int P(x)\ln|ax| dx$, $\int P(x)\arcsin ax dx$,

$\int P(x)\arccos ax dx$, $\int P(x)\arctg ax dx$, $\int P(x)\text{arcctg} ax dx$ полагают $P(x)dx = dv$, а остальные сомножители – за u .

Пример 3. Найти $\int (5x^3 + 2x^2 + 3) \ln|x| dx$.

Решение. Положим $u = \ln|x|$; $dv = (5x^3 + 2x^2 + 3)dx$, тогда $du = (\ln|x|)' dx = \frac{1}{x} dx$; $\int dv = \int (5x^3 + 2x^2 + 3) dx$, откуда

$$v = \int (5x^3 + 2x^2 + 3) dx = 5 \int x^3 dx + 2 \int x^2 dx + 3 \int dx = 5 \frac{x^{3+1}}{3+1} + 2 \frac{x^{2+1}}{2+1} + 3x = \frac{5}{4} x^4 + \frac{2}{3} x^3 + 3x.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int (5x^3 + 2x^2 + 3) \ln|x| dx &= \left(\frac{5}{4} x^4 + \frac{2}{3} x^3 + 3x \right) \ln|x| - \int \left(\frac{5}{4} x^4 + \frac{2}{3} x^3 + 3x \right) \frac{1}{x} dx = \\ &= \left(\frac{5}{4} x^4 + \frac{2}{3} x^3 + 3x \right) \ln|x| - \left[\frac{5}{4} \int \frac{x^4}{x} dx + \frac{2}{3} \int \frac{x^3}{x} dx + 3 \int \frac{x}{x} dx \right] = \\ &= \left(\frac{5}{4} x^4 + \frac{2}{3} x^3 + 3x \right) \ln|x| - \left[\frac{5}{4} \int x^3 dx + \frac{2}{3} \int x^2 dx + 3 \int dx \right] = \\ &= -\frac{5}{4} \cdot \frac{x^{3+1}}{3+1} - \frac{2}{3} \cdot \frac{x^{2+1}}{2+1} - 3x + C = \left(\frac{5}{4} x^4 + \frac{2}{3} x^3 + 3x \right) \ln|x| - \frac{5}{16} x^4 - \frac{2}{9} x^3 - 3x + C. \end{aligned}$$

Задания для решения в аудитории

1. $\int (5x - 1) \sin \frac{x}{5} dx$.

2. $\int \frac{x dx}{\sin^2 x}$.

3. $\int x \operatorname{arctg} x dx$.

4. $\int (x^2 + 5) \sin x dx$.

5. $\int \frac{\ln x}{x^3} dx$.

6. $\int e^x \ln(1 + 3x) dx$.

Ответы

1. $-(25x - 5) \cos \frac{x}{5} + 125 \sin \frac{x}{5} + C$. 2. $-x \cdot \operatorname{ctg} x + \ln|\sin x| + C$.

3. $\frac{1}{2} (x^2 \cdot \operatorname{arctg} x - x + \operatorname{arctg} x) + C$. 4. $-(x^2 + 7) \sin x + 2x \cos x + C$.

$$5. -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C. \quad 6. \frac{1}{3}(1+e^x)(\ln(1+e^x)-1)+C.$$

Индивидуальные задания

Вычислить неопределенные интегралы:

$$1.1) \int \frac{x^2 dx}{(3+2x^3)^2},$$

$$2) \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^4}},$$

$$3) \int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx,$$

$$4) \int \frac{x^2 dx}{x^6+4},$$

$$5) \int (x^2+1)^2 dx,$$

$$6) \int x^2 \cdot \ln x dx.$$

$$2. 1) \int (3+2\cos x)\sin x dx,$$

$$2) \int \frac{\ln x}{5x} dx,$$

$$3) \int \frac{x + \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx,$$

$$4) \int \frac{x dx}{x^4+1},$$

$$5) \int (\sqrt{x}+2)^2 \cdot x dx,$$

$$6) \int x^3 \ln x dx.$$

$$3. 1) \int \frac{x}{\sqrt{3-2x^2}} dx,$$

$$2) \int \frac{\operatorname{tg}^3 x}{\cos^2 x} dx,$$

$$3) \int \frac{(\arcsin x)^3 dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$4) \int \frac{x^2 dx}{2x^3+9},$$

$$5) \int (1+\sqrt{x})^2 \cdot 2x dx,$$

$$6) \int x \ln x dx.$$

$$4. 1) \int 4x\sqrt{1-2x^2} dx,$$

$$2) \int \frac{3x^2 dx}{x^3-7},$$

$$3) \int \frac{e^{2x}-1}{e^x} dx,$$

$$4) \int \frac{\operatorname{tg}^3 x}{\sin^2 x} dx,$$

$$5) \int (x^2+1)^2 \cdot \sqrt{x} dx,$$

$$6) \int (2x+3)\cos x dx.$$

$$5. 1) \int \frac{\cos x dx}{\sqrt{2\sin x+1}},$$

$$2) \int \frac{e^x + \sin x}{e^x - \cos x} dx,$$

$$3) \int \frac{2^{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} dx,$$

$$4) \int \frac{e^x dx}{e^{2x}+4},$$

$$5) \int (2x+3)^2 \cdot x dx ,$$

$$6. 1) \int \frac{x^2}{x^3-3} dx ,$$

$$3) \int \sin^2 x \cos x dx ,$$

$$5) \int (x^3+2) \cdot x dx ,$$

$$7.1) \int \cos^2 x \sin x dx ,$$

$$3) \int x \sin x^2 dx ,$$

$$5) \int (x+x^2) dx$$

$$8.1) \int \frac{(3-\sqrt{x})^2}{x^2} dx ,$$

$$3) \int \frac{\sqrt{2+\ln x}}{x} dx ,$$

$$5) \int x \cdot (x^2+3)^3 dx ,$$

$$9. 1) \int \frac{x^5+x+\sqrt[3]{x}}{x^2} dx ,$$

$$3) \int \frac{dx}{x \ln^2 x} ,$$

$$5) \int (2x+3)^2 \cdot x dx ,$$

$$10. 1) \int \frac{xdx}{2x^2-1} ,$$

$$3) \int \frac{\sin x}{\sqrt[3]{1+\cos x}} dx ,$$

$$5) \int (\sqrt{x}+3)^2 \cdot x dx ,$$

$$11. 1) \int \frac{\sqrt{2+\ln x}}{x} dx ,$$

$$3) \int \frac{1}{\sqrt{1+4x^2}} dx ,$$

$$6) \int \frac{\ln x}{x^3} dx .$$

$$2) \int \frac{x+\arctg x}{1+x^2} dx ,$$

$$4) \int \frac{e^x dx}{\sqrt{25-e^{2x}}} ,$$

$$6) \int \sqrt{x} \ln x dx .$$

$$2) \int \frac{2x}{\sqrt{3x^2+1}} dx ,$$

$$4) \int \frac{xdx}{\sqrt{25-x^2}} ,$$

$$6) \int \sqrt{x} \ln x dx .$$

$$2) \int \sin^2 x \cdot \cos x dx ,$$

$$4) \int \frac{xdx}{\sqrt{4-x^2}} ,$$

$$6) \int x \ln x dx .$$

$$2) \int \frac{xdx}{\sqrt{2x^2+7}} ,$$

$$4) \int \frac{4xdx}{\sqrt{1-x^4}} ,$$

$$6) \int x \cdot \cos x dx .$$

$$2) \int \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}} ,$$

$$4) \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^8}} ,$$

$$6) \int (2-x) \cdot e^x dx .$$

$$2) \int \frac{\cos x dx}{\sqrt[5]{\sin^2 x}} ,$$

$$4) \int \frac{e^x dx}{\sqrt{4-e^{2x}}} ,$$

$$5) \int x e^{\frac{x}{2}} dx,$$

$$12. 1) \int (3 + 2 \cos x)^3 \sin x dx,$$

$$3) \int \frac{dx}{\sqrt{4 - x^2}},$$

$$5) \int x \sin 4x dx,$$

$$13. 1) \int 2x \sqrt{x^2 + 4} dx,$$

$$3) \int \frac{2 + \ln x}{2x} dx,$$

$$5) \int (2x + 1) \sin x dx,$$

$$14. 1) \int \frac{\sqrt[3]{\ln x - 7}}{x} dx,$$

$$3) \int x e^{x^2} dx,$$

$$5) \int \frac{\ln x}{x^5} dx,$$

$$15. 1) \int x e^{x^2 - 1} dx,$$

$$3) \int (2x\sqrt{x} - 7x)^2 dx,$$

$$5) \int x \sin(3x + 5) dx,$$

$$16. 1) \int \frac{e^{3x} dx}{1 - e^{3x}},$$

$$3) \int \frac{1 - \arctg x}{1 + x^2} dx,$$

$$5) \int x \cdot \arctg x dx,$$

$$17.1) \int \left(\frac{x^2 - 3\sqrt{x}}{x^3} + \frac{1}{x^2 - 5} \right) dx,$$

$$3) \int (7x - 3) e^{2x} dx,$$

$$6) \int \frac{\ln x}{x^2} dx.$$

$$2) \int x e^{x^2} dx,$$

$$4) \int \frac{3^{\arctg x}}{1 + x^2} dx,$$

$$6) \int x^4 \ln x dx.$$

$$2) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(x^3 - 2)}},$$

$$4) \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{9 + x^6}},$$

$$6) \int \arctg x dx.$$

$$2) \int \frac{\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1 - x^2}} dx,$$

$$4) \int \frac{x^2 dx}{4 + x^6},$$

$$6) \int \arcsin x dx.$$

$$2) \int \frac{dx}{x \sqrt{\ln x + 10}},$$

$$4) \int \frac{e^x dx}{\sqrt{1 - e^{2x}}},$$

$$6) \int x^2 \ln x dx.$$

$$2) \int \sqrt{2 - \cos x} \cdot \sin x dx$$

$$4) \int \frac{(2x \cdot \sqrt{x} - 3)^2}{x} dx,$$

$$6) \int x^3 \cdot \ln x dx.$$

$$2) \int \frac{3x^2 dx}{(1 - 5x^3)^3},$$

$$4) \int \cos^2 5x dx$$

$$5) \int \left(\frac{\sqrt[3]{x} + 2}{x} - \frac{2}{x^2 + 3} \right) dx,$$

$$17.1) \int \left(\frac{2 - \sqrt{x^3}}{\sqrt{x}} + \frac{7}{\sqrt{8 - x^2}} \right) dx,$$

$$3) \int (2x - 3) \cos 4x dx,$$

$$5) \int \left(\frac{1 - x^5}{x^4} + \frac{2}{x^2 - 5} \right) dx,$$

$$18.1) \int \left(\frac{1 - x}{\sqrt{x}} + 3^{x+1} + \frac{1}{10 - x^2} \right) dx,$$

$$3) \int (3x - 2) \cos 5x dx,$$

$$5) \int \left(\frac{3}{\sqrt{5 - x^2}} + \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{2}{x^3} \right) dx,$$

$$19. 1) \int (x^5 + 2x - 1) \ln x dx,$$

$$3) \int \left(\frac{1}{\sqrt[5]{x^2}} - \frac{3}{\sqrt{x^2 + 2}} \right) dx,$$

$$5) \int \left(\frac{x + x^2 \cos x - 5}{x^2} + \frac{1}{3 - x^2} \right) dx,$$

$$20.1) \int \left(\frac{1}{\sqrt{5 - x^2}} + \frac{3}{x + 2} - x\sqrt{x} \right) dx,$$

$$3) \int (3 - 2x) \cos x dx,$$

$$4) \int \left(\frac{1 - x^5}{x^3} + \frac{4}{x^2 - 9} \right) dx,$$

$$21. 1) \int \left(\frac{1}{x^2 - 1} + 2^x - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx,$$

$$3) \int \left(\frac{3x^3 - xe^x + 2}{x} - \frac{1}{\sqrt{7 - x^2}} \right) dx$$

$$5) \int \frac{3 - \ln x}{x} dx,$$

$$6) \int y \sqrt{3y^2 + 1} dy.$$

$$2) \int (1 - 3x) e^{2x - 3x^2} dx,$$

$$4) \int \sin 2x \cos 4x dx,$$

$$6) \int \frac{x dx}{(x^2 + 9)^3}.$$

$$2) \int x \cos(5x^2 - 3) dx,$$

$$4) \int \sin^2 \frac{2x}{5} dx,$$

$$6) \int \frac{2x^2 dx}{5 - 2x^3}.$$

$$2) \int \sin \frac{3}{5} x \cos 3x dx,$$

$$4) \int \frac{\arctg x dx}{(x^2 + 1)},$$

$$6) \int (1 - \sin x)^2 \cos x dx.$$

$$2) \int \frac{3 \ln^5 x + 5x - 2}{x} dx,$$

$$4) \int \cos^2 \frac{3x}{5} dx,$$

$$6) \int \frac{x dx}{(x^2 + 9)^3}$$

$$2) \int \frac{\sqrt[3]{\arctg x + 3} - x}{x^2 + 1} dx,$$

$$4) \int \frac{3x - \sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1 - x^2}} dx,$$

$$6) \int \cos \frac{2x}{7} \cos \frac{3x}{5} dx.$$

$$22.1) \int \left(\frac{3-x \cdot 7^x}{x} + \frac{1}{x^2} - \frac{3}{x^2+3} \right) dx,$$

$$3) \int (3-4x) \sin x dx,$$

$$5) \int \left(\frac{3-2\cos^3 x}{\cos^2 x} + \frac{1}{8-x^2} - \sqrt[7]{x^3} \right) dx,$$

$$23. 1) \int 3x^2 e^{x^3} dx,$$

$$3) \int \left(\frac{2x-5}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x^2-6}} - 4^{x+1} \right) dx,$$

$$5) \int \left(\frac{(x+1)^2}{x^2} + \frac{1}{8-x^2} - 5^{x+1} \right) dx,$$

$$24.1) \int \left(\frac{x \cdot 3^x + 2\sqrt{x} - 5}{x} + \frac{3}{x^2+11} \right) dx,$$

$$3) \int \left(\frac{2}{\sqrt{2-x^2}} + (\sqrt[3]{x}-2)^3 - \frac{1}{x^3} \right) dx,$$

$$5) \int (3x^2 - 4x + 3) \ln x dx,$$

$$25. 1) \int \left(\frac{5}{x^2+7} - \sqrt[3]{x} + 2^{x+1} \right) dx,$$

$$3) \int \left(\frac{2-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x^4}} + \frac{1}{\sqrt{x^2-2}} + \frac{1}{\sin^2 x} \right) dx,$$

$$5) \int (x-\pi) \cos \pi x dx,$$

$$26.1) \int \left(\frac{2-\sqrt{x^3}}{\sqrt{x}} + \frac{3}{\sqrt{2-x^2}} + 2^{x+2} \right) dx$$

$$3) \int \left(\frac{x^2-9}{3-x} + \frac{1}{x^2-9} - 3^{x+1} \right) dx,$$

$$5) \int (2x-3)e^x dx,$$

$$27.1) \int \left(\frac{(2x+3)^2}{x\sqrt{x}} - \frac{1}{\sqrt{3-x^2}} + \frac{5}{x} \right) dx,$$

$$3) \int (x^2 - x + 3) \ln x dx,$$

$$2) \int e^{2x^3-5} \cdot x^2 dx,$$

$$4) \int \cos^2 2x dx,$$

$$5) \int e^{5x^2+2x-3} (5x+1) dx.$$

$$2) \int \sin 3x \sin 4x dx,$$

$$4) \int \frac{3-\sqrt[3]{tg^2 x}}{\cos^2 x} dx,$$

$$6) \int e^{3x} (e^{3x} + 5)^7 dx.$$

$$2) \int \frac{x^5 dx}{\sqrt[3]{1-5x^6}},$$

$$4) \int \frac{tg^3 x + 5}{\cos^2 x} dx,$$

$$6) \int \cos^2 8x dx.$$

$$2) \int \frac{3x^2 - 2 + e^{1/x}}{x^2} dx,$$

$$4) \int \frac{\sin x dx}{(3\cos x - 5)^5},$$

$$6) \int \sin \frac{2x}{5} \sin \frac{5x}{3} dx.$$

$$2) \int \frac{3 + (5ctg x - 3)^{10}}{\sin^2 x} dx,$$

$$4) \int \frac{\cos x dx}{\sqrt{3\sin x - 5}},$$

$$6) \int \sin 2x \cos 4x dx.$$

$$2) \int \frac{2e^{\sqrt{x}} + 3\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx,$$

$$4) \int \sin 4x \cos 2x dx,$$

$$5) \int \left(\frac{2}{x^2 - 2} + (2\sqrt{x} - 5)^2 - \frac{1}{\sqrt[3]{x^5}} \right) dx,$$

$$28. 1) \int (2 - x)e^x dx,$$

$$3) \int \left(\frac{1}{\sqrt{4 - 9x^2}} + \frac{3x - 2}{\sqrt[3]{x}} - 2^{x+3} \right) dx,$$

$$5) \int (3x^2 - 1) \ln x dx,$$

$$29. 1) \int \left(\frac{1 - 5x}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{4x^2 + 1}} - \frac{2^{x+1}}{3^x} \right) dx,$$

$$3) \int (x + 1)^2 \ln(x + 1) dx,$$

$$5) \int \frac{x^2 dx}{(3 + 2x^3)^2},$$

$$30. 1) \int \frac{\sqrt{1 + \ln x}}{x} dx,$$

$$3) \int (x^2 + 1)^2 dx,$$

$$5) \int \frac{\sin x dx}{\sqrt[3]{3 + 2\cos x}},$$

$$6) \int x \sin(3 - 5x^2) dx.$$

$$2) \int \cos \frac{x}{5} \cos \frac{4x}{5} dx,$$

$$4) \int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x + 5},$$

$$6) \int \sin 2x \cos 2x dx.$$

$$2) \int \frac{2x - 1}{\sqrt[5]{x^2 - x}} dx,$$

$$4) \int \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} dx$$

$$6) \int \frac{x dx}{\sqrt{1 - x^4}}.$$

$$2) \int \frac{x^2 dx}{x^6 + 4},$$

$$4) \int x^2 \cdot \ln x dx,$$

$$6) \int \frac{\ln x}{5x} dx.$$

§ 4. Интегрирование простейших дробей

Рациональной дробью называется функция $R(x)$, представленная в виде

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены с действительными коэффициентами.

Рациональная дробь $R(x)$ называется правильной, если степень числителя меньше степени знаменателя.

Всякая правильная рациональная дробь может быть представлена в виде суммы конечного числа простейших дробей следующих четырех типов:

$$\frac{A}{x-a}; \frac{A}{(x-a)^n} \quad (n > 1 \text{ натуральное число});$$

$$\frac{ax+b}{px^2+qx+d}; \frac{ax+b}{(px^2+qx+d)^n} \quad (n > 1 \text{ натуральное число}),$$

где $q^2 - 4p \cdot d < 0$, т. е. корни знаменателя мнимые.

Таким образом, для интегрирования правильных рациональных дробей достаточно уметь: 1) интегрировать простейшие дроби; 2) разлагать рациональные дроби на простейшие.

Этот параграф посвящен решению первой из этих задач. Рассмотрим сначала простейшие дроби первых двух типов.

Пример 1. $\int \frac{A}{x-a} dx$.

Решение. Заметим, что $dx = d(x-a)$, т.к. $d(x-a) = (x-a)' dx = dx$.

$$\int \frac{A}{x-a} dx = A \int \frac{d(x-a)}{(x-a)} = A \ln(x-a) + C.$$

Пример 2. $\int \frac{A}{(x-a)^n} dx$.

Решение.

$$\begin{aligned} \int \frac{A}{(x-a)^n} dx &= A \int \frac{d(x-a)}{(x-a)^n} = \int (x-a)^{-n} d(x-a) = A \frac{(x-a)^{-n+1}}{-n+1} + C = \\ &= \frac{A}{(1-n) \cdot (x-a)^{n-1}} + C. \end{aligned}$$

Для интегрирования простейших дробей третьего вида
 $\int \frac{ax+b}{px^2+qx+d} dx$ *вычисляют, используя замену переменных*
 $t = \frac{1}{2}(px^2+qx+d)' = px + \frac{q}{2}$, откуда $x = \frac{(2t+q)}{p}$; $dx = \frac{2}{p} dt$.

Пример 3. Найти $\int \frac{3x+1}{x^2-4x+12} dx$.

Решение. Сделаем замену переменных $t = \frac{1}{2}(x^2 - 4x + 12)' =$
 $= \frac{1}{2}(2x - 4) = x - 2; x = t + 2; dx = d(t + 2); dx = (t + 2)' dt; dx = dt.$

Заменяя всюду под интегралом x на $(t + 2)$, dx на dt , получим

$$\int \frac{3x+1}{x^2-4x+12} dx = \int \frac{3(t+2)+1}{(t+2)^2-4(t+2)+12} dt = \int \frac{3t+7}{t^2+4t+4-4t-8+12} dt = \int \frac{3t+7}{t^2+8} dt =$$

$$= 3 \int \frac{t}{t^2+8} dt + 7 \int \frac{dt}{t^2+8}.$$

При вычислении воспользовались формулой $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$. Второй из полученных интегралов является табличным, а первый находим подстановкой $t^2 + 8 = z$, откуда $d(t^2 + 8) = dz; (t^2 + 8)' dt = dz; 2t dt = dz; t dt = \frac{1}{2} dz$. Следовательно,

$$\int \frac{3x+1}{x^2-4x+12} dx = \frac{3}{2} \int \frac{dz}{z} + 7 \int \frac{dt}{t^2 + (\sqrt{8})^2} = \frac{3}{2} \ln z + 7 \frac{1}{\sqrt{8}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{8}} + C =$$

$$= \frac{3}{2} \ln(t^2 + 8) + \frac{7}{\sqrt{8}} \operatorname{arctg} \frac{t}{\sqrt{8}} + C = \frac{3}{2} \ln[(x-2)^2 + 8] + \frac{7}{\sqrt{8}} \operatorname{arctg} \frac{x-2}{\sqrt{8}} + C.$$

Задания для решения в аудитории

1. $\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 13}.$

2. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 13}}.$

3. $\int \frac{2x-1}{x^2-x+1} dx.$

4. $\int \frac{1}{x^2+10x+27} dx.$

5. $\int \frac{3x-2}{x^2+6x-7} dx.$

6. $\int \frac{dx}{2x^2+3x-1}.$

Ответы

1. $\frac{1}{3} \operatorname{arctg} \frac{x-2}{3} + C.$ 2. $\ln|x-2 + \sqrt{(x-2)^2 + 9}| + C.$

$$3. \ln|x^2 - x + 1| + C. 4. \frac{1}{\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x+5}{\sqrt{2}} + C.$$

$$5. \frac{3}{2} \ln|x^2 + 6x - 7| - \frac{11}{8} \ln \left| \frac{x+7}{x-1} \right| + C. 6. \frac{2}{\sqrt{17}} \ln \left| \frac{4x+3-\sqrt{17}}{4x+3+\sqrt{17}} \right| + C.$$

Индивидуальные задания

$$1. \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}} dx; \int \frac{1}{x^2 + 4x - 12} dx.$$

$$2. \int \frac{1}{\sqrt{-x^2 + 6x}} dx; \int \frac{1}{x^2 + 4x - 12} dx.$$

$$3. \int \frac{dx}{x^2 - 4x + 5}; \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}} dx.$$

$$4. \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 6x + 5}} dx; \int \frac{1}{x^2 + 4x + 13} dx.$$

$$5. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 10}}; \int \frac{1}{x^2 + x + 3} dx.$$

$$6. \int \frac{dx}{x^2 + 4x + 13}; \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2x - 2}} dx.$$

$$7. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 8}}; \int \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx.$$

$$8. \int \frac{dx}{x^2 + 6x + 10}; \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4x + 1}} dx.$$

$$9. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 10}}; \int \frac{1}{x^2 - 4x + 1} dx.$$

$$10. \int \frac{dx}{x^2 - 4x + 5}; \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 6x + 13}} dx.$$

$$11. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 6x + 5}}; \int \frac{1}{x^2 + 2x - 7} dx.$$

$$12. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}}; \int \frac{1}{x^2 + 2x + 5} dx.$$

$$13. \int \frac{dx}{x^2 + 2x + 10}; \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 6x - 16}} dx.$$

14. $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 10}$; $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 6x + 4}} dx$.
15. $\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 5}$; $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 10x - 21}} dx$.
16. $\int \frac{dx}{9 + 4x + x^2}$; $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x - 12}} dx$.
17. $\int \frac{2x - 1}{\sqrt{x^2 - 6x + 13}} dx$; $\int \frac{dx}{x^2 + 6x + 5}$.
18. $\int \frac{1}{4x^2 + 4x - 3} dx$; $\int \frac{dx}{\sqrt{8 + 6x - 9x^2}}$.
19. $\int \frac{dx}{x^2 - 4x + 8}$; $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 12}}$.
20. $\int \frac{dx}{x^2 + 4x - 3}$; $\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 6x + 20}} dx$.
21. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 13}}$; $\int \frac{1dx}{x^2 - 4x + 8}$.
22. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 2}}$; $\int \frac{dx}{3 + 2x - x^2}$.
23. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x - 3 - x^2}}$; $\int \frac{dx}{13 - x^2 - 4x}$ /
24. $\int \frac{dx}{x^2 + 6x + 13}$; $\int \frac{dx}{\sqrt{1 - 4x - x^2}}$.
25. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x - 3 - x^2}}$; $\int \frac{dx}{13 - x^2 - 4x}$.
26. $\int \frac{1}{\sqrt{1 - x - x^2}} dx$; $\int \frac{dx}{x^2 + 6x + 13}$.
27. $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2 + 3x + 4}}$; $\int \frac{2x + 1}{\sqrt{x^2 + 2x + 3}} dx$ /
28. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 8}}$; $\int \frac{dx}{x^2 - 2x + 2}$.
29. $\int \frac{dx}{3 + 2x - x^2}$; $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 8x + 20}}$ /

$$30. \int \frac{1}{\sqrt{x^2 - 6x + 10}} dx; \int \frac{dx}{4x^2 - 8x + 3}.$$

§ 5. Некоторые интегралы тригонометрических функций

1. Интегрирование произведений синусов и косинусов

Интегралы вида $\int \sin ax \cos bx dx$, $\int \cos ax \cos bx dx$, $\int \sin ax \sin bx dx$, вычисляются с использованием формул тригонометрии

$$\begin{aligned}\sin ax \cos bx &= \frac{1}{2} [\sin(a+b)x + \sin(a-b)x], \\ \sin ax \sin bx &= \frac{1}{2} [\cos(a-b)x - \cos(a+b)x] \\ \cos ax \cos bx &= \frac{1}{2} [\cos(a+b)x + \cos(a-b)x], \\ \cos(-x) &= \cos x, \quad \sin(-x) = -\sin x,\end{aligned}$$

которые позволяют представлять произведения синусов и косинусов в виде линейных комбинаций тех же функций (с другими аргументами) и могут быть использованы для интегрирования в рассматриваемом случае.

Пример 1. Найти $\int \sin 7x \cos x dx$.

Решение.

$$\begin{aligned}\int \sin 7x \cos x dx &= \int \frac{1}{2} (\sin(7+1)x + \sin(7-1)x) dx = \frac{1}{2} \int \sin 8x dx + \frac{1}{2} \int \sin 6x dx = \\ &= \frac{1}{16} \int \sin t dt + \frac{1}{12} \int \cos u du = -\frac{1}{16} \cos t + \frac{1}{12} \cos u + C = -\frac{1}{16} \cos 8x + \frac{1}{12} \cos 6x + C.\end{aligned}$$

При вычислении воспользовались заменой переменных

$$\begin{aligned}8x &= t, \quad d(8x) = dt, \quad (8x)' dx = dt, \quad 8dx = dt, \quad dx = \frac{dt}{8}, \quad \text{и} \quad 6x = u, \quad d6x = du, \\ 6dx &= du, \quad dx = \frac{du}{6}.\end{aligned}$$

2. Вычисление интеграла $\int \sin^m x \cos^n x dx$, где m или n – положительное нечетное целое число

Если показатель степени одной из тригонометрических функций – положительное нечетное целое число, то, принимая другую функцию за t , сведем рассматриваемый интеграл к табличным.

Пример 2. Найти $\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x}$.

Решение. Здесь показатель степени синуса равен единице, поэтому делаем подстановку $\cos x = t$, тогда $d \cos x = dt$; $(\cos x)' dx = dt$; $-\sin x dx = dt$; $\sin x dx = -dt$. Заменяв всюду под интегралом $\cos x$ на t , получим

$$\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x} = -\int \frac{dt}{t^2} = -\int t^{-2} dt = -\frac{t^{-2+1}}{-2+1} + C = -\frac{t^{-1}}{-1} + C = \frac{1}{\cos x} + C.$$

Пример 3. Найти $\int \cos^5 x dx$.

Решение. Заметим, что $\cos^5 x = (\cos^2 x)^2 \cos x$. Целесообразно ввести переменную $t = \sin x$, т.к. $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = 1 - t^2$. Тогда $dt = d \sin x$; $dt = (\sin x)' dx$; $dt = \cos x dx$. Заменяв всюду под интегралом $\cos^2 x$ на $1 - t^2$, $\cos x dx$ на dt , получим

$$\begin{aligned} \int \cos^5 x dx &= \int (\cos^2 x)^2 \cos x dx = \int (1 - t^2)^2 dt = \int (1 - 2t^2 + t^4) dt = \int dt - 2 \int t^2 dt + \\ &+ \int t^4 dt = \int dt - 2 \int t^2 dt + \int t^4 dt = t - \frac{2t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C = \sin x - \frac{2\sin^3 x}{3} + \frac{\sin^5 x}{5} + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \cos^5 x dx &= \int (\cos^2 x)^2 \cos x dx = \int (1 - t^2)^2 dt = \int (1 - 2t^2 + t^4) dt = \int dt - 2 \int t^2 dt + \\ &+ \int t^4 dt = \int dt - 2 \int t^2 dt + \int t^4 dt = t - \frac{2t^3}{3} + \frac{t^5}{5} + C = \sin x - \frac{2\sin^3 x}{3} + \frac{\sin^5 x}{5} + C. \end{aligned}$$

При вычислении воспользовались формулой $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

3. Вычисление интеграла $\int \sin^m x \cos^n x dx$, где сумма m и n есть отрицательное четное целое число

Если сумма показателей синуса и косинуса есть отрицательное четное число, подстановка $\tan x = t$ сводит интеграл к табличным.

Пример 4. Найти $\int \frac{dx}{\sqrt{\cos^7 x \sin x}}$.

Решение. $m + n = (7 + 1)/2 = -4$ есть отрицательное четное число, поэтому применяем подстановку $\operatorname{tg} x = t$; $dt = (\operatorname{tg} x)' dx = \frac{1}{\cos^2 x} dx$.

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{\cos^7 x \sin x}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{\cos^8 x \cdot \frac{\sin x}{\cos x}}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\cos^8 x \operatorname{tg} x}} = \int \frac{dx}{\cos^4 x \sqrt{\operatorname{tg} x}} = \\ &= \int \frac{dx}{\cos^2 x \cdot \cos^2 x \sqrt{\operatorname{tg} x}} = \int \frac{dx}{\cos^2 x \cdot \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} \cdot \sqrt{\operatorname{tg} x}} = \int \frac{1 + \operatorname{tg}^2 x}{\sqrt{\operatorname{tg} x}} \cdot \frac{dx}{\cos^2 x} = \\ &= \int \frac{(t^2 + 1)dt}{\sqrt{t}} = \int \frac{t^2 dt}{\sqrt{t}} + \int \frac{dt}{\sqrt{t}} = \int t^{\frac{3}{2}} dt + \int t^{-\frac{1}{2}} dt = \frac{t^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + \frac{t^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{5} t^{\frac{5}{2}} + 2 t^{\frac{1}{2}} \\ &+ C = \frac{2}{5} \sqrt{\operatorname{tg}^5 x} + 2 \sqrt{\operatorname{tg} x} + C. \end{aligned}$$

При вычислении воспользовались формулой $\cos^2 x = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x}$.

4. Вычисление интеграла $\int \sin^m x \cos^n x dx$, m и n – четные неотрицательные числа

Применение формул тригонометрии

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}; \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

позволяет повторным уменьшением вдвое показателей степеней синуса и косинуса в конечном счете свести рассматриваемые интегралы к сумме интегралов от констант и нечетных степеней синуса и косинуса.

Пример 5. Найти $\int \cos^4 x dx$.

Решение. Заметим, что $\cos^4 x = \left[\frac{1 + \cos 2x}{2} \right]^2$.

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\int \cos^4 x \, dx &= \frac{1}{4} \int (1 + \cos 2x)^2 \, dx = \frac{1}{4} \int (1 + 2\cos 2x + \cos^2 2x) \, dx = \frac{1}{4} \int dx + \\
&+ \frac{1}{2} \int \cos 2x \, dx^{*)} + \frac{1}{4} \int \cos^2 2x \, dx = \frac{1}{4} x + \frac{1}{4} \int \cos t \, dt + \frac{1}{4} \int \frac{1 + \cos 4x}{2} \, dx = \frac{1}{4} x + \\
&+ \frac{1}{4} \sin t + \frac{1}{8} \int dx + \frac{1}{8} \int \cos 4x \, dx^{**}) = \frac{1}{4} x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{8} x + \frac{1}{32} \int \cos u \, du = \frac{1}{4} x + \\
&+ \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{8} x + \frac{1}{32} \sin u + C = \frac{1}{4} x + \frac{1}{8} x + \frac{1}{32} \sin 4x + C.
\end{aligned}$$

*) Делаем подстановку $t = 2x$; $dt = 2dx$; $dx = \frac{dt}{2}$.

**) Делаем подстановку $u = 4x$; $du = 4dx$; $dx = \frac{du}{4}$.

Задачи для решения в аудитории

1. $\int \cos^2 \frac{5x}{7} \, dx$.

2. $\int \sin \frac{x}{2} \cos \frac{3x}{2} \, dx$.

3. $\int \sin x \cos 2x \cos 3x \, dx$.

4. $\int \sin^2 3x \cos^2 2x \, dx$.

Ответы

1. $\frac{1}{2} x + \frac{7}{20} \sin \frac{10x}{7} + C$. 2. $-\frac{1}{4} \cos 2x + \frac{1}{2} \cos x + C$.

3. $-\frac{1}{24} \cos 6x + \frac{1}{16} \cos 4x - \frac{1}{8} \cos 2x + C$.

4. $\frac{1}{4} x - \frac{1}{24} \sin 6x + \frac{1}{8} \sin 2x - \frac{1}{32} \sin 8x - \frac{1}{16} \sin 4x + C$.

Индивидуальные задания

1.. $\int \sin^3 x \cos^3 x \, dx$; $\int \sin 4x \cos 6x \, dx$; $\int \cos^2 x \, dx$.

2.. $\int \sin^2 x \cos^3 x \, dx$; $\int \sin 2x \cos 4x \, dx$; $\int \sin^2 x \, dx$.

3.. $\int \sin^3 x \cos^3 x \, dx$; $\int \cos^4 x \, dx$; $\int \sin 3x \cos x \, dx$.

4.. $\int \cos^5 x \, dx$; $\int \sin 6x \cos 2x \, dx$; $\int \cos^4 x \, dx$.

- 5.. $\int \sin^3 x \cos^3 x dx$; $\int \sin 4x \cos 2x dx$; $\int \cos^4 x dx$
- 6.. $\int \sin^4 x \cos^5 x dx$; $\int \sin 6x \cos 2x dx$; $\int \operatorname{ctg}^4 x dx$.
7. $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$; $\int \sin 4x \sin 2x dx$; $\int \sin^4 x dx$.
- 8.. $\int \sin 8x \cos 2x dx$; $\int \cos^2 x dx$; $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$.
9. $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$; $\int \sin^2 x dx$; $\int \sin 3x \cos 5x dx$.
10. $\int \cos^3 x dx$; $\int \cos 3x \sin 6x dx$; $\int \cos^2 x dx$
11. $\int \cos^4 x dx$; $\int \sin 6x \cos 2x dx$; $\int \sin^2 x dx$.
12. $\int \cos 5x \sin 3x dx$; $\int \cos^4 x dx$; $\int \cos^5 x dx$.
13. $\int \sin^2 3x \cos^3 3x dx$; $\int \operatorname{ctg}^5 x dx$; $\int \sin 3x \cos 3x dx$.
14. $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$; $\int \cos^4 x dx$; $\int \sin 2x \cos 3x dx$.
15. $\int \cos^3 x \sqrt{\sin x} dx$; $\int \cos 2x \cos 3x dx$ $\int \sin^2 x dx$.
16. $\int \cos 2x \cos 3x dx$; $\int \cos^2 x dx$ $\int \cos^5 x dx$.
17. $\int \sin^2 x dx$; $\int \sin 2x \cos 3x dx$ $\int \sin^2 x \cos x dx$.
18. $\int \cos^5 x \sqrt{\sin x} dx$; $\int \cos^4 x dx$ $\int \sin 3x \sin 2x dx$.
- 19.. $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$; $\int \sin^2 x dx$; $\int \sin 2x \cos 4x dx$.
20. $\int \sin^2 x dx$; $\int \sin 4x \cos 2x dx$; $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$.
21. $\int \sin 7x \cos 4x dx$; $\int \sin^2 x dx$; $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$.
22. $\int \cos 6x \cos 5x dx$; $\int \cos^2 x \sin x dx$; $\int \sin^4 2x dx$.
23. $\int \sin^2 \frac{x}{3} dx$; $\int \sin^2 x \cos x dx$; $\int \cos^4 4x dx$.
24. $\int \cos 5x \sin x dx$; $\int \cos^7 \frac{x}{3} \sin^3 \frac{x}{3} dx$; $\int \frac{\sin^4 2x dx}{\cos^2 2x}$.
25. $\int \cos 5x \cos 2x dx$; $\int \sin^5 3x \cos^3 3x dx$; $\int \cos^4 2x dx$.
26. $\int \cos^4 x dx$; $\int \sin 6x \cos 2x dx$; $\int \sin^2 x dx$.
27. $\int \sin^3 x \cos^2 x dx$; $\int \sin^2 x dx$; $\int \sin 3x \cos 5x dx$.
28. $\int \sin^2 x \cos^3 x dx$; $\int \sin 4x \sin 2x dx$; $\int \sin^4 x dx$.
29. $\int \cos 2x \cos 3x dx$; $\int \cos^2 x dx$ $\int \cos^5 x dx$.

30. $\int \cos x \cos 4x dx$; $\int \cos^4 x dx$; $\int \cos^3 x dx$.

Контрольная работа по теме «Неопределённый интеграл»

1.01 а) $\int \frac{3x^2 dx}{(1-5x^3)^3}$;

б) $\int 4 \sin 3x dx$;

в) $\int (x-1)e^{2x} dx$;

г) $\int \frac{dx}{x^2 - 7x + 10}$.

д) $\int \left(\frac{1-5x}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{4x^2+1}} - \frac{2^{x+1}}{3^x} \right) dx$;

1.02 а) $\int \frac{x dx}{x^2 + 9}$;

б) $\int \cos 2x dx$;

в) $\int x \ln|x| dx$;

г) $\int \frac{dx}{4+x+x^2}$;

д) $\int \left(\frac{1}{\sqrt{4-9x^2}} + \frac{3x-2}{\sqrt[3]{x}} - 2^{x+3} \right) dx$;

1.03 а) $\int y \sqrt{3y^2+1} dy$;

б) $\int (5 \cos^3 x + x) dx$;

в) $\int \operatorname{arctg} 2x dx$;

г) $\int \frac{5}{\sqrt{x^2+6x+20}} dx$.

1.04 а) $\int x e^{-x^2} dx$;

б) $\int \frac{\sin y dy}{\sin^2 y + 2 \cos^2 y}$;

в) $\int x^2 e^x dx$;

г) $\int \frac{dx}{x^2 - x - 6}$.

1.05 а) $\int \cos \varphi \sqrt{\sin \varphi} d\varphi$;

б) $\int \cos\left(\frac{x}{3}\right) \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx$;

в) $\int \arcsin 2x dx$;

г) $\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 4}$.

1.06 а) $\int \frac{2x dx}{5-2x}$;

б) $\int \cos^5 x dx$;

в) $\int x \operatorname{arctg} x dx$;

г) $\int \frac{dx}{x^2 + 10x + 34}$.

1.07 а) $\int \frac{dx}{x^2 + 10x + 30}$;

б) $\int \sin^4 x \cos^5 x dx$;

в) $\int (x-1)e^{2x} dx$;

1.08 а) $\int x \cos(x^2 + 1) dx$;

б) $\int \sin 5x \sin 2x dx$;

в) $\int x e^{2x} dx$;

$$\Gamma) \int \frac{dx}{2x^2 - 2x + 3}.$$

$$\Gamma) \int \frac{4}{x^2 + x - 12}.$$

$$1.09 \text{ a) } \int \frac{dx}{x \ln^2 x};$$

$$\text{б) } \int \cos 3x \cos x dx;$$

$$\text{в) } \int x \cos 2x dx;$$

$$\Gamma) \int \frac{3}{x^2 - 4x + 8} dx.$$

$$1.10 \text{ a) } \int \frac{\operatorname{arctg} x}{1 + x^2} dx;$$

$$\text{б) } \int \cos x \cos 2x dx;$$

$$\text{в) } \int (x + 1) \sin 2x dx;$$

$$\Gamma) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 13}}.$$

$$1.11 \text{ a) } \int \frac{e^{\operatorname{tg} x} dx}{\cos^2 x};$$

$$\text{б) } \int \cos 5x \sin 3x dx;$$

$$\text{в) } \int (x + 1) \sin 2x dx;$$

$$\Gamma) \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 6x + 5}}.$$

$$1.12 \text{ a) } \int \frac{e^x dx}{2 - 3e^x};$$

$$\text{б) } \int 5 \cos^2 \left(\frac{x}{2} \right) dx;$$

$$\text{в) } \int \arcsin x dx;$$

$$\Gamma) \int \frac{6}{x^2 + x + 14} dx.$$

$$1.13 \text{ a) } \int \frac{\sqrt{\ln x}}{x} dx;$$

$$\text{б) } \int \frac{\sin x}{\cos^3 x} dx;$$

$$\text{в) } \int x \operatorname{arctg} x dx;$$

$$\Gamma) \int \frac{x}{\sqrt{x + 2x - 1}} dx.$$

$$1.14 \text{ a) } \int x \sqrt{2x^2 + 1} dx;$$

$$\text{б) } \int \sin 3x \cos 7x dx;$$

$$\text{в) } \int \ln x dx;$$

$$\Gamma) \int \frac{5}{x^2 + 4x + 6} dx.$$

$$1.15 \text{ a) } \int \frac{2 \ln^2 x + 3}{x} dx;$$

$$\text{б) } \int \cos^4 3x dx;$$

$$\text{в) } \int \frac{\ln x}{x^2} dx;$$

$$\Gamma) \int \frac{1}{\sqrt{x^2 + 6x + 13}} dx.$$

$$1.16 \text{ a) } \int (1 + e^x)^{10} e^x dx;$$

$$\text{б) } \int \sin 2x \sin 9x dx;$$

$$\text{в) } \int \sqrt[5]{x} \ln x dx;$$

$$\Gamma) \int \frac{3}{\sqrt{x^2 + 4x + 13}} dx;$$

$$1.17 \text{ a) } \int \frac{\sqrt{\operatorname{arctg} x}}{1+x^2} dx;$$

$$\text{б) } \int \cos^7 x dx;$$

$$\text{в) } \int x e^{2-x} dx;$$

$$\text{г) } \int \frac{5}{x^2+10x+9} dx.$$

$$1.18 \text{ a) } \int \frac{\operatorname{arctg}^3 x}{1+x^2} \cdot dx$$

$$\text{б) } \int \cos^3 x \cdot dx;$$

$$\text{в) } \int x \ln x \cdot dx;$$

$$\text{г) } \int \frac{x}{x^2+2x+3} \cdot dx.$$

$$1.19 \text{ a) } \int \frac{3x^3}{2-x^4} \cdot dx$$

$$\text{б) } \int \sin 2x \cos 3x \cdot dx;$$

$$\text{в) } \int x \sin x \cdot dx;$$

$$\text{г) } \int \frac{x}{\sqrt{x^2+2x+3}} \cdot dx.$$

$$1.20 \text{ a) } \int \frac{3x^2 dx}{(2-x^3)^4};$$

$$\text{б) } \int \frac{\sin x dx}{1+3\cos^2 x};$$

$$\text{в) } \int (x-5) \sin 5x dx;$$

$$\text{г) } \int \frac{5}{\sqrt{x^2+8x+7}} dx.$$

$$1.21 \text{ a) } \int e^{-x^3+2} x^2 dx;$$

$$\text{б) } \int \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{4}\right) dx;$$

$$\text{в) } \int (x-2) \cdot \ln x dx;$$

$$\text{г) } \int \frac{1}{x^2+6x+7} dx.$$

$$1.22 \text{ a) } \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{2x^3-5}};$$

$$\text{б) } \int \frac{\cos^3 x dx}{\sin^2 x};$$

$$\text{в) } \int \sqrt[3]{x} \ln x dx;$$

$$\text{г) } \int \frac{5}{\sqrt{x^2+14x+40}} dx.$$

$$1.23 \text{ a) } \int \frac{3x^2 dx}{\sin^2(x^3-2)};$$

$$\text{б) } \int \frac{\sin^2 x dx}{\cos^2 x};$$

$$\text{в) } \int \arcsin 2x dx;$$

$$\text{г) } \int \frac{5}{x^2+6x+25} dx.$$

$$1.24 \text{ a) } \int x \cos(x^2+3) dx;$$

$$\text{б) } \int \frac{\sin x dx}{\cos^5 x};$$

$$\text{в) } \int (x^2+1) \cdot e^x dx;$$

$$\text{г) } \int \frac{1}{\sqrt{x^2+4x+20}} dx.$$

$$1.25 \text{ а) } \int e^{-x^3+2} x^2 dx;$$

$$\text{б) } \int \cos 2x \sin 4x dx;$$

$$\text{в) } \int x^2 \sin x dx;$$

$$1.26 \text{ а) } \int \frac{x^2 dx}{x^3 + 9};$$

$$\text{б) } \int \cos^2 2x dx;$$

$$\text{в) } \int (2x+1) \cdot e^x dx;$$

Вопросы и задания для самопроверки

1. Как определяется первообразная функции и неопределенный интеграл?
2. Привести основные формулы интегрирования табличных функций.
3. Каким свойствам удовлетворяет неопределенный интеграл? Доказать любое из свойств.
4. Замена переменных в неопределенном интеграле. Привести пример.
5. Приемы интегрирования некоторых тригонометрических выражений. Привести пример.
6. Интегрирование рациональных дробей. Схема решения. Привести пример.
7. Выведите формулу интегрирования по частям.

Глава 2. Определенный интеграл

§1. Определенный интеграл и его геометрический смысл

Пусть функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ в некотором промежутке X , а числа a и b принадлежат этому промежутку $[5,6]$.

Определение. Приращение $F(b) - F(a)$ любой из первообразных функций $F(x) + C$ при изменении аргумента от $x = a$ до $x = b$ называется **определенным интегралом** от a до b функции $f(x)$ и обозначается

$$\int_a^b f(x) dx.$$

Числа a и b называются пределами интегрирования: a – нижним, b – верхним. Отрезок $[a; b]$ называется **отрезком интегрирования**. Функция $f(x)$ называется **подынтегральной функцией**, а переменная x – **переменной интегрирования**. Таким образом, по определению

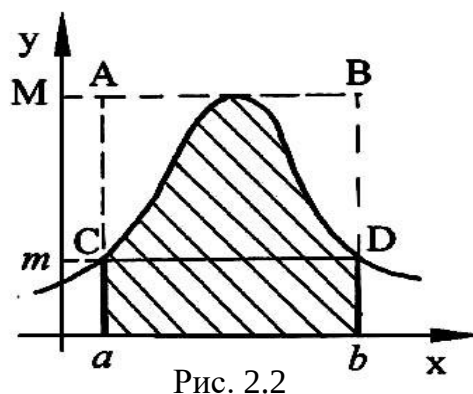
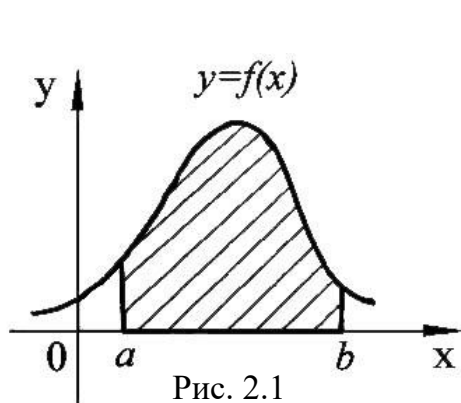
$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a). \quad (2.1)$$

Равенство (2.1) называется формулой Ньютона – Лейбница.

Существует и другой подход к введению понятия определенного интеграла, основанный на рассмотрении пределов интегральных сумм, который в большей степени приспособлен для приложений.

Рассмотрим его на примере вычисления площади криволинейной трапеции.

Пусть дана фигура, ограниченная графиком непрерывной и неот-



рицательной функции $y = f(x)$, отрезком $[a; b]$ и прямыми $x = a$, $x = b$ (рис. 2.1). Такую фигуру называют криволинейной трапецией. Найдем ее площадь.

Заметим, что на отрезке $[a; b]$ можно указать такую точку C , что площадь S криволинейной трапеции равна

$$S = f(C)(b - a). \quad (2.2)$$

Действительно, пусть M – это наибольшее значение функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$, а m – наименьшее. Проведем прямые $y = M$ и $y = m$. Тогда криволинейная трапеция целиком содержится в прямоугольнике $aABb$ и содержит целиком прямоугольник $aCDd$ (рис. 2.2).

Поэтому $S_{aCDd} < S < S_{aABb}$ или $m(b - a) < S < M(b - a)$, т.к. $S_{aCDd} = m(b - a)$, $S_{aABb} = M(b - a)$. Возьмем число $p = \frac{S}{(b - a)}$ и $m < p < M$.

На отрезке $[a; b]$ возьмем такую точку C , что $f(C) = p$. Так как функция $y = f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, то каждому значению функции p соответствует хотя бы одно значение ее аргумента C , лежащего

внутри отрезка $[a; b]$. Тогда $S = p(b - a)$. Данное свойство называется **теоремой о среднем**.

Найдем теперь площадь криволинейной трапеции S через определенный интеграл. Разобьем криволинейную трапецию на n полос так, как показано на рис. 2.3. При этом на отрезке $[a; b]$ появились точки $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$.

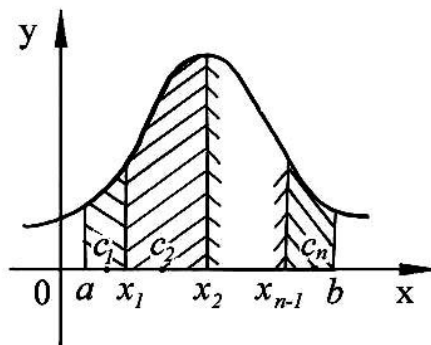


Рис. 2.3

В соответствии с формулой (2.2) найдем для первой полосы точку c_1 , $a \leq c_1 \leq x_1$ такую, что площадь первой полосы равна $f(c_1)(x_1 - a)$. Для второй полосы найдем точку c_2 , $x_1 \leq c_2 \leq x_2$ такую, что площадь полосы равна $f(c_2)(x_2 - x_1)$. Поступаем так для всех n полос, т.к. площадь криволинейной трапеции равна сумме площадей полос, на которую она разбита:

$$S = f(c_1)(x_1 - a) + f(c_2)(x_2 - x_1) + \dots + f(c_n)(b - x_{n-1}).$$

Такого типа равенство будет иметь место, как бы мы не разбивали криволинейную трапецию на полосы. Длину наибольшего из отрезков обозначим через λ . Перейдем в нем к пределу при $\lambda \rightarrow 0$, мы получим:

$$S = \lim_{\lambda \rightarrow 0} [f(c_1)(x_1 - a) + f(c_2)(x_2 - x_1) + \dots + f(c_n)(b - x_{n-1})].$$

Обозначим

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} [f(c_1)(x_1 - a) + f(c_2)(x_2 - x_1) + \dots + f(c_n)(b - x_{n-1})],$$

через выражение $\int_a^b f(x)dx$, получим

$$S = \int_a^b f(x)dx. \quad (2.3)$$

Таким образом, ввели определенный интеграл через предел особого рода сумм (**интегральных сумм**).

Определение. Пусть дана функция $f(x)$, определенная на отрезке $[a; b]$, где $a < b$. Выполним следующие операции:

1. Разобьем отрезок $[a; b]$ на n частей точками x_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$), так что $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$.

2. Величину $\lambda = \max_{i=0, \dots, n} (x_{i-1} - x_i)$ назовем шагом разбиения.

3. На каждом из отрезков $[x_{i-1}; x_i]$ зафиксируем произвольную точку C_i , $C_i \in [x_{i-1}; x_i]$.

4. Составим сумму всех произведений $f(c_i)(x_i - x_{i-1})$, $(i=1, \dots, n)$; $\sigma_n = f(c_1)(x_1 - a) + f(c_2)(x_2 - x_1) + \dots + f(c_n)(b - x_{n-1})$ или в сокращенном виде

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^n f(c_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i, \quad (2.4)$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Суммы вида (2.4) называются **интегральными суммами функции** $f(x)$.

Очевидно, что при различных разбиениях отрезка $[a; b]$ на части получим различные интегральные суммы вида (2.4). Таким образом, для данной функции $f(x)$ и данного отрезка $[a; b]$ можно составить бесконечное множество интегральных сумм вида (2.4), которые зависят от числа n и от выбора точек деления x_i и точек $C_i \in [x_{i-1}; x_i]$. В примере вычисления площади криволинейной трапеции точки C_i подбирались специально, что не противоречит определению определенного интеграла через пределы интегральных сумм.

Очевидно, что при различных разбиениях отрезка $[a; b]$ на части получим различные интегральные суммы вида (2.4). Таким образом, для данной функции $f(x)$ и данного отрезка $[a; b]$ можно составить бесконечное множество интегральных сумм вида (2.4), которые зависят от числа n и от выбора точек деления x_i и точек $C_i \in [x_{i-1}; x_i]$. В примере вычисления площади криволинейной трапеции точки C_i подбирались специально, что не противоречит определению определенного интеграла через пределы интегральных сумм.

Определение. Если при любой последовательности разбиений отрезка $[a; b]$ таких, что $\lambda = \max \Delta x_i \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ ($n \rightarrow \infty$), при любом выборе точек $C_i \in [x_{i-1}; x_i]$ интегральная сумма

$$\sigma_n = \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x_i$$

стремится к одному и тому же конечному числу A :

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma_n = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum f(c_i) \Delta x_i = A,$$

то число A называется **определенным интегралом** от функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ и обозначается $\int_a^b f(x) dx$. Итак, по определению

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(C_i) \Delta x_i. \quad (2.5)$$

Заметим без доказательств, что предел в правой части равенства (2.5) существует и конечен, если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$.

Если $f(x)$ непрерывна и неотрицательна, то определенный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ численно равен площади криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции $f(x)$, осью абсцисс и прямыми $x = a$, $x = b$ (см. рис. 2.1), т.е.

$$S = \int_a^b f(x) dx. \quad (2.6)$$

В этом заключается геометрический смысл определенного интеграла. Без доказательства заметим, что оба определения эквивалентны. Второе определение помогает получить приложение определенного интеграла (вычисление площади и т.д.), а формула Ньютона – Лейбница позволяет вычислить определенный интеграл без вычисления предела интегральной суммы.

Примем без доказательства свойства определенного интеграла [7]:

$$1. \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx, \quad c \in (a, b).$$

$$2. \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx.$$

$$3. \int_a^a f(x) dx = 0.$$

$$4. \int_a^b f(x) dx > 0, \text{ если } f(x) > 0.$$

$$5. \text{ Если } f(x) \geq g(x) \text{ при всех } x \in [a; b], \text{ то}$$

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$$

6. Если $m \leq f(x) \leq M$ при всех x из промежутка $[a; b]$, то

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

7. Теорема о среднем. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то на этом отрезке существует по крайней мере одна точка c такая, что

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c).$$

Доказательство: В соответствии со свойством 6:

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq M,$$

т.к. функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то по второй теореме Вейерштрасса она принимает на этом отрезке все значения от m до M (см. рис. 2.4). Другими словами, существует такое число $c \in [a, b]$, что если

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx = C \text{ и } C = f(c),$$

а $a \leq c \leq b$, тогда

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)f(c).$$

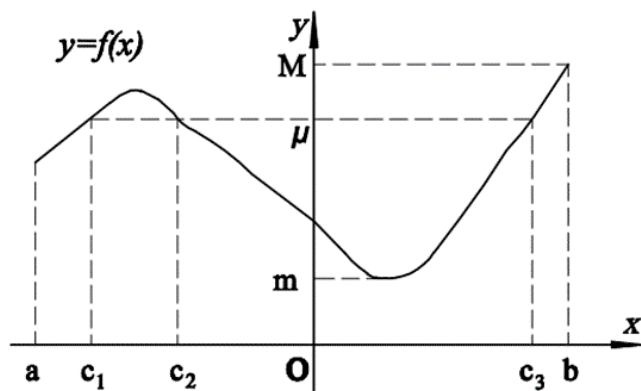


Рис. 2.4

Что и требовалось доказать.

Замечание. С геометрической точки зрения теорема утверждает, что существует прямоугольник, равновеликий криволинейной трапеции, имеющий равное с ней основание (если $f(x) > 0$ для любого x из отрезка $[a, b]$).

Докажем связь неопределенного интеграла с определенным. Другими словами, докажем эквивалентность двух определений определенного интеграла.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$. Величина определенного интеграла от этой функции $\int_a^b f(x) dx$ будет зависеть от a и b . Если зафиксировать

значение a , то величина $\int_a^b f(x) dx$ будет зависеть только от b . Зафикси-

руем нижний предел интегрирования a , а верхний будем считать переменным. Чтобы подчеркнуть переменность верхнего предела интегрирования, обозначим его x . Величина определенного интеграла, как уже было отмечено, не зависит от обозначения переменной интегрирования, поэтому, чтобы не путать её с верхним пределом, заменим переменную x внутри интеграла на t .

Таким образом, получим функцию $\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$. Она называется *определенным интегралом с переменным верхним пределом*.

Теорема (о производной интеграла с переменным верхним пределом). Пусть интегрируемая на отрезке $[a, b]$ функция $f(x)$ непрерывна в точке $x \in [a, b]$. Тогда $\Phi'(x) = f(x)$, где

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Доказательство. По определению производной

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x}.$$
$$\Phi(x + \Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t) dt = \int_a^x f(t) dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt = \Phi(x) + \int_x^{x+\Delta x} f(t) dt.$$

Здесь мы воспользовались свойством 1 аддитивности определенного интеграла. Отсюда по теореме о среднем значении

$$\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt = f(c)\Delta x,$$

где c – между x и $x + \Delta x$. Следовательно,

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(c)\Delta x}{\Delta x} = f(x),$$

так как $c \rightarrow x$, когда $\Delta x \rightarrow 0$. Что и требовалось доказать.

Теорема. Для всякой функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a, b]$, существует на этом отрезке первообразная, а значит, существует неопределенный интеграл.

Теорема (Теорема Ньютона – Лейбница).

Если функция $F(x)$ – какая-либо первообразная от непрерывной функции $f(x)$, то

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Это выражение известно под названием формулы Ньютона – Лейбница.

Доказательство: Пусть $F(x)$ – первообразная функции $f(x)$. Тогда в соответствии с приведенной выше теоремой, функция $\int_a^x f(t)dt$ – первообразная функция от $f(x)$. Но т.к. функция может иметь бесконечно много первообразных, которые будут отличаться друг от друга только на какое-то постоянное число C , то

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) + C.$$

При соответствующем выборе C это равенство справедливо для любого x , т.е. при $x = a$:

$$\int_a^a f(t)dt = F(a) + C.$$

По свойству 3:

$$0 = F(a) + C.$$

Откуда

$$C = -F(a).$$

Тогда

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a).$$

А при $x = b$:

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a).$$

Заменив переменную t на переменную x , получаем формулу Ньютона – Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Что и требовалось доказать.

Иногда применяют обозначение $F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b$.

Замечание. Следует обратить внимание на важность сформулированного в теореме требования непрерывности функции $y = f(x)$ на всем отрезке интегрирования. Небрежное применение формулы Ньютона-Лейбница может привести к заведомо неверному результату.

Пример. Вычислить $\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$ и $\int_{-4}^{-3} \frac{dx}{x^2}$.

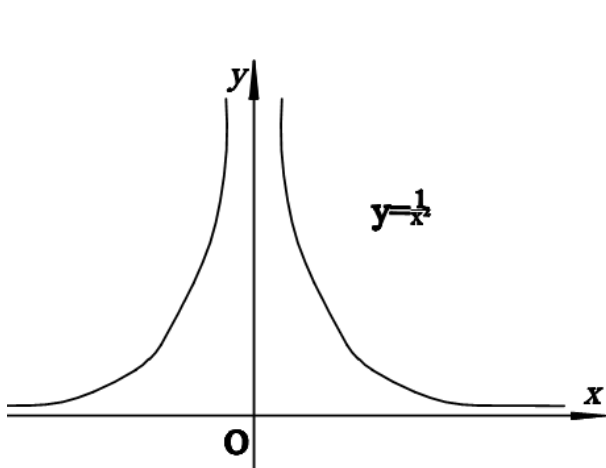


Рис. 2. 5

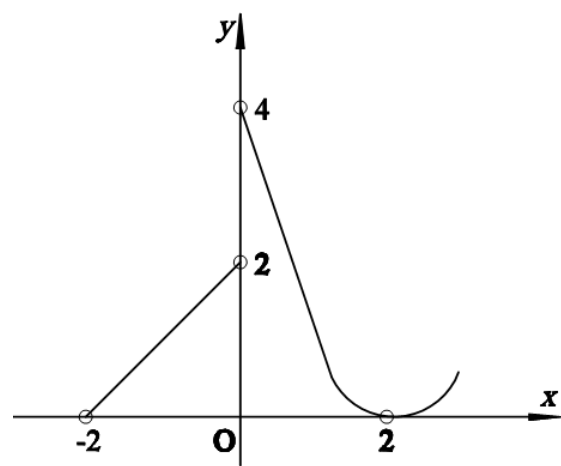


Рис. 2. 6

Решение. Если использовать для вычисления первого интеграла формулу Ньютона – Лейбница, то получается, что

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \left. \frac{-1}{x} \right|_{-1}^1 = -2 < 0.$$

Но подынтегральная функция $y = \frac{1}{x^2} > 0$, поэтому полученный результат противоречит свойству 4 определённого интеграла. Причина этого в том, что функция $y = \frac{1}{x^2}$ имеет в точке $x = 0 \in [-1, 1]$ разрыв второго рода (рис. 2.5), то есть не является на отрезке $[-1, 1]$ интегрируемой, а, значит, формулу Ньютона-Лейбница применить здесь нельзя.

Но для любого $x \in [-4, -3]$ она непрерывна, поэтому для вычисления второго интеграла формулу Ньютона – Лейбница применить можно:

$$\int_{-4}^{-3} \frac{dx}{x^2} = \left. \frac{-1}{x} \right|_{-4}^{-3} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

Пример. Вычислить $\int_{-2}^2 f(x)dx$ от функции, заданной на отрезке $[-2; 2]$ двумя аналитическими выражениями:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & -2 \leq x < 0; \\ (x - 2)^2, & 0 \leq x < 2. \end{cases}$$

Для вычисления такого интеграла надо воспользоваться свойством 1 аддитивности определённого интеграла:

$$\int_{-2}^0 f(x)dx = \int_{-2}^0 (x + 2)dx + \int_0^2 (x - 2)^2 dx = \left. \frac{(x + 2)^2}{2} \right|_{-2}^0 + \left. \frac{(x - 2)^3}{3} \right|_0^2 = 2 + \frac{8}{3} = \frac{14}{3}.$$

Формула Ньютона – Лейбница представляет собой общий подход к нахождению определённых интегралов.

Перейдем теперь к правилам вычисления определённых интегралов. Эти правила аналогичны правилам вычисления неопределённых интегралов [8].

$$1. \int_a^b k f(x) dx = k \int_a^b f(x) dx, \quad (k - \text{постоянная}).$$

$$2. \int_a^b [f(x) \pm g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx \pm \int_a^b g(x) dx.$$

3. Интегрирование по частям

$$\int_a^b u(x) dv(x) = u(x)v(x)|_a^b - \int_a^b v(x) du(x).$$

4. Замена переменной (подстановка) $x = \varphi(t)$ делается по формуле

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t))(\varphi'(t)) dt,$$

где $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ (f , φ и φ' непрерывны).

Пример 1. Вычислить $\int_1^4 \left(1 + 5x + \frac{3\sqrt{x}}{2}\right) dx$.

Решение. Используя правила 1 и 2, представим определенный интеграл в виде суммы трех более простых интегралов, к каждому из которых применим формулу Ньютона – Лейбница

$$\begin{aligned} \int_1^4 \left(1 + 5x + \frac{3\sqrt{x}}{2}\right) dx &= \int_1^4 dx + 5 \int_1^4 x dx + \frac{3}{2} \int_1^4 x^{\frac{1}{2}} dx = \\ &= x|_1^4 + 5 \frac{x^2}{2} \Big|_1^4 + \frac{3}{2} \frac{x^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \Big|_1^4 = x|_1^4 + \frac{5}{2} x^{\frac{3}{2}} \Big|_1^4 + x^{\frac{3}{2}} \Big|_1^4 = \\ &= (4-1) + \frac{5}{2} (4^2 - 1^2) + \left(4^{\frac{3}{2}} - 1^{\frac{3}{2}}\right) = 3 + \frac{75}{2} + 7 = \frac{95}{2}. \end{aligned}$$

Пример 2. Вычислить $\int_0^1 x \operatorname{arctg} x dx$.

Решение. Положим $u = \operatorname{arctg} x$, $dv = x dx$, тогда

$$du = (\operatorname{arctg} x)' dx = \frac{1}{1+x^2} dx, v = \int x dx = \frac{x^2}{2}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (x \operatorname{arctg} x) dx &= \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{1+x^2} dx = \\
&= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} 1 - \frac{0^2}{2} \operatorname{arctg} 0 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx = \\
&= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{x^2+1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1} \right) dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx = \\
&= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{x^2+1} \right) dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \int_0^1 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = \\
&= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} x \Big|_0^1 + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{\pi}{8} - 0 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

Пример 3. Вычислить $\int_0^4 x \sqrt{x^2 + 9} dx$.

Решение. Сделаем замену $t = x^2 + 9$, тогда $dt = d(x^2 + 9)$, $dt = (x^2 + 9)' dx$, $dt = 2x dx$, $dx = \frac{dt}{2x}$. Новые пределы интегрирования находим из соотношения $t = x^2 + 9$; если $x = 0$, то $t = 0^2 + 9 = 9$, если $x = 4$, то $t = 4^2 + 9 = 25$.

Поэтому

$$\begin{aligned}
\int_0^4 x \sqrt{x^2 + 9} dx &= \int_9^{25} x \sqrt{t} \frac{dt}{2x} = \frac{1}{2} \int_9^{25} \sqrt{t} dt = \frac{1}{2} \int_9^{25} t^{\frac{1}{2}} dt = \\
&= \frac{1}{2} \frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \Big|_9^{25} = \frac{1}{2} \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \Big|_9^{25} = \frac{1}{3} \left(25^{\frac{3}{2}} - 9^{\frac{3}{2}} \right) = \frac{1}{3} \left(5^{2+\frac{3}{2}} - 3^{2+\frac{3}{2}} \right) = \\
&= \frac{1}{3} (5^3 - 3^3) = \frac{1}{3} (125 - 27) = \frac{98}{3}.
\end{aligned}$$

Пример 4. Вычислить $\int_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x \sqrt{1 - (\ln x)^2}}$.

Решение. Сделаем замену $t = \ln x$, тогда $dt = d \ln x$, $dt = (\ln x)' dx$, $dt = \frac{1}{x} dx$, $dx = x dt$. Новые пределы интегрирования находим из соотношения $t = \ln x$; если $x = 1$, то $t = \ln 1 = 0$, если $x = \sqrt{e}$, то

$t = \ln \sqrt{e} = \frac{1}{2} \ln e = \frac{1}{2}$. Таким образом, изменению переменной от $x = 1$ до

$x = \sqrt{e}$ соответствует изменение переменной t от $t = 0$ до $t = \frac{1}{2}$. По-

этому

$$\int_1^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-(\ln x)^2}} = \int \frac{x dt}{x\sqrt{1-t^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \arcsin t \Big|_0^{\frac{1}{2}} = \arcsin \frac{1}{2} - \arcsin 0 = \\ = \frac{\pi}{6} - 0 = \frac{\pi}{6}.$$

Пример 5. Вычислить $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{2 \sin x dx}{(1 - \cos x)^2}$.

Решение. Положим $1 - \cos x = t$, тогда $dt = (1 - \cos x)' dx$, $dt = \sin x dx$, $dx = \frac{dt}{\sin x}$. Новые пределы интегрирования находим из со-

отношения $t = 1 - \cos x$: если $x = \frac{\pi}{2}$, то $1 - \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 - 0 = 1$, если $x = \pi$, то $t = 1 - \cos \pi = 1 - (-1) = 2$. Таким образом, изменению переменной x от $x = \frac{\pi}{2}$ до $x = \pi$ соответствует изменение переменной t от $t = 1$ до $t = 2$. Следовательно,

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{2 \sin x dx}{(1 - \cos x)^2} = \int_1^2 \frac{2 \sin x \frac{dt}{\sin x}}{t^2} = 2 \int_1^2 \frac{dt}{t^2} = 2 \int_1^2 t^{-2} dt = 2 \frac{t^{-2+1}}{-2+1} \Big|_1^2 = 2 \frac{t^{-1}}{-1} \Big|_1^2 = \\ = -2 \left(\frac{1}{2} - 1 \right) = -2 \left(-\frac{1}{2} \right) = 1.$$

Пример 6. Вычислить $\int_0^7 \frac{dx}{\sqrt[3]{(8-x)^2}}$.

Решение. Положим $8 - x = t$, тогда $dt = (8 - x)' dx$, $dt = -1 dx$, $dx = -dt$. Новые пределы интегрирования находим из соотношения

$t = 8 - x$, если $x = 0$, то $t = 8 - 0 = 8$, если $x = 7$, то $t = 8 - 7 = 1$. Таким образом, изменению переменной x от $x = 0$ до $x = 7$ соответствует изменение переменной t от $t = 8$ до $t = 1$, следовательно:

$$\int_0^7 \frac{dx}{\sqrt[3]{(8-x)^2}} = \int_8^1 -\frac{dt}{\sqrt[3]{t^2}} = -\int_8^1 t^{-\frac{2}{3}} dt = -\frac{t^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1} \Big|_8^1 = -\frac{t^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} \Big|_8^1 =$$

$$-3\sqrt[3]{t} \Big|_8^1 = -3(\sqrt[3]{1} - \sqrt[3]{8}) = -3(1-2) = 3.$$

Задания для решения в аудитории

1. $\int_1^2 (x^2 + \frac{1}{x^4}) dx.$

2. $\int_0^{\pi/4} \sin 4x dx.$

3. $\int_0^1 \frac{dx}{(2x+1)^2}.$

4. $\int_{-1}^7 \sqrt{x+2} dx.$

5. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x dx}{\sqrt{4 - \sin^2 x}}.$

6. $\int_0^1 (x^4 + 1)^5 \cdot x^3 dx.$

7. $\int_1^e \frac{dx}{x(4 + \ln^2 x)}.$

8. $\int_0^1 x^2 e^{1-x^3} dx.$

9. $\int_0^{\pi/2} x^2 \cos x dx.$

10. $\int_0^{\pi/2} x \cdot \cos x dx.$

11. $\int_4^9 \left(3\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} \right) dx.$

12. $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2} dx.$

13. $\int_0^{\pi/4} \cos^2 x \sin^2 x dx.$

14. $\int_0^{\pi} \sin \frac{x}{2} \cos \frac{3x}{2} dx.$

Ответы

1. $\frac{21}{8}$. 2. $\frac{1}{2}$. 3. $\frac{1}{3}$. 4. $\frac{52}{3}$. 5. $\frac{\pi}{6}$. 6. $\frac{21}{8}$. 7. $\frac{1}{2} \arctg \frac{1}{2}$. 8. $\frac{1}{3}(e-1)$.

9. $\frac{\pi^2}{4} - 2$. 10. $-0,1 \cdot \ln 4$. 11. 40. 12. $1 - \frac{2}{e}$. 13. $\frac{\pi}{32}$. 14. 0.

Индивидуальные задания

Вычислить определенные интегралы:

$$1. 1) \int_{-1}^2 (x^2 - 1)^3 x dx;$$

$$2) \int_0^{\pi} \frac{\sin x dx}{2 - \cos x};$$

$$3) \int_0^{\pi} (\cos^4 x - \sin^4 x) dx$$

$$3. 1) \int_1^{\sqrt{3}} \frac{128x dx}{(x^2 + 1)^5};$$

$$2) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arcsin x dx}{\sqrt{1 - x^2}};$$

$$3) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cos x dx.$$

$$5. 1) \int_0^1 \frac{6x^2 dx}{1 + 2x^3};$$

$$2) \int_0^1 x e^{x^2} dx;$$

$$3) \int_1^e \frac{dx}{x(1 + \ln^2 x)}.$$

$$7. 1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{2 + \sin x};$$

$$2) \int_6^7 (x - 5)^2 dx;$$

$$3) \int_0^1 x(x^2 + 3)^4 dx.$$

$$2. 1) \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x dx}{2\sqrt{1 + x^2}};$$

$$2) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\operatorname{tg} x dx}{\cos^2 x};$$

$$3) \int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{\ln x + 1}}.$$

$$4. 1) \int_2^3 \frac{15x dx}{(x^2 - 1)^3};$$

$$2) \int_0^{\sqrt{\pi}} x \sin x^2 dx;$$

$$3) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{tg} x dx}{\sin^2 x}.$$

$$6. 1) \int_0^{\pi} \frac{\sin x dx}{3 - \cos x}$$

$$2) \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx;$$

$$3) \int_0^1 (x^2 + 3)^2 dx.$$

$$8. 1) \int_0^1 \frac{x^2}{1 + x^3} \cdot dx;$$

$$2) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt[5]{\cos x} \sin x \cdot dx;$$

$$3) \int_0^1 \frac{e^x}{1 + e^x} \cdot dx.$$

$$9. 1) \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos^3 x \cdot dx;$$

$$2) \int_{-0,25\pi}^{0,25\pi} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} \cdot dx;$$

$$3) \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x \sin x^2 \cdot dx.$$

$$10. 1) \int_0^1 \frac{e^x dx}{e^x + 5};$$

$$2) \int_1^2 (x^5 + x)^2 dx;$$

$$3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sin x \cdot dx.$$

$$11.1) \int_0^{\frac{\pi}{3}} e^{\cos x} \sin x dx;$$

$$2) \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx;$$

$$3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x dx}{\sqrt{2 \sin x + 1}}.$$

$$12. 1) \int_0^1 3e^{x^3} x^2 dx;$$

$$2) \int_0^1 (x+2)^2 dx;$$

$$3) \int_{-\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 4x dx.$$

$$13. 1) \int_1^2 \frac{dx}{x^2 + 4};$$

$$2) \int_0^1 x e^{x^2} dx;$$

$$3) \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{ctg} x dx$$

$$14. 1) \int_0^1 (x+3)^2 dx;$$

$$2) \int_0^1 (x^2 + 1)x dx;$$

$$3) \int_0^{\ln 3} \frac{e^x dx}{1+e^x}.$$

$$15. 1) \int_0^{\frac{\pi}{12}} \frac{dx}{\sin^2 2x};$$

$$2) \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} dx;$$

$$16. 1) \int_0^4 x \sqrt{x^2 + 9} dx;$$

$$2) \int_1^2 (x+1)^2 \cdot x dx;$$

- $$3) \int_{\sqrt{\frac{\pi}{6}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} \frac{x dx}{\sin^2 x^2}.$$
- $$17. 1) \int_0^1 \frac{6x^2 dx}{1+2x^3};$$
- $$2) \int_0^1 x e^{x^2} dx;$$
- $$3) \int_1^e \frac{dx}{x(1+\ln^2 x)}.$$
- $$19. 1) \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos^3 x \cdot dx;$$
- $$2) \int_{-0,25\pi}^{0,25\pi} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} \cdot dx;$$
- $$3) \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x \sin x^2 \cdot dx.$$
- $$21. 1) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{(1+5 \operatorname{tg} x) dx}{\cos^2 x};$$
- $$2) \int_0^1 \frac{x^3 dx}{1+x^4};$$
- $$3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin x dx.$$
- $$23. 1) \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} \frac{x^2 dx}{(1+x^3)^4};$$
- $$2) \int_{-\frac{\pi}{6}}^0 (x+2) \sin 3x dx;$$
- $$3) \int_0^1 \frac{12x^2 dx}{1+4x^3}.$$
- $$18. 1) \int_{-\frac{\pi}{2}}^0 \cos^3 x \cdot dx$$
- $$2) \int_{-0,25\pi}^{0,25\pi} \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2} \cdot dx;$$
- $$3) \int_0^{\sqrt{\frac{\pi}{2}}} x \sin x^2 \cdot dx.$$
- $$20. 1) \int_0^{\ln 2} \frac{e^x dx}{3(1-2e^x)};$$
- $$2) \int_0^{\pi} \sqrt{\cos x} \sin x dx;$$
- $$3) \int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^0 \frac{x dx}{6\sqrt{1-x^2}}.$$
- $$22. 1) \int_0^{\sqrt{3}} \frac{x dx}{x^2+1};$$
- $$2) \int_0^1 \frac{3x^2 dx}{1+x^3};$$
- $$3) \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \cos 2x dx$$
- $$24. 1) \int_1^{-2} \frac{x dx}{(1+x^2)^4};$$
- $$2) \int_1^e x^3 \ln x dx;$$

$$3) \int_0^1 \frac{dx}{25x^2 - 10x + 10}.$$

$$25. 1) \int_{-1}^0 x^3(1-x^4)^5 dx;$$

$$2) \int_0^1 (3x+4) \cdot e^{3x} dx;$$

$$3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin x dx.$$

$$3) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{(2 + \operatorname{tg} x) dx}{\cos^2 x}.$$

$$26. 1) \int_{\sqrt[4]{\pi/4}}^{\sqrt[4]{\pi/3}} \frac{x^3 dx}{\sin^2 x^4}$$

$$2) \int_{-3}^0 (3+x) \cdot e^{-3x} dx;$$

$$3) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \sin^2 x dx$$

Контрольная работа по теме «Определённый интеграл»

Вычислить интегралы

$$1. a) \int_0^1 \left(3x^2 - x\sqrt{x} + \frac{3}{x^2 + 5} \right) dx;$$

$$б) \int_4^9 \frac{y-1}{\sqrt{y}+1} dy;$$

$$в) \int_0^{\pi} (x + \pi) \sin x dx.$$

$$3. a) \int_0^1 (\sqrt{x} - 2)^2 dx;$$

$$б) \int_1^{\frac{1}{2}} \frac{e^y}{y^2} dy;$$

$$в) \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{x dx}{\sin^2 x}.$$

$$5. a) \int_1^2 \left(x + \frac{1}{x} \right)^2 dx;$$

$$б) \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3};$$

$$в) \int_1^e x^3 \cdot \ln x dx.$$

$$2. a) \int_0^1 \left(3x^5 - 9\sqrt{x^7} + \frac{5}{x+4} \right) dx;$$

$$б) \int_1^e \frac{\ln^3 y + 3}{y} dy;$$

$$в) \int_0^{\pi/2} \left(x - \frac{\pi}{2} \right) \sin x dx.$$

$$4. a) \int_1^2 \left(\frac{4+3x^2-2x^3}{x^2} + \frac{1}{x+2} \right) dx;$$

$$б) \int_0^1 \frac{x^2}{(2x^3+1)^5} dx;$$

$$в) \int_0^1 (4-3x)e^{-3x} dx.$$

$$6. a) \int_{-1}^1 \left(4x^3 - 5\sqrt[3]{x^2} + \frac{2}{x^2+2} \right) dx;$$

$$б) \int_0^1 \frac{3 - \operatorname{arctg}^3 x}{1+x^2} dx;$$

$$в) \int_0^{\pi/2} (2x - \pi) \sin 2x dx.$$

$$7. \text{ a) } \int_0^3 \left(3x^2 - \sqrt{x^3} + \frac{5}{x^2 - 4} \right) dx;$$

$$\text{б) } \int_1^e \frac{\ln^2 x + 2}{x} dx;$$

$$\text{в) } \int_0^{\pi/2} (x - \pi) \cos 2x dx.$$

$$9. \text{ a) } \int_1^2 \frac{x^3 - 3x^2 + 4}{x^2} dx;$$

$$\text{б) } \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arccos^2 x}{\sqrt{1-x^2}} dx;$$

$$\text{в) } \int_0^1 e^{2x} (2x - 3) dx.$$

$$11. \text{ a) } \int_0^2 \left(4x^3 - 2^x + \frac{5}{x^2 + 4} \right) dx;$$

$$\text{б) } \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg}^3 x}{1+x^2} dx;$$

$$\text{в) } \int_0^{\pi/2} (2x + 1) \cos 3x dx.$$

$$13. \text{ a) } \int_0^1 \left(6x^5 - 5\sqrt{x^3} + \frac{5}{x^2 - 4} \right) dx;$$

$$\text{б) } \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{\arcsin^3 x}{1-x^2}} dx;$$

$$\text{в) } \int_0^1 e^{3x} (3 - 2x) dx.$$

$$15. \text{ a) } \int_0^1 \left(\frac{3}{x+1} - 5x\sqrt{x} + \frac{2}{x^2 - 9} \right) dx;$$

$$\text{б) } \int_0^1 \frac{x}{2x^2 + 5} dx;$$

$$8. \text{ a) } \int_0^1 \left(\left(\sqrt{x^3} + 4 \right)^2 + \frac{3}{x^2 + 2} \right) dx;$$

$$\text{б) } \int_0^1 \frac{x^3}{x^8 + 16} dx;$$

$$\text{в) } \int_0^1 (\pi - 2x) \cos \frac{\pi}{2} x dx.$$

$$10. \text{ a) } \int_0^1 \left(5x^4 + 7\sqrt{x^5} + \frac{2}{x^2 + 9} \right) dx;$$

$$\text{б) } \int_0^1 \frac{e^x}{(2e^x + 5)^2} dx;$$

$$\text{в) } \int_1^e (3x^2 + 4x) \ln x dx.$$

$$12. \text{ a) } \int_1^2 \left(\frac{2x^2 - 5xe^x + 1}{x} + \frac{1}{3-x^2} \right) dx;$$

$$\text{б) } \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(2 \sin x + 1)^2} dx;$$

$$\text{в) } \int_1^e (2 - 3x^2) \ln x dx.$$

$$14. \text{ a) } \int_1^4 \left(\frac{(2x+1)^2}{x} - \frac{1}{x^2 - 2} \right) dx;$$

$$\text{б) } \int_0^1 \frac{x}{(3x^2 - 2)^3} dx;$$

$$\text{в) } \int_0^1 (3x - 2) e^{5x} dx.$$

$$16. \text{ a) } \int_1^8 \left(\left(2\sqrt[3]{x} - 1 \right)^3 + \frac{2}{\sqrt{2-x^2}} \right) dx;$$

$$\text{б) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x e^{3 \sin x - 2} dx;$$

$$\text{B)} \int_1^e (x^5 + 1) \ln x \, dx.$$

$$17. \text{ a)} \int_1^2 \left(\frac{x^2 - 5}{x^2} + 2x - 2 \right) dx;$$

$$\text{б)} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - 2 \sin x}{\sin^3 x} dx;$$

$$\text{B)} \int_0^1 (5 - x) e^{-2x} dx.$$

$$19. \text{ a)} \int_1^4 \left(\frac{(2 - x)^2}{x\sqrt{x}} - \frac{3}{x+1} \right) dx;$$

$$\text{б)} \int_0^1 \frac{x}{(x^2 + 2)^2} dx;$$

$$\text{B)} \int_0^1 (x + \pi) \sin \frac{\pi x}{2} dx.$$

$$21. \text{ a)} \int_1^2 \left(2x - \frac{4}{x^2} + \ln 2 \cdot 2^x \right) dx;$$

$$\text{б)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(\sin x + 1)^2} dx;$$

$$\text{B)} \int_1^e (\sqrt[3]{x} - 2) \ln x \, dx.$$

$$23. \text{ a)} \int_0^1 \left(4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt{x} + \frac{2}{x^2 + 16} \right) dx;$$

$$\text{б)} \int_0^2 \frac{y^2}{\sqrt{y^3 + 1}} dy;$$

$$\text{B)} \int_0^{\pi} (3x - \pi) \cos x \, dx.$$

$$25. \text{ a)} \int_0^1 \left((x\sqrt{x} + 2)^2 + \frac{1}{x^2 + 1} \right) dx;$$

$$\text{B)} \int_1^e (\sqrt{x} + 1) \ln x \, dx.$$

$$18. \text{ a)} \int_0^1 \left(4x - 10\sqrt{x^3} + \frac{x+3}{x+1} \right) dx;$$

$$\text{б)} \int_0^1 \frac{y-4}{(y^2 + 3)} dy;$$

$$\text{B)} \int_0^{\pi} (3x - \pi) \cos \frac{1}{2} x \, dx.$$

$$20. \text{ a)} \int_0^1 \left((3\sqrt{x} - 2)^2 + \frac{x^2}{x^2 - 5} \right) dx;$$

$$\text{б)} \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{(\cos x + 2) dx}{\sin^2 x};$$

$$\text{B)} \int_1^e \frac{1 - \ln x}{\sqrt[3]{x^2}} dx.$$

$$22. \text{ a)} \int_1^2 \left(\frac{(x^2 + 2)^2}{x^3} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) dx;$$

$$\text{б)} \int_1^e \frac{\ln^5 y + 3}{y} dy;$$

$$\text{B)} \int_0^{\pi} \left(3x + \frac{\pi}{2} \right) \cos \frac{x}{2} dx.$$

$$24. \text{ a)} \int_0^1 \left(2\sqrt{x} - \frac{3 - \sqrt{x^2 + 2}}{x^2 + 2} + 3^x \right) dx;$$

$$\text{б)} \int_0^1 \frac{\sqrt[3]{\arctg^4 x}}{1 + x^2} dx;$$

$$\text{B)} \int (5x - 2) e^{-5x} dx.$$

$$26. \text{ a)} \int_{-1}^0 \left(x^3 + \frac{4}{(1 + x^2)} \right) dx;$$

$$\text{б)} \int_{-1}^1 \frac{2y + \operatorname{arctg}^5 y}{y^2 + 1} dy;$$

$$\text{в)} \int_{\pi/4}^{\pi/3} \frac{x dx}{\cos^2 x}.$$

$$\text{б)} \int_0^1 x e^x dx$$

$$\text{в)} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{(2 + \operatorname{tg} x) dx}{\cos^2 x}$$

§2. Вычисление площадей плоских фигур

В этом параграфе при помощи интегрального исчисления будет решен ряд задач.

Площадь S фигуры, ограниченной графиком функции $y = f(x)$ (сверху), $y = g(x)$ (снизу) и прямыми $x = a$, $x = b$, подсчитывается по формуле

$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)] dx. \quad (2.7)$$

Действительно, в силу геометрического смысла определенного интеграла (см. равенство (2.7)) имеем (рис. 2.5)

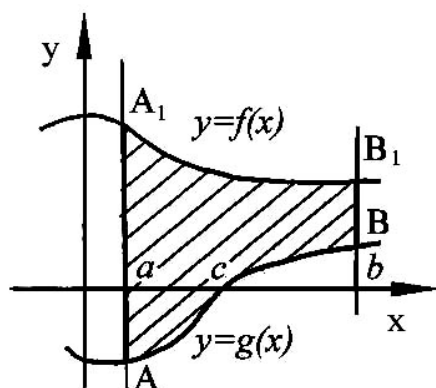


Рис. 2.5

$$\int_a^b f(x) dx = S_{(aA_1B_1b)}$$

$$\text{и } \int_a^b g(x) dx = S_{(cBd)} - S_{(aAc)},$$

ПОЭТОМУ

$$\begin{aligned} \int_a^b [f(x) - g(x)] dx &= \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx = \\ &= S_{(aA_1B_1b)} - S_{(cBb)} + S_{(aAc)} = S \end{aligned}$$

как это видно из рисунка.

Рассмотрим частные случаи вычисления площадей плоских фигур в **прямоугольных координатах**.

а) если фигура представляет из себя **криволинейную трапецию** расположенную выше оси Ox , т. е. $f(x) > 0$:

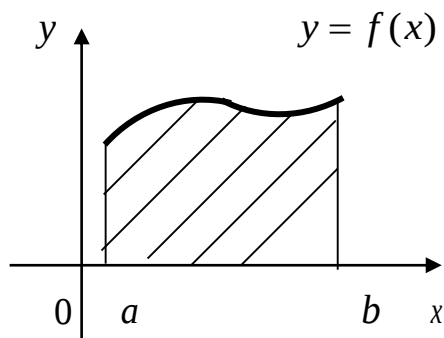


Рис. 2.6

$$S_{\phi} = S_{кр.тр.} = \int_a^b f(x) dx;$$

б) если криволинейная трапеция расположена ниже оси Ox , т.е. $f(x) < 0$ тогда исходя из **свойств определенного интеграла**:

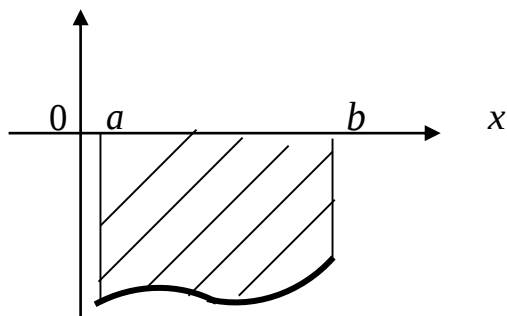


Рис. 2.7

$$y = f(x)$$

$$S_{\phi} = - \int_a^b f(x) dx.$$

в) если плоская фигура имеет сложную форму, т.е. прямые $x = a$; $x = b$ «вырождаются» в точки, то фигуру следует разбить на части так, чтобы можно было применить известные формулы.

Проиллюстрируем **некоторые** возможные варианты:

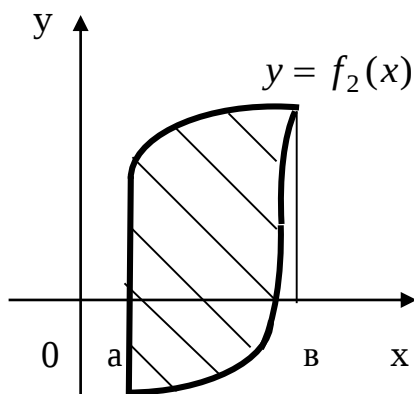


Рис. 2.8

$$S_{\phi} = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x)) dx;$$

г)

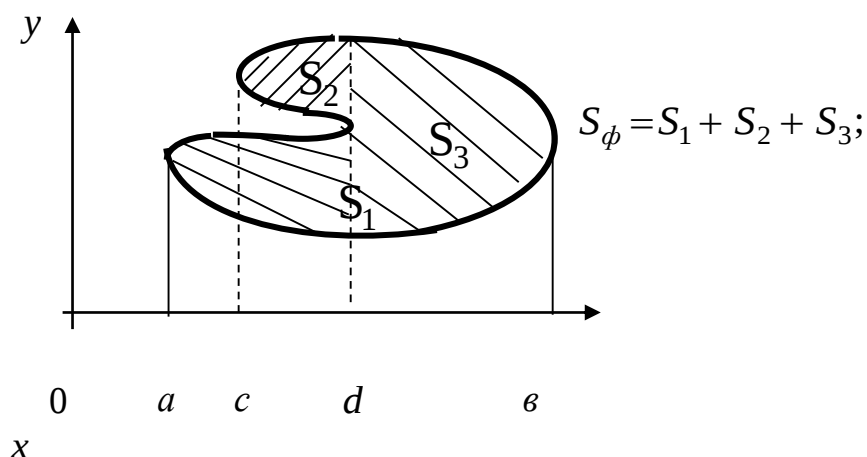


Рис. 2.9

д) если криволинейная трапеция ограничена прямыми $y=c$ и $y=d$, осью Oy и непрерывной кривой $x=\varphi(y)$, то $\Rightarrow$

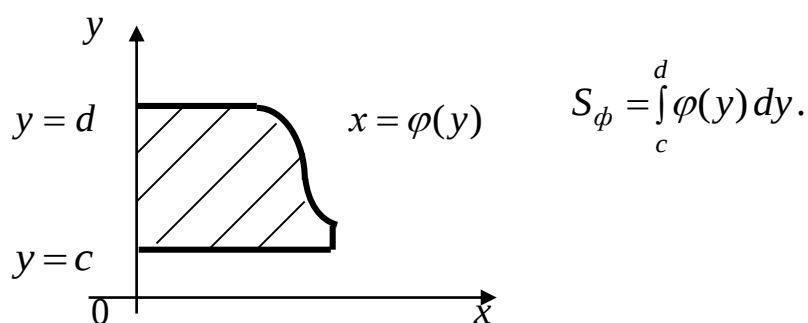


Рис. 2.10

Пример 1. Вычислить площадь между параболом $y = 4x - x^2$ и $y = x^2 - 6$ (рис. 2.11).

Решение. Сначала найдем точки пересечения парабол, для чего решим систему уравнений

$$\begin{cases} y = 4x - x^2; \\ y = x^2 - 6, \end{cases}$$

т.е. найдем точки на плоскости, координаты которых удовлетворяют одновременно уравнениям обеих парабол. Из этой системы

$$x^2 - 6 = 4x - x^2, \quad 2x^2 - 4x - 6 = 0, \quad x^2 - 2x - 3 = 0$$

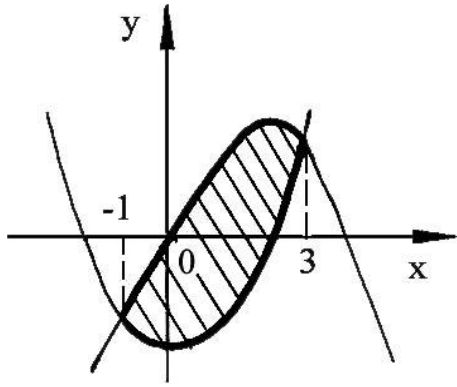


Рис. 2.11

$$\text{и } x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{2^2 - 4(-3)}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \text{ или } x_1 = -1; x_2 = 3.$$

Тогда по формуле (2.7) искомая площадь S будет равна:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-1}^3 [(4x - x^2) - (x^2 - 6)] dx = \int_{-1}^3 [6 + 4x - 2x^2] dx = \left[6x + 2x^2 - \frac{2}{3}x^3 \right]_{-1}^3 = \\ &= \left[6 \cdot 3 + 2 \cdot 3^2 - \frac{2}{3} \cdot 3^3 \right] - \left[6 \cdot (-1) + 2 \cdot (-1)^2 - \frac{2}{3} \cdot (-1)^3 \right] = 18 - \left[-\frac{10}{3} \right] = \\ &= 18 + \frac{10}{3} = 64. \end{aligned}$$

Пример 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2$, $y = \frac{1}{x^2}$, $y = 0$, $x = 2$ ($x \geq 0$).

Решение. Сначала найдем точки пересечения кривых $y = x^2$ и $y = \frac{1}{x^2}$, для чего решим систему уравнений

$$\begin{cases} y = x^2; \\ y = \frac{1}{x^2}. \end{cases}$$

Из этой системы $x^2 = \frac{1}{x^2}$, $x^4 = 1$ или

$$x_1 = -1, x_2 = 1.$$

Таким образом, заданная фигура (рис. 2.12) является криволинейной трапецией, ограниченной сверху графиком функции

$$f(x) = \begin{cases} y = x^2, & 0 \leq x < 1, \\ y = \frac{1}{x^2}, & 1 \leq x \leq 2. \end{cases}$$

По формуле (2.17)

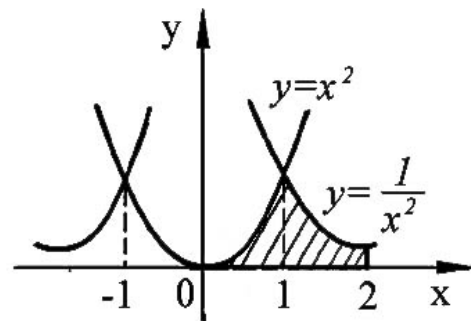


Рис. 2.12

$$S = \int_0^2 f(x) dx = \int_0^1 x^2 dx + \int_1^2 \frac{dx}{x^2} = \frac{x^{2+1}}{2+1} \Big|_0^1 + \int_1^2 x^{-2} dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} \Big|_1^2 =$$

$$= \left(\frac{1}{3} - 0 \right) + \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_1^2 = \frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{2} - \frac{-1}{1} \right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{5}{6}.$$

Пример 3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sin x$, $y = 2 \sin x$, $x = \frac{5}{4}\pi$, $x = 0$.

Решение. Искомая площадь S равна сумме площадей S_1 и S_2 двух фигур, первая из которых ограничена линиями $y = \sin x$, $y = 2 \sin x$, $x = 0$, $x = \pi$, вторая ограничена линиями $y = \sin x$, $y = 2 \sin x$, $x = \pi$, $x = \frac{5}{4}\pi$ (рис. 2.13).

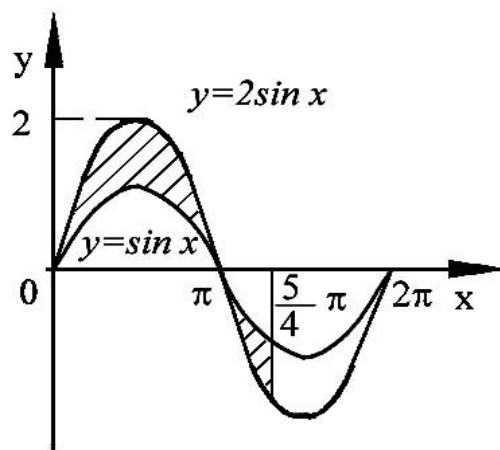


Рис. 2.13

Для вычисления площадей S_1 и S_2 применим формулу (2.7):

$$S_1 = \int_0^{\pi} (2 \sin x - \sin x) dx = \int_0^{\pi} \sin x dx = \cos x \Big|_0^{\pi} =$$

$$= -\cos \pi - (-\cos 0) = -(-1) - (-1) = 1 + 1 = 2.$$

$$S_2 = \int_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi} (\sin x - 2 \sin x) dx = - \int_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi} \sin x dx = \cos x \Big|_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi} =$$

$$= \cos \frac{5}{4}\pi - \cos \pi = -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1.$$

$$\text{Тогда } S = S_1 + S_2 = 2 - \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 2,293.$$

Задания для решения в аудитории

Вычислить площадь фигур, ограниченных линиями:

1. $xy = 6$; $x = 1$; $x = e$; $y = 0$.
2. $y = x^2 - 5x + 6$ и координатными осями.
3. $x = 8y - y^2 - 7$ и осью Oy .
7. $y = x^3 - 4x$ и $y = 0$.

8. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = \frac{2}{1+x^2}, x=0, x=\sqrt{3}.$$

9. Найти площадь криволинейного треугольника, лежащего в 1-й четверти и ограниченного линиями $y = 2 - x^2$, $y = x$, $x = 0$.

10. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$4y = 8x - x^2, 4y = x + 6.$$

11. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = 2^x, y = 2^{-2x}, y = 4.$$

12. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями

$$y = e^x, y = e^{2x}, x = 1.$$

Ответы

$$1. S = 6 (e\partial^2.). 2. S = 4\frac{2}{3} (e\partial^2.). 3. S = 36 (e\partial^2.).$$

$$7. S = 8 (e\partial^2.). 8. \frac{2\pi}{3}. 9. \frac{7}{6}. 10. 5\frac{5}{24}. 11. 12 - \frac{9}{\ln 4}.$$

$$12. \frac{e^2}{2} - e + \frac{1}{2}.$$

Индивидуальные задания

1. Вычислить площади фигур, ограниченных линиями, заданными в прямоугольной системе координат:

- | | | |
|---|-------------------------------------|---------------------------------------|
| 1 | 1) $y = 6x - x^2, y = 0$; | 2) $y^2 = x^3, x = 0, y = 4$. |
| 2 | 1) $y = x^2 + 4x, x - y + 4 = 0$; | 2) $xy = 6, y = 7 - x$. |
| 3 | 1) $y = x^3, y = x$; | 2) $y = x^2 - 6x + 10, y = x$. |
| 4 | 1) $y = x^3, y = 2x$; | 2) $x^2 = 9y, x = 3y - 6$. |
| 5 | 1) $y^2 = 4x, y = x$; | 2) $y = 2 - x^2, y^3 = x^2$. |
| 6 | 1) $y^2 = 4x, y = \frac{1}{4}x^2$; | 2) $x = 2 - y - y^2, x = 0$. |
| 7 | 1) $3y = x^2, 3x = y^2$; | 2) $y = 6x - x^2 - 5, y = 0$. |
| 8 | 1) $y = x^2 - 3x, y = 4 - 3x$; | 2) $y = x^2 - 5x + 6, x = 0, y = 0$. |

- 9 1) $y = 2x - x^2, y = x$; 2) $y^2 = x^3, x = 0, y = 1$.
- 10 1) $y = \frac{1}{2}x^2, y = 4 - x$; 2) $y^3 = x^2, y = 1$.
- 11 1) $x = y^2, x = \frac{3}{4}y^2 + 1$; 2) $y = \ln x, x = e, y = 0$.
- 12 1) $y = x^2, 2x - y + 3 = 0$; 2) $xy = 6, x = 1, x = e, y = 0$.
- 13 1) $y = 4 - x^2, y = 0$; 2) $y^2 = 9x, y = 3x$.
- 14 1) $y = \frac{1}{2}x^2, x + 2y - 6 = 0$; 2) $y = x^2, y^2 = x$.
- 15 1) $4x = y^2, 4y = x^2$; 2) $y = -\frac{1}{2}x^2 + 3, y = 1$.
- 16 1) $y = x^2, y = x + 2$; 2) $x = 8y - y^2 - 7, x = 0$.
- 17 1) $y = 6x - x^2, y = 0$; 2) $y^2 = x^3, x = 0, y = 4$.
- 18 1) $y = x^2 + 4x, x - y + 4 = 0$; 2) $xy = 6, y = 7 - x$.
- 19 1) $y = x^3, y = x$; 2) $y = x^2 - 6x + 10, y = x$.
- 20 1) $y = x^3, y = 2x$; 2) $x^2 = 9y, x = 3y - 6$.
- 21 1) $y^2 = 4x, y = x$; 2) $y = 2 - x^2, y^3 = x^2$.
- 22 1) $y^2 = 4x, y = \frac{1}{4}x^2$; 2) $x = 2 - y - y^2, x = 0$.
- 23 1) $3y = x^2, 3x = y^2$; 2) $y = 6x - x^2 - 5, y = 0$.
- 24 1) $y = x^2 - 3x, y = 4 - 3x$; 2) $y = x^2 - 5x + 6, x = 0, y = 0$.
- 25 1) $y = 2x - x^2, y = x$; 2) $y^2 = x^3, x = 0, y = 1$.
- 26 1) $y = \frac{1}{2}x^2, y = 4 - x$; 2) $y^3 = x^2, y = 1$.
27. 1) $x = y^2, x = \frac{3}{4}y^2 + 1$; 2) $y = \ln x, x = e, y = 0$.
28. 1) $y = x^2, 2x - y + 3 = 0$ 2) $xy = 6, x = 1, x = e, y = 0$.
29. 1) $y = 4 - x^2, y = 0$; 2) $y^2 = 9x, y = 3x$.
30. 1) $y = \frac{1}{2}x^2, x + 2y - 6 = 0$; 2) $y = x^2, y^2 = x$.

Вопросы и задания для самопроверки

1. Определенный интеграл. Понятие. Доказать формулу для вычисления площади криволинейной трапеции.

2. Определенный интеграл с переменным верхним пределом. (Доказать теорему о совпадении этого интеграла с одной из первообразных).

3. Основные свойства определенного интеграла. (Доказать одно из свойств)

Глава 3. Дифференциальные уравнения

§1. Дифференциальные уравнения первого порядка

Решение различных задач методом систематического моделирования сводится к отысканию неизвестной функции из уравнения, содержащего независимую переменную, искомую функцию и производные этой функции. Такое уравнение называется дифференциальным [1].

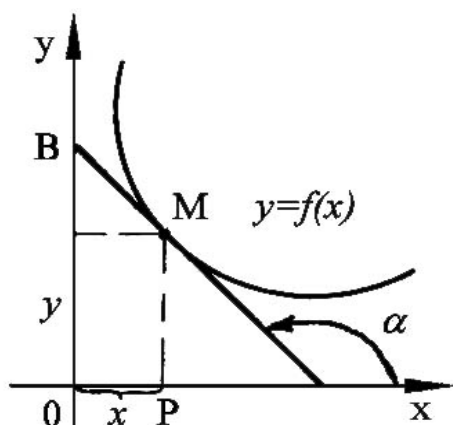


Рис. 3.1. Кривая, рассмотренная в примере 1

Определение. Решением дифференциального уравнения называется всякая функция, которая обращает данное уравнение в тождество. Рассмотрим задачу, приводящую к дифференциальному уравнению.

Пример 1. Найти функцию, график которой обладает тем свойством, что отрезок любой касательной, заключенной между осями координат, делится пополам в точке касания.

Решение. Пусть $y = f(x)$ — искомая функция, а $M(x, y)$ — произвольная точка кривой, определяемой этим уравнением; предположим для определенности, что кривая расположена в первой четверти (рис. 3.1). По условию задачи имеем $BM = MA$, а следовательно, $OP = PA = x$. Из рис. 2.1 видно, что $\operatorname{tg}(\angle PAM) = \frac{MP}{PA}$, т.е. $\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = \frac{y}{x}$, или $-\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x}$.

Учитывая, что $\operatorname{tg} \alpha$ есть угловой коэффициент касательной, который в точке

$M(x, y)$ равен y' , получаем дифференциальное уравнение

$$y' = -\frac{y}{x}. \quad (3.1)$$

Решением уравнения (1.1) является всякая функция вида

$$y = \frac{C}{x}, \quad (3.2)$$

Где c – постоянная. В самом деле, заменив в уравнении (1.1) y его значением из равенства (1.2), получим

$$\left(\frac{C}{x}\right)' = -\frac{C}{x^2}, \text{ т.е. } -\frac{C}{x^2} = -\frac{C}{x^2}.$$

Следовательно, равенство (3.2) определяет множество функций, обладающих указанным в задаче свойством. Графики этих функций представляют собой семейство гипербол (рис.3.1).

В дальнейшем рассмотрим еще ряд примеров, которые показывают, каким мощным математическим аппаратом являются дифференциальные уравнения при решении различных и весьма непростых практических задач.

Определение. Дифференциальным уравнением называется уравнение, содержащее независимую переменную x , искомую функцию y и ее производные $y', y'', \dots, y^{(n)}$. Символически дифференциальное уравнение записывается так :

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0. \quad (1.3)$$

Определение. Порядком дифференциального уравнения называется наибольший порядок производных, входящих в данное уравнение.

Определение. Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение вида

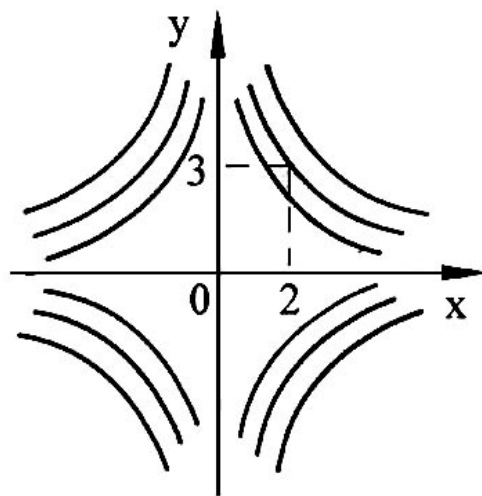


Рис. 3.2. Семейство интегральных кривых

$$F(x, y, y') = 0. \quad (3.4)$$

Разрешая уравнение (1.4) относительно производной y' , если это возможно, получим

$$y' = f(x, y). \quad (3.5)$$

Рассмотренный выше пример показывает, что дифференциальное уравнение имеет, вообще говоря, бесконечное множество решений.

При различных значениях постоянной C равенство

$$y = \frac{C}{x}, \quad (3.6)$$

определяет различные решения уравнения

$$y' = -\frac{y}{x}. \quad (3.7)$$

Например, непосредственной подстановкой можно убедиться, что функции $y = 1/x$ ($C = 1$), $y = 3/x$ ($C = 3$) являются решениями уравнения (3.1).

Таким образом, каждому дифференциальному уравнению соответствует, как правило, бесконечная совокупность его решений.

Определение. Всякое отдельно взятое решение дифференциального уравнения называется его *частным решением*. С геометрической точки зрения совокупность всех решений дифференциального уравнения представляет собой семейство кривых, называемых *интегральными кривыми*, а каждое частное решение представляет отдельную интегральную кривую.

Определение. Функция $y = \varphi(x, C)$ представляет *общее решение* дифференциального уравнения (3.4) или 3.5), если при любом значении C эта функция является решением уравнения (3.4) или (3.5) и любое его частное решение может быть получено из $y = \varphi(x, C)$ при некотором значении постоянной C .

Иногда не удастся получить решение дифференциального уравнения в явной форме $y = \varphi(x)$ или $y = \varphi(x, C)$, а получают их в неявной форме, т.е. решение задается формулой вида

$$\Phi(x, y) = 0, \text{ или } \Phi(x, y, C) = 0. \quad (3.8)$$

Определение. Выражение $\Phi(x, y) = 0$, или $\Phi(x, y, C) = 0$ в этом случае называют *интегралом (частным, общим)* дифференциального уравнения.

При решении конкретных задач часто необходимо выделить из всей совокупности решений дифференциального уравнения то частное решение, которое является ответом на поставленный вопрос. Для того, чтобы из всей совокупности решений выделить отдельную интегральную кривую, задают так называемое *начальное условие*.

В случае дифференциальных уравнений первого порядка (3.5) под *начальными условиями* для его решения $y = y(x)$ понимают условия, состоящие в том, что $y = y_0$ при $x = x_0$, т.е.

$$y(x_0) = y_0, \quad (3.9)$$

где x_0 и y_0 – заданные числа (начальные данные) такие, что при $x = x_0$ и $y = y_0$ функция имеет смысл, т.е. существует $f(x_0, y_0)$.

Определение. Задача нахождения частного решения дифференциального уравнения, удовлетворяющего заданным начальным условиям, называется *задачей Коши*.

В случае дифференциального уравнения первого порядка задача Коши формулируется следующим образом: найти решение $y = y(x)$ уравнения $y' = f(x, y)$, удовлетворяющее при заданных начальных данных (x_0, y_0) начальному условию $y(x_0) = y_0$, или, в другой записи, $y_{x=x_0} = y_0$, где x_0, y_0 – заданные числа.

Пусть даны начальные данные $x_0 = 2, y_0 = 3$, и требуется найти частное решение $y = y(x)$ уравнения (3.7), удовлетворяющее начальному условию $y(2) = 3$. Выше показано, что функция (1.6) при любом C является решением уравнения (3.7).

Подставим в формулу (3.6) начальные данные $x = 2, y = 3$, найдем $3 = C/2$, т.е. $C = 6$. Таким образом, искомым частным решением уравнения (3.7) является функция $y = 6/2$.

Геометрически решение, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$, представляет интегральную кривую, проходящую через данную точку (x_0, y_0) .

Так, общее решение $y = C / x$ уравнения $y' = -y / x$ определяет семейство равносторонних гипербол (см. рис.1.2). Частное решение $y = 6 / x$ определяет гиперболу, проходящую через точку (2;3).

Рассмотрим из множества типов дифференциальных уравнений только дифференциальные уравнения первого порядка с разделяющимися переменными.

Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными

Определение. Дифференциальное уравнение называется *уравнением с разделяющимися переменными*, если имеет следующий вид:

$$y' = f_1(x) \cdot f_2(y). \quad (3.10)$$

Для уравнения (3.10) теорема Коши о существовании и единственности решения может быть сформулирована следующим образом.

Теорема. Если функция $f_1(x)$ непрерывна в интервале $(a;b)$, функция $f_2(y)$ и ее производная по y непрерывна в интервале $(c;d)$, то для любых начальных данных $x_0 \in (a;b)$, $y_0 \in (c;d)$ существует, причем единственное, решение $y = \varphi(x)$ уравнения (1.10), удовлетворяющее начальному условию $\varphi(x_0) = y_0$.

Другими словами, при указанных условиях через любую точку прямоугольника $a < x < b$, $c < y < d$ проходит, и при том единственная, интегральная кривая уравнения (3.1).

Если $f_2(y) \neq 0$, то уравнение с разделяющимися переменными (2.10) можно переписать в виде (*разделить переменные*)

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx. \quad (3.11)$$

Определение. Уравнение вида (3.11) называется уравнением с разделяющимися переменными.

Теорема. Если существуют интегралы $\int \frac{dy}{f_2(y)}$ и $\int f_1(x)dx$, то общий интеграл уравнения с разделенными переменными (3.11) задается уравнением

$$F_2(y) = F_1(x) + C,$$

где $F_2(y)$ и $F_1(x)$ – некоторые первообразные соответственно функций $-\frac{1}{f_2(y)}$ и $\frac{1}{f_1(x)}$.

Доказательство. Допустим, что функция $y = \varphi(x)$ является решением уравнения (1.11). Подставляя в (1.11), получим тождество относительно переменной x :

$$\frac{\varphi'(x)dx}{f_2(\varphi(x))} = f_1(x)dx.$$

Интегрируя это тождество по x , найдем:

$$\int \frac{\varphi'(x)dx}{f_2(\varphi(x))} = \int f_1(x)dx + C$$

или, учитывая, что $y = \varphi(x)$ и $dy = \varphi'(x)dx$, по правилу подстановки в неопределенном интеграле имеем

$$\int \frac{dy}{f_2(y)} = \int f_1(x)dx + C \quad (3.12)$$

или

$$F_2(y) = F_1(x) + C, \quad (3.13)$$

где $F_2(y)$ и $F_1(x)$ – некоторые первообразные соответственно функций $\frac{1}{f_2(y)}$ и $f_1(x)$.

Итак, любое решение дифференциального уравнения (1.11) удовлетворяет уравнению (3.13). Обратно, если некоторая функция $y = \varphi(x)$ удовлетворяет равенству (3.13), то она удовлетворяет и равенству (3.12), но тогда имеет место все предыдущие равенства, включая и (3.11). Таким образом, равенство (3.13) определяет общий интеграл уравнения (3.11).

При решении дифференциальных уравнений с разделяющимися переменными (3.10) можно руководствоваться следующим алгоритмом:

1) разделить переменные;

2) интегрируя почленно полученное уравнение с разделяющимися переменными (1.11), найти его общий интеграл (3.13);

3) выяснить, имеет ли уравнение (1.10) решения, не получающиеся из общего интеграла (1.13);

4) найти частный интеграл (или решение), удовлетворяющий начальным условиям (если это требуется).

Пример 2. Найти частное решение уравнения

$$2yy' = 1 - 3x^2, \text{ если } y_0 = 3 \text{ при } x_0 = 1.$$

Решение. Заменяем y' на $\frac{dy}{dx}$, получим $2y \frac{dy}{dx} = 1 - 3x^2$,

$$\text{отсюда } 2y dy = (1 - 3x^2) dx.$$

Интегрируя обе части последнего неравенства, найдем $\int 2y dy = \int (1 - 3x^2) dx$, или $2 \int y dy = \int dx - 3 \int x^2 dx$,

$$\text{или } 2 \cdot \frac{y^2}{2} = x - \frac{3x^3}{3} + C, \text{ т.е. } y^2 = x - x^3 + C.$$

Подставив начальное значение $x_0 = 1$, $y_0 = 3$, найдем C : $9 = 1 - 1 + C$, т.е. $C = 9$.

Следовательно, искомый частный интеграл будет $y^2 = x - x^3 + 9$, или $x^3 + y^2 - x - 9 = 0$.

Пример 3. Найти общее решение уравнения

$$(x^2 y^2 - x^2 y) dy - xy^2 dx = 0, \quad x \neq 0, \quad y \neq 0.$$

Решение. Разделим переменные. Для этого преобразуем данное уравнение, вынося общий множитель слева x^2 : $x^2(y^2 - y) dy = xy^2 dx$.

Разделим правую и левую части уравнения на $x^2 y^2$:

$$\frac{x^2}{x^2 y^2} (y^2 - y) dy = \frac{xy^2}{x^2 y^2} dx, \text{ или } \frac{y(y-1)}{y^2} dy = \frac{dx}{x},$$

или $\frac{y-1}{y} dy = \frac{dx}{x}$. Проинтегрируем обе части последнего равенства:

$$\int \frac{y-1}{y} dy = \int \frac{dx}{x}, \quad \int \left(1 - \frac{1}{y}\right) dy = \int \frac{dx}{x}, \quad \text{или} \quad \int dy - \int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x}, \quad \text{откуда}$$

$y - \ln|y| = \ln|x| + C_1$ - общий интеграл данного уравнения.

Задачи для решения в аудитории

Найти решения уравнений. В тех задачах, в которых заданы начальные условия, найти решения, удовлетворяющие этим условиям.

1. $(xy^2 + x)dx + (y + x^2y)dy = 0$.
2. $yx e^{x^2} dx + (1 + y)dy = 0$.
3. $x(1 + y^2) + e^x y' = 0$, если $y = 0$ при $x = 0$.

Ответы

1. $(y^2 + 1)(1 + x^2) = C$.
2. $\frac{1}{2} e^{x^2} + \ln|y| + y = C$.
3. $-xe^{-x} - e^{-x} + \operatorname{arctg} y = -1$.

Индивидуальные задания

1. Найти решения уравнений. В тех задачах, в которых заданы начальные условия, найти решения, удовлетворяющие этим условиям.

- 1.1. $(xy^2 + x)dx = (y - x^2y)dy$;
- 1.2. $\sqrt{1 - x^2} dy - \sqrt{1 - y^2} dx = 0$;
- 1.3. $\cos x \sin y dy = \cos y \sin x dx$;
- 1.4. $e^x(1 + e^y)dx + e^y(1 + e^x)dy = 0$;
- 1.5. $(xy + x)\frac{dx}{dy} = 1$;
- 1.6. $(1 + x^2)dy - (xy + x)dx = 0$;
- 1.7. $x^2 y' = 3y + 2xy$;
- 1.8. $y' \operatorname{tg} x = 1 + y$, если $y = -\frac{1}{2}$ при $x = \frac{\pi}{6}$;
- 1.9. $(1 + y^2)dx = xydy$, если $y = 1$ при $x = 1$;
- 1.10. $(1 - x^2)y' + xy = 0$, если $y = 4$ при $x = 0$;
- 1.11. $dy + y \operatorname{tg} x dx = 0$, если $y = 1$ при $x = 0$;
- 1.12. $\cos x \sin y dy = \cos y \sin x dx$, если $y = \pi$ при $x = \pi$;

- 1.13. $3y' = \frac{1+x^2}{y^2}$;
- 1.14. $\sqrt{y} dx + x^2 dy = 0$;
- 1.15. $y' = xe^{-y}$, если $y = 0$ при $x = 1$;
- 1.16. $y' = 2x(y-1)^3$;
- 1.17. $x^2 + x^2 y = y^2 y'$;
- 1.18. $x\sqrt{5+y^2} dx + y\sqrt{4+x^2} dy = 0$;
- 1.19. $xyy' = 1 - x^2$;
- 1.20. $(xy^2 + x)dx + (y - x^2 y)dy = 0$;
- 1.21. $yy' + xe^y = 0$, если $y = 1$ при $x = 0$;
- 1.22. $x(y^2 + 1)dx + (1 + x^2)dy = 0$, если $y = 1$ при $x = 0$;
- 1.23. $(x^2 + 1)y' + 4xy = 0$, если $y = 1$ при $x = 0$;
- 1.24. $x\sqrt{9-y^2} dx - y\sqrt{4+x^2} dy = 0$, если $y = 0$ при $x = 0$;
- 1.25. $\sqrt{1+\ln y} dy + xy dx = 0$, если $y = 1$ при $x = 1$;
- 1.26. $(xy^2 + x) = (y + x^2 y)y'$;
- 1.27. $\sqrt{1-x^2} dy - x\sqrt{1-y^2} dx = 0$;
- 1.28. $\cos^2 x \sin y dy = \sqrt{\cos y} \sin x dx$;
- 1.29. а) $e^x(1 + e^{2y})dx + e^y \sqrt{1 + e^x} dy = 0$;
- 1.30. а) $(xy^2 + x)\frac{dx}{dy} = 1$;

§2. Комплексные числа

Определение. Комплексным числом z называется выражение $z = a + ib$, где a и b – действительные числа, i – мнимая единица, которая определяется соотношением [3]:

$$i^2 = -1; \quad i = \sqrt{-1}.$$

При этом число a называется *действительной частью* числа z ($a = \operatorname{Re} z$), а b – *мнимой частью* ($b = \operatorname{Im} z$).

Если $a = \operatorname{Re} z = 0$, то число z будет чисто мнимым, если $b \neq 0$. Если $b = 0$, то число z будет действительным.

Определение. Числа $z = a + ib$ и $\bar{z} = a - ib$ называются комплексно – сопряженными.

Определение. Два комплексных числа $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$ называются равными, если соответственно равны их действительные и мнимые части:

$$a_1 = a_2; \quad b_1 = b_2;$$

Определение. Комплексное число равно нулю, если соответственно равны нулю действительная и мнимая части.

$$a = b = 0.$$

Понятие комплексного числа имеет геометрическое истолкование. Множество комплексных чисел является расширением множества действительных чисел за счет включения множества мнимых чисел. Комплексные числа включают в себя все множества чисел, которые изучались ранее. Так натуральные, целые, рациональные, иррациональные, действительные числа являются, вообще говоря, частными случаями комплексных чисел.

Если любое действительное число может быть геометрически представлено в виде точки на числовой прямой, то комплексное число представляется точкой на плоскости, координатами которой будут соответственно действительная и мнимая части комплексного числа. При этом горизонтальная ось будет являться действительной числовой осью, а вертикальная - мнимой осью.

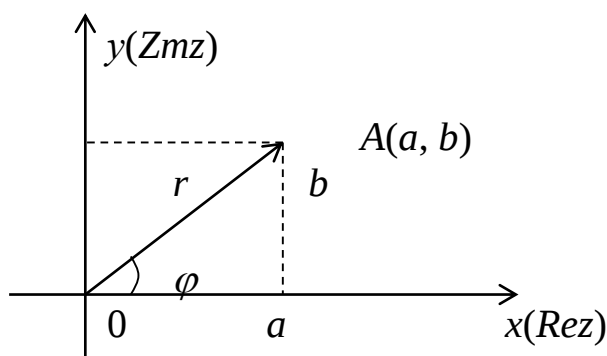


Рис. 3.3. Геометрическое представление комплексного числа.

Таким образом, на оси OX располагаются действительные числа, а на оси OY – чисто мнимые.

С помощью подобного геометрического представления можно представлять числа в так называемой тригонометрической форме.

1. Тригонометрическая форма числа

Из геометрических соображений видно, что $a = r \cos \varphi$; $b = r \sin \varphi$. Тогда комплексное число можно представить в виде:

$$z = a + ib = r \cos \varphi + ir \sin \varphi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

Такая форма записи называется *тригонометрической формой записи комплексного числа*.

При этом величина r называется *модулем* комплексного числа, а угол наклона φ – *аргументом* комплексного числа.

$$r = |z|; \quad \varphi = \operatorname{Arg} z.$$

Из геометрических соображений видно:

$$r = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}; \quad \arg z = \operatorname{arctg} \frac{b}{a};$$

Модуль комплексного числа определяется однозначно:

$$|z| = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Аргумент комплексного числа определяется с точностью до слагаемого, кратного 2π . Главным значением аргумента называется значение, заключенное в интервале $(-\pi, \pi]$. Обозначается оно $\arg z = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$.

Таким образом, $-\pi < \arg z \leq \pi$.

Очевидно, $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k$.

Главное значение аргумента определяется однозначно.

Так как $\operatorname{tg} \arg z = \frac{b}{a}$,

$$\arg z = \begin{cases} \operatorname{arctg} \frac{b}{a}, & \text{если } (a, b) \in \text{I, IV четвертям;} \\ \operatorname{arctg} \frac{b}{a} + \pi, & \text{если } (a, b) \in \text{II четверти;} \\ \operatorname{arctg} \frac{b}{a} - \pi, & \text{если } (a, b) \in \text{III четверти.} \end{cases}$$

Тригонометрическая форма комплексного числа будет иметь вид

$$z = |a + ib| = |z|(\cos(\arg z + 2\pi k) + \sin(\arg z + 2\pi k))$$

Для модуля и аргумента произведения и частного справедливы следующие утверждения:

$$1. |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|, \operatorname{Arg} z_1 \cdot z_2 = \operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2.$$

Пример 1. Найти модуль и аргумент произведения $z \cdot i$.

$$\textbf{Решение.} |z \cdot i| = |z| \cdot |i| = |z| \cdot \sqrt{0^2 + 1^2} = |z| \cdot 1 = |z|.$$

$$\operatorname{Arg}(z \cdot i) = \operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} i = \operatorname{Arg} z + \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k \right).$$

Таким образом, умножение на i соответствует повороту вектора z на угол $\frac{\pi}{2}$.

$$2. \left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \operatorname{Arg} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2.$$

Пример 2. Написать в тригонометрической форме комплексное число $z = -1 + i$ (см. рис. 1.4).

$$\textbf{Решение.} |z| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2} = \sqrt{2},$$

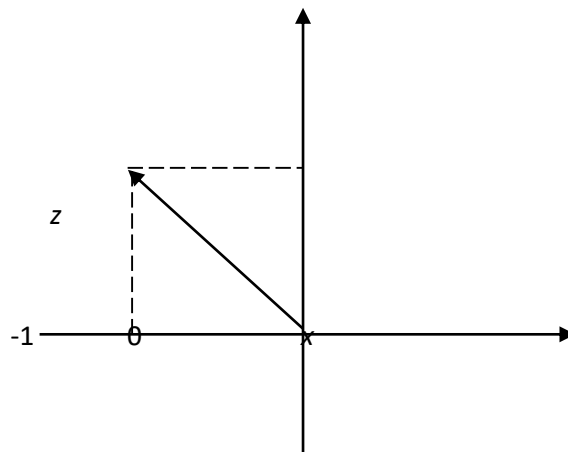


Рис. 1.4. Комплексное число $z = -1 + i$.

$\arg z = \operatorname{arctg} \frac{1}{-1} + \pi = \operatorname{arctg}(-1) + \pi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3}{4}\pi$, т.к. число лежит во

второй четверти. Хотя из рис. 1.4 видно, что $\arg z = \frac{3}{4}\pi$. Тогда

$$z = |z|(\cos \operatorname{Arg} z + i \sin \operatorname{Arg} z) = \sqrt{2} \left(\cos \left(\frac{3}{4}\pi + 2\pi k \right) + i \sin \left(\frac{3}{4}\pi + 2\pi k \right) \right).$$

Очевидно, что комплексно – сопряженные числа имеют одинаковые модули и противоположные аргументы.

$$|z| = |\bar{z}|; \quad \operatorname{Arg} z = -\operatorname{Arg} \bar{z}.$$

2. Действия с комплексными числами.

Основные действия с комплексными числами вытекают из действий с многочленами.

1) *Сложение и вычитание.*

$$z = z_1 \pm z_2 = (a_1 + ib_1) \pm (a_2 + ib_2) = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2)$$

$$|z| = \sqrt{(a_1 \pm a_2)^2 + (b_1 \pm b_2)^2}$$

Пример 3. Даны два комплексных числа $z_1 = 1 - \frac{7}{2}i$; $z_2 = -7 - 2i$.

Найти $z_1 + z_2$.

$$\textbf{Решение.} \quad z_1 + z_2 = (1 - 7) + \left(-\frac{7}{2} - 2 \right)i = -6 - \frac{11}{2}i.$$

2) *Умножение.*

$$z = z_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1 a_2 + ia_1 b_2 + ib_1 a_2 + i^2 b_1 b_2$$

$$z = z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i(a_1 b_2 + b_1 a_2)$$

В тригонометрической форме:

$$z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1) = |z_1|(\cos \operatorname{Arg} z_1 + i \sin \operatorname{Arg} z_1),$$

$$z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2) = |z_2|(\cos \operatorname{Arg} z_2 + i \sin \operatorname{Arg} z_2).$$

Тогда

$$z = z_1 z_2 = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)) \text{ или}$$

$$z = z_1 z_2 = |z_1| |z_2| (\cos(\operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2) + i \sin(\operatorname{Arg} z_1 + \operatorname{Arg} z_2)) /$$

В случае комплексно – сопряженных чисел:

$$z \bar{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2 = |z|^2 = |\bar{z}|^2.$$

Пример 4. Вычислить $(2 + i) \cdot (2 - 3i)$.

Решение. Выполним умножение комплексных чисел в алгебраической форме

$$(2 + i) \cdot (2 - 3i) = 2 \cdot 2 - 2 \cdot 3i + i \cdot 2 - i \cdot 3i = 4 - 6i + 2i - 3i^2 = 4 - 4i - 3(-1) = 4 - 4i + 3 = 7 - 4i.$$

3) Деление.

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = x + iy$$

$$z = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} = \frac{(a_1 a_2 + b_1 b_2) + i(a_2 b_1 - a_1 b_2)}{a_2^2 + b_2^2}$$

$$z = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

В тригонометрической форме:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)) \text{ или}$$

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} (\cos(\operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2) + i \sin(\operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2)).$$

Пример 5. Вычислить $\frac{(2 + i)}{(2 - 3i)}$.

Решение.

$$\frac{2 + i}{2 - 3i} = \frac{(2 + i)(2 + 3i)}{(2 - 3i)(2 + 3i)} = \frac{2 \cdot 2 + 2 \cdot 3i + i \cdot 2 + i \cdot 3i}{2^2 - (3i)^2} = \frac{4 + 6i + 2i + 3i^2}{4 - 9i^2} =$$

$$= \frac{4 + 8i + 3(-1)}{4 - 9(-1)} = \frac{1 + 8i}{13} = -\frac{1}{13} - \frac{8}{13}i.$$

4) Возведение в степень.

Из операции умножения комплексных чисел следует, что

$$z^2 = zz = r^2 (\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi)$$

В общем случае получим:

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi), \text{ или } z^n = |z|^n (\cos n \operatorname{Arg} z + i \sin n \operatorname{Arg} z),$$

где n – целое положительное число.

Это выражение называется *формулой Муавра* (Абрахам де Муавр (1667 – 1754) – английский математик). Формулу Муавра можно использовать для нахождения тригонометрических функций двойного, тройного и т.д. углов.

Пример 6. Вычислить $(\sqrt{3} - i)^5$.

Решение.

Число $z = \sqrt{3} - i$ представим в тригонометрической форме $z = |z|(\cos \operatorname{Arg} z + i \sin \operatorname{Arg} z)$, где модуль и аргумент находим по формулам:

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{4} = 2;$$

$$\arg z = \operatorname{arctg} \frac{b}{a} = \operatorname{arctg} \frac{-1}{\sqrt{3}} = \operatorname{arctg} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right) = -\frac{\pi}{6}, \text{ т.к. } z \text{ лежит в IV четверти.}$$

$$z = |z|(\cos \operatorname{Arg} z + i \sin \operatorname{Arg} z) = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi k \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi k \right) \right).$$

Для нахождения z^5 воспользуемся формулой Муавра:

$$z^n = |z|^n (\cos n \operatorname{Arg} z + i \sin n \operatorname{Arg} z) = 2^5 \left(\cos 5 \left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi k \right) + i \sin 5 \left(-\frac{\pi}{6} + 2\pi k \right) \right).$$

$$z^5 = 32 \left(\cos \left(-\frac{5\pi}{6} + 10\pi k \right) + i \sin \left(-\frac{5\pi}{6} + 10\pi k \right) \right).$$

$$z^5 = 32\left(\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right) = 32\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) - i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right) = 32\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right)$$

$$= 32\left(\cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) - i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)\right) = 32\left(-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = 32\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right).$$

Окончательно получим

$$(\sqrt{3} - i)^5 = -16\sqrt{3} - 16i.$$

Пример 7. Найти формулы $\sin 2\varphi$ и $\cos 2\varphi$.

Решение. Рассмотрим некоторое комплексное число в форме

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Возведя правую и левую части в квадрат получим $z^2 = r^2(\cos^2 \varphi + 2i \cos \varphi \sin \varphi - \sin^2 \varphi)$. Но по формуле Муавра квадрат комплексного числа равен:

$$z^2 = r^2(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi).$$

Приравнявая левые части равенств, получим

$$\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi + 2i \cos \varphi \sin \varphi.$$

Два комплексных числа равны, если равны их действительные и мнимые части. Приравнявая их получили известные формулы двойного угла:

$$\sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi, \quad \cos 2\varphi = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi.$$

5) *Извлечение корня из комплексного числа.*

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \rho(\cos \psi + i \sin \psi).$$

Возводя в степень, получим:

$$\rho^n(\cos n\psi + i \sin n\psi) = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

$$\text{Отсюда: } \rho = \sqrt[n]{r}; \quad n\psi = \varphi + 2\pi k; \quad k \in \mathbb{Z}.$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right) \quad \text{или}$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\arg z + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\arg z + 2\pi k}{n} \right).$$

Таким образом, корень n – ой степени из комплексного числа имеет n различных значений.

Пример 8. Найти все значения $\sqrt[3]{-8}$ и построить их (см. рис. 1.4).

Решение.

$|-8| = 8$, $\arg(-8) = \pi$. Следовательно,

$$-8 = z = |z|(\cos \operatorname{Arg} z + i \sin \operatorname{Arg} z) = 8(\cos(\pi + 2\pi k) + i \sin(\pi + 2\pi k)).$$

Откуда по формуле $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\arg z + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\arg z + 2\pi k}{n} \right)$

имеем

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{z} &= \sqrt[3]{|z|} \left(\cos \frac{\arg z + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{\arg z + 2\pi k}{3} \right) = \\ &= \sqrt[3]{8} \left(\cos \frac{\pi + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{3} \right), \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

$$k = 0, w_1 = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right),$$

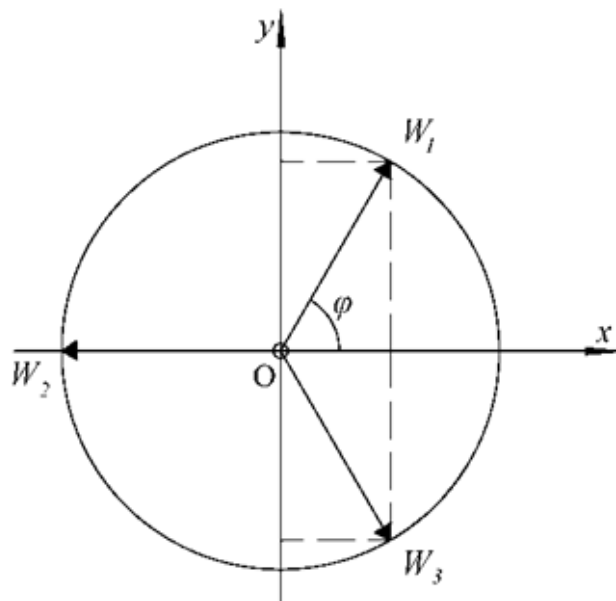


Рис. 3.4. Комплексное число $z = -1 + i$.

$$k=1, w_2 = 2\left(\cos\frac{\pi+2\pi}{3} + i\sin\frac{\pi+2\pi}{3}\right) = 2(-1+i\cdot 0) = -2,$$

$$k=2, w_1 = 2\left(\cos\frac{\pi+4\pi}{3} + i\sin\frac{\pi+4\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 - i\sqrt{3}.$$

Пример 9. Даны два комплексных числа $z_1 = 1 - \frac{7}{2}i$; $z_2 = -7 - 2i$.

Требуется:

а) найти значение выражения $\left(\frac{1 - \frac{7}{2}i}{-7 - 2i}\right)^{-4}$ в алгебраической форме;

б) для числа $z = 2 - 2\sqrt{3}i$ найти тригонометрическую форму, найти z^{20} , найти корни уравнения $w^3 - z = 0$.

Решение.

а) Очевидно, справедливо следующее преобразование:

$$\left(\frac{1 - \frac{7}{2}i}{-7 - 2i}\right)^{-4} = \left(\frac{2 - 7i}{-14 - 4i}\right)^{-4} = \left(\frac{-14 - 4i}{2 - 7i}\right)^4 = 2^4 \left(\frac{-7 - 2i}{2 - 7i}\right)^4 = 16 \left(\frac{-7 - 2i}{2 - 7i}\right)^4.$$

Далее производим деление двух комплексных чисел (см.3)), умножая числитель на сопряженное к знаменателю:

$$\frac{-7 - 2i}{2 - 7i} = \frac{(-7 - 2i)(2 + 7i)}{(2 - 7i)(2 + 7i)} = \frac{-14 - 49i - 4i + 14}{4 + 49} = \frac{-53i}{53} = -i.$$

Возводя, полученное выражение в четвертую степень, получим:

$$16(-i)^4 = 16i^4 = 16(i^2)^2 = 16(-1)^2 = 16.$$

б) Число $z = 2 - 2\sqrt{3}i$ представим в тригонометрической форме $z = |z|(\cos \text{Arg} z + i \sin \text{Arg} z)$, где модуль и аргумент находим по формулам:

$$r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12} = 4;$$

$\arg z = \operatorname{arctg} \frac{b}{a} = \operatorname{arctg} \frac{-2\sqrt{3}}{2} = \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3} = -60^\circ$ т.к. z лежит в IV четверти.

$$z = |z|(\cos \operatorname{Arg} z + i \sin \operatorname{Arg} z) = 4 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi k \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi k \right) \right).$$

Для нахождения z^{20} воспользуемся формулой Муавра:

$$\begin{aligned} z^n &= |z|^n (\cos n \operatorname{Arg} z + i \sin n \operatorname{Arg} z) = 4^{20} \left(\cos 20 \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi k \right) + i \sin 20 \left(-\frac{\pi}{3} + 2\pi k \right) \right). \\ z^{20} &= 4^{20} (\cos(-60 \cdot 20) + i \sin(-60 \cdot 20)) = \\ z^{20} &= 4^{20} (\cos 1200^\circ - i \sin 1200^\circ) = \\ &= 4^{20} (\cos(3 \cdot 360^\circ + 120^\circ) - i \sin(3 \cdot 360^\circ + 120^\circ)) = \\ &= 4^{20} (\cos 120^\circ - i \sin 120^\circ) = -4^{20} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right). \end{aligned}$$

Если $w^3 - z = 0$, то $w = \sqrt[3]{z}$

Откуда по формуле $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|} \left(\cos \frac{\arg z + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\arg z + 2\pi k}{n} \right)$ имеем

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{z} &= \sqrt[3]{|z|} \left(\cos \frac{\arg z + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{\arg z + 2\pi k}{3} \right) = \\ &= 4 \left(\cos \frac{-\frac{\pi}{3} + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{-\frac{\pi}{3} + 2\pi k}{3} \right), \quad k \in \mathbb{Z}. \\ k=0, w_1 &= 4 \left(\cos \frac{-\pi}{9} + i \sin \frac{-\pi}{9} \right) = 4 \left(\cos \frac{\pi}{9} - i \sin \frac{\pi}{9} \right), \\ k=1, w_2 &= 4 \left(\cos \frac{-\frac{\pi}{3} + 2\pi}{3} + i \sin \frac{-\frac{\pi}{3} + 2\pi}{3} \right) = 4 \left(\cos \frac{5\pi}{9} + i \sin \frac{5\pi}{9} \right), \end{aligned}$$

$$k = 2, w_1 = 4 \left(\cos \frac{-\pi + 4\pi}{3} + i \sin \frac{-\pi + 4\pi}{3} \right) = 4 \left(\cos \frac{11\pi}{9} + i \sin \frac{11\pi}{9} \right).$$

3. Показательная форма комплексного числа.

Рассмотрим показательную функцию $w = e^z$; $z = x + iy$.

Можно показать, что функция w может быть записана в виде:

$$w = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y).$$

Данное равенство называется *уравнением Эйлера*. Вывод этого уравнения рассмотрен не будет.

Для комплексных чисел справедливы следующие свойства, которые основываются на свойствах показательных выражений:

$$1) e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2};$$

$$2) e^{z_1-z_2} = \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}};$$

$$3) (e^z)^m = e^{mz}; \text{ где } m - \text{целое число.}$$

Если в уравнении Эйлера показатель степени принять за чисто мнимое число ($x=0$), то получим:

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y.$$

Для комплексно – сопряженного числа получим:

$$e^{-iy} = \cos y - i \sin y.$$

Из этих двух уравнений выражаем $\cos y$ и $\sin y$:

$$\begin{cases} \cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} \\ \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \end{cases}$$

Этими формулами пользуются для нахождения значений степеней тригонометрических функций через функции кратных углов.

Рассмотрим комплексное число в тригонометрической форме:

$$z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Для правой части этого равенства воспользуемся формулой Эйлера:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi.$$

Получим

$$z = r e^{i\varphi} \text{ или } z = |z| e^{i \operatorname{Arg} z}$$

Полученное равенство и есть *показательная форма комплексного числа*.

Рассмотрим примеры действий с комплексными числами.

Пример 10. Представить в показательной форме комплексное число $z = -1 - i$ (см. рис. 3.5)

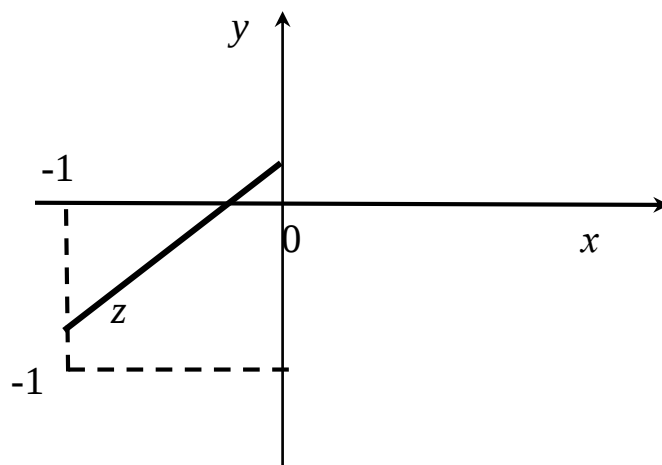


Рис. 3. 5. Комплексное число $z = -1 - i$.

Решение. Показательная форма комплексного числа имеет вид $z = |z| e^{i \operatorname{Arg} z}$. Найдём $\operatorname{Arg} z$ и $|z|$ по формулам, рассмотренным выше.

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2},$$

$$\arg z = \operatorname{arctg} \frac{-1}{-1} + \pi = \operatorname{arctg} 1 - \pi = \frac{\pi}{4} - \pi = -\frac{3}{4} \pi, \text{ т.к. число лежит в III}$$

четверти. Хотя из рис. 1.6 сразу видно, что $\arg z = -\frac{3}{4}\pi$. Тогда

$$z = -1 - i = |z|e^{Argz} = \sqrt{2}e^{\left(-\frac{3}{4}\pi + 2k\pi\right)i}$$

Пример 11. Вычислить $e^{i\pi}$.

Решение. По формуле Эйлера

$$e^{i\pi} = \cos \pi + i \sin \pi = -1 + i \cdot 0 = -1.$$

Задачи для решения в аудитории

1. Выполнить действия:

$$1) (2 + 3i) \cdot (2 - 3i); 2) (3 - 2i)^2; 3) (2 + i)^3; 4) \frac{1+i}{1-i}; 5) \frac{2i}{1+i}.$$

2. Следующие комплексные числа изобразить векторами на плоскости и представить в тригонометрической форме записи:

$$1) z = 2 - 2i; 2) z = 1 + i \cdot \sqrt{3}; 3) z = -\sqrt{3} - i; 4) z = -2; 5) z = -2i.$$

Ответы

$$1. 1) z = 12 + 5i; 2) z = 5 - 12i; 3) z = -2 + 2i; 4) z = i; 5) z = 1 + i.$$

$$2. 1) z = 2\sqrt{2}\left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4}\right); 2) z = 2\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right);$$

$$3) z = 2\left(\cos \frac{5\pi}{6} - i \sin \frac{5\pi}{6}\right); 4) z = 2(\cos \pi + i \sin \pi);$$

$$5) z = 2\left(\cos \frac{\pi}{2} - i \sin \frac{\pi}{2}\right).$$

Индивидуальные задания

Выполнить указанные действия:

$$1. \quad (i)^{43} + \frac{2}{2+3i};$$

$$2. \quad (2-4i)^2 + \frac{4+2i}{i};$$

3. $(i)^{12} + \frac{2+i}{3-i};$
4. $\frac{3-4i}{4+3i} + 3 + (i)^{17};$
5. $\frac{2i+7}{2+i} + (i)^7;$
6. $(i)^{22} + \frac{7+5i}{1-2i};$
7. $\frac{7-5i}{1-2i} + i(1-i);$
8. $\frac{7-2i}{2+i} + (i)^{11};$
9. $\frac{5}{1+2i} + (i)^{18};$
10. $\frac{1+i}{1-i} + (i)^4;$
11. $-\frac{12}{5i} + i(2+i)^2;$
12. $(i)^{23} - \frac{17-6i}{3-4i};$
13. $\frac{4}{1+\sqrt{3}i} + \frac{\sqrt{3}}{i};$
14. $(3i+2) \cdot (-i)^9 + \frac{i+1}{i-1};$
15. $(1+2i) \cdot (i)^{21} + \frac{5-i}{i};$
16. $(0,2-0,3i) \cdot (0,5+0,6i) + (i)^{26};$
17. $(3+\sqrt{3}i) \cdot (3-\sqrt{3}i) + (i)^{33};$
18. $\frac{1+i}{1-i} + \frac{1-i}{1+i};$
19. $(i)^{37} + \frac{7+5i}{1-2i};$
20. $(i)^{25} - \frac{3-4i}{4-3i};$
21. $\frac{32}{1+3\sqrt{3}i} - \frac{3\sqrt{7}}{2i};$
22. $\frac{1-i^2}{(1+i)^2} + 3+i;$

23. $(i)^{44} - \frac{1-i}{i}$;
24. $(-0,5 - 0,5\sqrt{3}i)^2 + 0,5\sqrt{3}(i)^{35}$;
25. $\left(\frac{1+\sqrt{7}i}{2}\right)^4$;
26. $(2 - \sqrt{2}i)^2 + \frac{1+i}{i}$;
27. $(i)^{17} + \frac{2i}{(3-i)}$;
28. $\frac{(2-i)}{3+i} \cdot (1+i^6) + (\sqrt{2} - \sqrt{2}i)^2$;
29. $\frac{(i)^{13} \cdot (i-1)}{2+i} + 1$;
30. $(i)^{15} + \frac{6(i+1)^2}{2-i}$.

Вопросы и задания для самопроверки

1. Дайте определение комплексного числа и его геометрическую иллюстрацию на плоскости.
2. Как определяются модуль и аргумент комплексного числа?
3. Какие три формы записи комплексных чисел вы знаете: (алгебраическая, тригонометрическая и показательная)?
4. Как выполняются сложение и вычитание комплексных чисел?
5. По каким правилам выполняют умножение и деление комплексных чисел?
6. Какая формула применяется для возведения комплексного числа в натуральную степень?
7. Как извлекается корень n -й степени из комплексного числа? Сколько будет при этом различных значений корня?

§3. Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Определение. *Линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами называется уравнение вида [4]*

$$y'' + py' + qy = 0, \quad (3.14)$$

где p и q – постоянные величины.

Теорема Коши для линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами (3.14) формируется следующим образом.

Теорема Коши. При любых начальных данных $(x_0; y_0; y'_0)$ задача Коши имеет, причем единственное, решение, т.е. при любых начальных данных x_0, y_0, y'_0 существует, причем единственное, решение уравнения (1.35), удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0$.

Определение. Два частных решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ уравнения (2.35) образуют *фундаментальную систему решений*, если для любого x

$$W(x) = y_1(x) \cdot y'_2(x) - y'_1(x) \cdot y_2(x) \neq 0. \quad (3.15)$$

Определение. Выражение $W(x)$ называется определителем Вронского, или вронскианом, решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$.

Пример 1. Известно, что функции $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = e^x$ и $y_3 = 5e^{2x}$ являются частными решениями уравнения $y'' - 3y' + 2y = 0$.

Доказать, что решение y_1 и y_2 образуют фундаментальную систему решений, а y_1 и y_3 не образуют.

Решение. $y'_1 = 2e^{2x}$, $y'_2 = e^x$, $y'_3 = 5 \cdot 2e^{2x}$.

Найдем вронскиан пары решений y_1 и y_2 :

$$\begin{aligned} W_1(x) &= y_1(x) \cdot y'_2(x) - y'_1(x) \cdot y_2(x) = \\ &= e^{2x} \cdot e^x - 2e^{2x} \cdot e^x = -e^{3x} \neq 0. \end{aligned}$$

Найдем вронскиан пары решений y_1 и y_3

$$\begin{aligned} W_2(x) &= y_1(x) \cdot y'_3(x) - y'_1(x) \cdot y_3(x) = \\ &= e^{2x} \cdot 10e^{2x} - 2e^{2x} \cdot 5e^{2x} = 10e^{4x} - 10e^{4x} = 0. \end{aligned}$$

Вронскиан $W_1(x) \neq 0$, следовательно, $y_1(x)$ и $y_2(x)$ образуют фундаментальную пару решений.

Вронскиан $W_2(x) = 0$, следовательно, $y_1(x)$ и $y_3(x)$ не образуют фундаментальную пару решений.

Теорема (о структуре общего решения). Если два частных решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами образуют фундаментальную систему, то общее решение этого уравнения имеет вид

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2, \quad (3.16)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные.

Выражение $C_1 y_1 + C_2 y_2$ называется *линейной комбинацией функций* $y_1(x)$ и $y_2(x)$.

Доказательство: докажем, что функция (3.16) является решением уравнения (3.14). Для этого подставим в уравнение (3.14) вместо линейную комбинацию (3.16) и докажем, что оно превращается в тождество. Так как y_1, y_2 являются решениями уравнения (3.14), то

$$y_1'' + p y_1' + q y_1 = 0 \text{ и } y_2'' + p y_2' + q y_2 = 0. \quad (3.17)$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} & (C_1 y_1 + C_2 y_2)'' + p(C_1 y_1 + C_2 y_2)' + q(C_1 y_1 + C_2 y_2) = \\ & = C_1 y_1'' + C_2 y_2'' + p C_1 y_1' + p C_2 y_2' + q C_1 y_1 + q C_2 y_2 = \\ & = C_1 (y_1'' + p y_1' + q y_1) + C_2 (y_2'' + p y_2' + q y_2) = 0. \end{aligned}$$

А это означает, что функция (3.16) является решением уравнения (3.14).

Теперь докажем, что формула (3.16) представляет общее решение уравнения (3.14). Для этого надо показать, что любое решение уравнения (3.14) можно получить из формулы (3.16) при некоторых значениях постоянных C_1 и C_2 . Пусть $y = \varphi(x)$ — какое-либо частное решение уравнения (3.14). Пусть, далее, x_0 некоторое число из области определения решения $y = \varphi(x)$; обозначим $\varphi(x_0) = y_0$, $\varphi'(x_0) = y_0'$. Отсюда следует, что решение $y = \varphi(x)$ удовлетворяет начальным условиям с начальными данными (x_0, y_0, y_0') . Осталось показать, что решение $y = \varphi(x)$ может быть получено из формулы (3.16) при надлежащих значениях $C_1 = C_{10}$ и $C_2 = C_{20}$. Для этого рассмотрим систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} y_0 = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x), \\ y'_0 = C_1 y'_1(x) + C_2 y'_2(x), \end{cases} \quad (3.18)$$

где $y_1(x)$ и $y_2(x)$ – решение из данной фундаментальной системы решений, (x_0, y_0, y'_0) – полученные выше начальные данные; C_1 и C_2 – неизвестные, которые предстоит определить. Умножая первое уравнение из (3.18) на $y'_2(x_0)$, второе – на $y_2(x_0)$ и вычитая второе уравнение из первого, получим

$$\begin{aligned} & (y_1(x_0) \cdot y'_2(x_0) - y'_1(x_0) \cdot y_2(x_0)) \cdot C_1 = \\ & = y_0 \cdot y'_2(x_0) - y'_0 \cdot y_2(x_0), \end{aligned}$$

или $W(x_0) \cdot C_1 = y_0 \cdot y'_2(x_0) - y'_0 \cdot y_2(x_0)$,
откуда ввиду того, что $W(x_0) \neq 0$, найдем

$$C_1 = C_{10} = \frac{y_0 \cdot y'_2(x_0) - y'_0 \cdot y_2(x_0)}{W(x_0)}.$$

Аналогично получаем

$$C_2 = C_{20} = -\frac{y_0 \cdot y'_1(x_0) - y'_0 \cdot y_1(x_0)}{W(x_0)}.$$

Рассмотрим сейчас частное решение, которое получается из (3.16), если взять $C_1 = C_{10}$ и $C_2 = C_{20}$: $y(x) = C_{10} \cdot y_1(x) + C_{20} \cdot y_2(x)$. Ввиду (3.18) составленное решение $y(x)$ удовлетворяет начальным условиям с начальными данными (x_0, y_0, y'_0) , т.е. $y(x_0) = \varphi(x_0)$, $y'(x_0) = \varphi'(x_0)$.

Следовательно, согласно теореме Коши о единственности решения, удовлетворяющего данным начальным условиям, имеем

$$\varphi(x) = y(x) = C_{10} \cdot y_1 + C_{20} \cdot y_2. \quad (3.19)$$

Найдем решение линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

Для нахождения общего решения уравнения (3.14) достаточно найти два его частных решения, образующих фундаментальную систему.

Будем искать эти частные решения уравнений (3.14) в виде

$$y = e^{kx}, \quad (3.20)$$

где $k = \text{const}$; тогда

$$y' = ke^{kx}, \quad y'' = k^2 \cdot e^{kx}.$$

Подставим выражение для y, y' и y'' в уравнение (3.14), получим

$$k^2 e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0, \text{ т.е. } e^{kx}(k^2 + pk + q) = 0.$$

Так как $e^{kx} \neq 0$, то

$$k^2 + pk + q = 0. \quad (3.21)$$

Определение. Уравнение (3.21) называется *характеристическим уравнением* линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Для составления характеристического уравнения (3.21) достаточно в уравнении (1.35) заменить y'' , y' и y соответственно на k^2 , k и 1.

Решив характеристическое уравнение по формуле: $k_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$, найдем его корни k_1 и k_2 , а следовательно, и частные решения уравнения (3.14):

$$y_1 = e^{k_1 x}, \quad y_2 = e^{k_2 x}. \quad (3.22)$$

При решении характеристического уравнения возможны три случая.

Случай 1. *Корни характеристического уравнения действительны и различны.*

В этом случае имеем два частных решения уравнения (3.14):

$$y_1 = e^{k_1 x} \text{ и } y_2 = e^{k_2 x}.$$

Покажем, что эти решения образуют фундаментальную систему решений. Для этого рассмотрим вронскиан:

$$W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) = e^{k_1x}k_2e^{k_2x} - k_1e^{k_1x}e^{k_2x} = k_2e^{(k_1+k_2)x} - k_1e^{(k_1+k_2)x} = e^{(k_1+k_2)x}(k_2 - k_1) \neq 0,$$

т.е. $e^{(k_1+k_2)x} \neq 0$ и $k_2 \neq k_1$.

Следовательно, в этом случае решение общего уравнения (3.14) имеет вид

$$y = C_1e^{k_1x} + C_2e^{k_2x}. \quad (3.23)$$

Случай 2. *Корни характеристического уравнения действительны и равны: $k_1 = k_2 = k$.*

В этом случае непосредственно находим лишь одно частное решение: $y_2 = xe^{kx}$.

Вторым частным решением является решение $y_2 = xe^{kx}$. Действительно, $y_2' = (xe^{kx})' = x'e^{kx} + x(e^{kx})' = e^{kx} + xke^{kx} = e^{kx}(1 + kx)$,

$$y_2'' = (e^{kx})'(1 + kx) + e^{kx}(1 + kx)' = ke^{kx}(1 + kx) + e^{kx}k = e^{kx}(2k + k^2x).$$

Подставим выражение для y , y' и y'' в уравнение (3.14), получим

$$e^{kx}(2k + k^2x) + pe^{kx}(1 + kx) + qxe^{kx} = e^{kx}[x(k^2 + pk + q) + 2k + p] = 0.$$

Так как k является корнем характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$, корни квадратного трехчлена находятся по формуле

$$k_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

Если $k_1 = k_2 = k$, то $p^2 - 4q = 0$, т.е. $k = -\frac{p}{2}$ или $2k + p = 0$.

Покажем, что $y_1 = e^{kx}$ и $y_2 = xe^{kx}$ образуют фундаментальную систему решений. Для этого рассмотрим вронскиан:

$$\begin{aligned} W(x) &= y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) = e^{kx}e^{kx}(1+kx) = \\ &= e^{2kx}[1+kx-kx] = e^{2kx} \neq 0. \end{aligned}$$

Таким образом, в этом случае общее решение уравнения (3.14) имеет вид

$$y = e^{kx}(C_1 + C_2x). \quad (3.24)$$

Случай 3. Корни характеристического уравнения комплексные:

$$k_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}, \quad p^2 - 4q < 0.$$

$$\text{Тогда } k_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{i^2(4q - p^2)}}{2} = -\frac{p}{2} \pm \frac{i\sqrt{4q - p^2}}{2}.$$

$$\text{Обозначив } a = \frac{-p}{2} \quad \text{и} \quad b = \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2}, \quad \text{получим: } k_1 = a + bi \quad \text{и} \\ k_2 = a - bi \quad (b \neq 0).$$

В этом случае $y_1 = e^{ax} \cos bx$ и $y_2 = e^{ax} \sin bx$ являются решениями уравнения (3.14) и, вычисляя вронскиан, убедимся, что они составляют фундаментальную систему. Действительно,

$$\begin{aligned} y_1' &= (e^{ax})' \cdot \cos bx + e^{ax} \cdot (\cos bx)' = a \cdot e^{ax} \cdot \cos bx + \\ &+ e^{ax} \cdot (-\sin bx) \cdot b = e^{ax} \cdot (a \cdot \cos bx - b \cdot \sin bx). \\ y_2' &= (e^{ax})' \cdot \sin bx + e^{ax} \cdot (\sin bx)' = a \cdot e^{ax} \cdot \sin bx + \\ &+ e^{ax} \cdot \cos bx \cdot b = e^{ax} (a \cdot \sin bx + b \cdot \cos bx). \end{aligned}$$

Подставим выражения для $y_1(x)$, $y_1'(x)$, $y_2(x)$ и $y_2'(x)$ в вронскиан (1.36), получим:

$$\begin{aligned} W(x) &= y_1 y_2' - y_1' y_2 = e^{ax} \cos bx e^{ax} (a \sin bx + b \cos bx) - \\ &- e^{ax} (a \cos bx - b \sin bx) e^{ax} \sin bx = e^{2ax} \cos bx (a \sin bx + b \cos bx) - \\ &- e^{2ax} \sin bx (a \cos bx - b \sin bx) = e^{2ax} (a \cos bx \sin bx + b \cos^2 bx - \\ &- a \sin bx \cos bx + b \sin^2 bx) = e^{2ax} b (\cos^2 bx + \sin^2 bx) = e^{2ax} b \neq 0. \end{aligned}$$

При вычислении воспользовались основным тригонометрическим тождеством: $\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1$.

Таким образом, общее решение уравнения (3.14) в случае комплексных корней характеристического уравнения имеет вид

$$y = C_1 e^{ax} \cos bx + C_2 e^{ax} \sin bx, \text{ или}$$

$$y = e^{ax} (C_1 \cos bx + C_2 \sin bx). \quad (3.25)$$

Рассмотрим примеры решения дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Пример 2. Найти частное решение уравнения $y'' + 7y' + 12y = 0$ удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$.

Решение. Составим характеристическое уравнение, заменив y'' , y' , y на k^2 , k , 1 соответственно, получим $k^2 + 7k + 12 = 0$.

Корни найдем по формуле $k_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4 \cdot 12}}{2} = \frac{-7 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{-7 \pm 1}{2}$, откуда $k_1 = -3$ и $k_2 = -4$.

Подставляя найденные значения k_1 и k_2 в формулу (3.23), получим общее решение $y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-4x}$.

Дифференцируя общее решение, получим

$$y' = C_1 e^{-3x} (-3) + C_2 e^{-4x} (-4) = -3C_1 e^{-3x} - 4C_2 e^{-4x}.$$

Согласно заданным начальным условиям имеем

$$\begin{cases} 1 = C_1 e^{-3 \cdot 0} + C_2 e^{-4 \cdot 0} \\ -2 = -3C_1 e^{-3 \cdot 0} - 4C_2 e^{-4 \cdot 0} \end{cases}, \text{ или } \begin{cases} 1 = C_1 + C_2 \\ -2 = -3C_1 - 4C_2 \end{cases},$$

$$\text{или } \begin{cases} C_2 = 1 - C_1 \\ -2 = -3C_1 - 4(1 - C_1) \end{cases}, \text{ или } \begin{cases} C_2 = 1 - C_1 \\ 2 = C_1 \end{cases}, \text{ откуда}$$

$C_1 = 2$ и $C_2 = -1$. Таким образом, искомым частным решением является функция

$$y = 2e^{-3x} - e^{-4x}.$$

Пример 3. Найти решение уравнения $y'' - y' - 6y = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение, заменив y'' , y' , y на k^2 , k , 1 соответственно, получим $k^2 - k - 6 = 0$.

Корни найдем по формуле $k_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 6}}{2} = \frac{1 \pm 5}{2}$, откуда $k_1 = 3$ и $k_2 = -2$. Подставляя найденные значения k_1 и k_2 в формулу (3.23), получим общее решение $y = C_1 \cdot e^{3x} + C_2 \cdot e^{-2x}$.

Пример 4. Найти решение уравнения $y'' + 8y' + 16y = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение, заменив y'' , y' , y на k^2 , k , 1 соответственно, получим $k^2 + 8k + 16 = 0$.

Корни найдем по формуле $k_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{64 - 4 \cdot 16}}{2} = \frac{-8 \pm 0}{2} = -4$, откуда $k_1 = k_2 = -4$. Подставляя найденные значения k в формулу (1.45), получим общее решение

$$y = e^{-4x} \cdot (C_1 + C_2 \cdot x).$$

Пример 5. Найти решение уравнения $y'' + 9y = 0$.

Решение. Составим характеристическое уравнение $k^2 + 9 = 0$
 $k^2 = -9$; $k_{1,2} = \pm \sqrt{-9} = \pm \sqrt{9 \cdot (-1)} = \pm 3 \cdot i$. Уравнение имеет комплексные корни $k_{1,2} = \pm 3i$ ($a = 0$; $b = 3$).

По формуле (1.46) общим решением будет

$$y = e^{0x} (C_1 \cdot \cos 3x + C_2 \sin 3x),$$

или $y = C_1 \cdot \cos 3x + C_2 \cdot \sin 3x$.

Пример 6. Найти частное решение уравнения $y'' - 6y' + 10y = 0$, удовлетворяющее начальным условиям: $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.

Решение. Составим характеристическое уравнение $k^2 - 6k + 10 = 0$.

Корни найдем по формуле
 $k_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 4 \cdot 10}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{6 \pm 2i}{2} = 3 \pm i$. ($a = 3$; $b = 1$).

По формуле (2.46) общим решением будет

$$y = e^{3x} \cdot (C_1 \cdot \cos x + C_2 \cdot \sin x).$$

Дифференцируя общее решение, получим
 $y' = 3e^{3x}(C_1 \cdot \cos x + C_2 \sin x) + e^{3x}(-C_1 \cdot \sin x + C_2 \cdot \cos x).$

Подставив начальные условия $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$ получим систему для определения C_1 и C_2 :

$$\begin{cases} 1 = e^0 \cdot (C_1 \cdot \cos 0 + C_2 \cdot \sin 0), \\ 3 = 3 \cdot e^0 (C_1 \cdot \cos 0 + C_2 \cdot \sin 0) + e^0 (-C_1 \cdot \sin 0 + C_2 \cdot \cos 0), \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 1 = 1 \cdot (C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0), \\ 3 = 3 \cdot 1 (C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0) + 1(-C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1), \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 1 = C_1; & C_1 = 1. \\ 3 = 3C_1 + C_2; & C_2 = 0. \end{cases}$$

Подставив полученные значения $C_1 = 1$, $C_2 = 0$ в общее решение, получим $y = e^{3x} \cdot \cos x$ – искомое частное решение.

Задачи для решения в аудитории

Найти решения уравнений. В тех задачах, в которых заданы начальные условия, найти решения, удовлетворяющие этим условиям.

- | | |
|---|---|
| 1. $y'' + y' - 2y = 0;$ | 2. $y'' - 2y' = 0;$ |
| 3. $y'' - 4y' + 5y = 0;$ | 4. $y'' + 4y = 0;$ |
| 5. $y'' - 2y' + y = 0$ при
$y(0) = 4, y'(0) = -3;$ | 6. $y'' + 2y' + 2y = 0$ при
$y(0) = 0, y'(0) = -1;$ |
| 7. $y'' - 8y' + 15y = 0$ при
$y(0) = 2, y'(0) = 8;$ | 8. $y'' - 2y' + 5y = 0$ при
$y(0) = 1, y'(0) = 3;$ |
| 9. $y'' + 16y = 0$, при
$y(0) = 1, y'(0) = 4;$ | 10. $y'' - 6y' + 9y = 0$ при
$y(0) = 2, y'(0) = 7;$ |
| 11. $y'' + 5y' + 6y = 0$, при
$y(0) = 3, y'(0) = -8;$ | 12. $y'' + 4y + 4 = 0;$ |
| 13. $y'' + 9y = 0;$ | 14. $y'' - 6y' + 10y = 0$ при
$y(0) = 1, y'(0) = 3;$ |
| 15. $y'' - y' - 6y = 0;$ | 16. $y'' - 7y' + 10 = 0;$ |

$$17. \quad y'' + 8y' + 16y = 0;$$

$$18. \quad y'' - 6y' + 8y = 0.$$

Ответы

$$1. y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x}. \quad 2. y = C_1 + C_2 e^{2x}. \quad 3. y = e^{2x} (C_1 \cos x + C_2 \sin x).$$

$$4. y = (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x). \quad 5. y = 4e^x - 7e^x \cdot x. \quad 6. y = -e^{-x} \cdot \sin x.$$

$$7. y = e^{3x} + e^{5x}. \quad 8. y = e^x (\cos 2x + \sin 2x). \quad 9. y = \cos 4x + \sin 4x.$$

$$10. y = 2 \cdot e^{3x} + e^{3x} \cdot x. \quad 11. y = e^{-2x} + 2 \cdot e^{-3x}. \quad 12. y = e^{-2x} \cdot (C_1 + C_2 \cdot x).$$

$$13. y = C_1 \cdot \cos 3x + C_2 \cdot \sin 3x. \quad 14. y = e^{3x} \cdot \cos x.$$

$$15. y = C_1 \cdot e^{3x} + C_2 \cdot e^{-2x}. \quad 16. y = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot e^{5x}.$$

$$17. y = e^{-4x} \cdot (C_1 + C_2 \cdot x). \quad 18. y = C_1 \cdot e^{4x} + C_2 \cdot e^{2x}.$$

Индивидуальные задания

Найти решения уравнений. В тех задачах, в которых заданы начальные условия, найти решения, удовлетворяющие этим условиям.

3.1. а) $y'' + 5y' + 6y = 0$, если $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$;

б) $y'' + 16y = 0$;

в) $y'' + 6y' + 9y = 0$.

3.2. а) $y'' - 2y' = 0$, если $y(0) = \frac{3}{2}$, $y'(0) = 1$;

б) $y'' + 8y' + 16y = 0$;

в) $y'' + 6y' + 25y = 0$.

3.3. а) $y'' + 8y' + 15y = 0$, если $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$;

б) $y'' + 2y' + 5y = 0$, если $y(0) = y'(0) = 1$;

в) $y'' - 10y' + 25y = 0$.

3.4. а) $y'' + 3y' = 0$;

б) $y'' + 9y = 0$, если $y(0) = 1$, $y'(0) = 6$;

в) $y'' + 12y' + 36y = 0$.

3.5. а) $y'' + 14y' + 49y = 0$;

б) $y'' + 4y' = 0$, если $y(0) = y'(0) = 1$;

в) $y'' - 4y' + 4y = 0$.

3.6. а) $y'' + 4y = 0$;

- б) $y'' - 2y' - 8y = 0$;
- в) $y'' - 8y' + 16y = 0$, если $y(0) = y'(0) = 1$.
- 3.7. а) $y'' + 3y' + 2y = 0$, если $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$;
- б) $y'' + 8y' + 16y = 0$, если $y(0) = y'(0) = 1$;
- в) $y'' + 16y = 0$.
- 3.8. а) $y'' + 2y' + 5 = 0$, если $y(0) = y'(0) = 1$;
- б) $y'' - 2y = 0$;
- в) $y'' - 14y' + 49y = 0$.
- 3.9. а) $y'' - y = 0$, если $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$;
- б) $y'' + 64y = 0$;
- в) $y'' - 20y' + 100y = 0$.
- 3.10. а) $y'' - 8y' + 20y = 0$, если $y(0) = 2$, $y'(0) = 8$;
- б) $y'' - 7y' + 12y = 0$;
- в) $y'' - 2y' + y = 0$.
- 3.11. а) $y'' + 3y' - 4y = 0$;
- б) $y'' + 2y' + 5y = 0$, если $y(0) = y'(0) = 1$;
- в) $y'' - y' + \frac{1}{4}y = 0$.
- 3.12. а) $y'' - 9y' + 14y = 0$;
- б) $y'' - y = 0$;
- в) $y'' - 10y' + 25y = 0$, если $y(0) = 2$, $y'(0) = 8$.
- 3.13. а) $y'' + 3y' + 2y = 0$, если $y(0) = -1$, $y'(0) = 3$;
- б) $y'' + 9y = 0$;
- в) $y'' + 22y' + 121y = 0$.
- 3.14. а) $y'' - y = 0$;
- б) $y'' - 6y' + 45y = 0$;
- в) $y'' + 6y' + 9y = 0$, если $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$.
- 3.15. а) $y'' - 2y' + 2y = 0$, если $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$;
- б) $y'' + 2y' = 0$;
- в) $y'' + 2y' + y = 0$.
- 3.16. а) $y'' + 6y' + 8y = 0$, если $y(0) = y'(0) = 1$;
- б) $y'' + 16y = 0$;

- в) $y'' + y' + \frac{1}{4}y = 0$.
- 3.17. а) $y'' + 4y' + 8y = 0$;
 б) $y'' - 9y = 0$, если $y(0) = 2$, $y'(0) = 6$;
 в) $9y'' + 6y' + 1 = 0$.
- 3.18. а) $y'' - y' - 2y = 0$, если $y(0) = 3$, $y'(0) = 0$;
 б) $16y'' + 8y' + y = 0$;
 в) $y'' + 25y = 0$.
- 3.19. а) $y'' - 8y' + 7 = 0$, если $y(0) = y'(0) = 1$;
 б) $y'' + 16y = 0$;
 в) $25y'' - 10y' + y = 0$.
- 3.20. а) $y'' - 5y' + 4y = 0$, если $y(0) = y'(0) = 1$;
 б) $49y'' + 14y' + y = 0$;
 в) $y'' + 121y = 0$.
- 3.21. а) $y'' + 2y' - y = 0$;
 б) $y'' + 6y' + 9y = 0$, если $y(0) = y'(0) = 1$;
 в) $y'' - 2y' + 2y = 0$.
- 3.22. а) $2y'' - 3y' - 5y = 0$;
 б) $y'' + 4y = 0$, если $y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$, $y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2$;
 в) $64y'' - 16y' + y = 0$.
- 3.23. а) $y'' + 6y' + 5y = 0$, если $y(0) = y'(0) = 1$;
 б) $y'' + 81y = 0$;
 в) $4y'' + 4y' + y = 0$.
- 3.24. а) $y'' + 8y' + 7y = 0$, если $y(0) = y'(0) = 1$;
 б) $y'' + 4y = 0$;
 в) $16y'' + 8y' + y = 0$.
- 3.25. а) $y'' + y' = 0$, если $y(0) = y'(0) = 1$;
 б) $y'' + 16y = 0$;
 в) $y'' + 26y' + 169y = 0$ 3.25.

§4. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Линейное неоднородное уравнение отличается от однородного уравнения функцией в правой части. Линейное неоднородное уравнение имеет вид

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = f(x), \quad (3.26)$$

а соответствующее ему линейное однородное уравнение

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = 0,$$

которое, как известно, решается с помощью характеристического уравнения

$$k^2 + pk + q = 0.$$

Сформулируем теорему о структуре общего решения неоднородного уравнения (3.26).

Теорема (о структуре общего решения). Общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения равно сумме какого-либо частного решения этого уравнения и общего решения соответствующего однородного уравнения.

Пусть y – общее решение уравнения $y'' + p \cdot y' + q \cdot y = f(x)$,
 $y_{\text{ч}}$ – какое-либо частное решение неоднородного уравнения, y_0 – общее решение соответствующего однородного уравнения.

Тогда

$$y = y_0 + y_{\text{ч}}.$$

Таким образом, основная задача при решении неоднородного линейного дифференциального уравнения второго порядка состоит в нахождении какого-либо частного решения.

На практике удобно применять метод *неопределенных коэффициентов*.

Метод неопределенных коэффициентов

Этот метод иначе называется методом подбора частного решения $y_{\text{ч}}$ – уравнения (3.26) по виду правой части $f(x)$ [6].

Пусть правая часть $f(x)$ уравнения (3.26) имеет вид $f(x) = P_n(x) \cdot e^{\alpha x}$, т. е. представляет собой произведение экспоненты на многочлен, где $\alpha - \text{const}$; $P_n(x)$ – многочлен n -й относительно x . В этом случае уравнение примет вид

$$y'' + p \cdot y' + q \cdot y = P_n(x) \cdot e^{\alpha x}. \quad (3.27)$$

Тогда возможны следующие варианты.

1) Число α не является корнем характеристического уравнения

$$k^2 + pk + q = 0.$$

Тогда частное решение нужно искать в виде $y_{\text{ч}} = Q_n(x) \cdot e^{\alpha x}$, где $Q_n(x)$ – многочлен той же степени, что и данный многочлен $P_n(x)$, но с неопределенными коэффициентами.

2) Число α есть простой (однократный) корень характеристического уравнения (т. е. α совпадает с одним корнем характеристического уравнения). В этом случае частное решение нужно искать в виде $y_{\text{ч}} = Q_n(x) \cdot e^{\alpha x} \cdot x$.

3) Число α есть двукратный корень характеристического уравнения (т. е. α совпадает с двумя равными корнями характеристического уравнения). В этом случае частное решение нужно искать в виде $y_{\text{ч}} = Q_n(x) \cdot e^{\alpha x} \cdot x^2$. Неизвестные (неопределенные) коэффициенты многочлена $Q_n(x)$ находим из условия, что функция $y_{\text{ч}}$ является решением уравнения (3.27), т. е. удовлетворяет этому уравнению.

Пусть правая часть $f(x)$ уравнения (3.27) имеет вид

$$f(x) = M \cdot \cos \beta x + N \cdot \sin \beta x,$$

где M и N – постоянные числа. Тогда вид частного решения $y_{\text{ч}}$ определяется следующим образом.

а) Если число βi не есть корень характеристического уравнения, то частное решение $y_{\text{ч}}$ имеет вид

$$y_{\text{ч}} = A \cdot \cos \beta x + B \cdot \sin \beta x,$$

где A и B – постоянные неопределенные коэффициенты.

б) Если число βi есть корень характеристического уравнения, то

$$y_{\text{ч}} = (A \cdot \cos \beta x + B \cdot \sin \beta x) \cdot x.$$

Сделаем важное замечание. Даже тогда, когда в правой части уравнения стоит выражение, содержащее только $\cos \beta x$ или только $\sin \beta x$, следует искать частное решение в том виде, в каком оно было указано,

т. е. с синусом и косинусом. Иными словами, из того, что правая часть не содержит $\cos \beta x$ или $\sin \beta x$, не следует, что частное решение уравнения не содержит этих функций.

На основании вышеизложенного можно составить таблицу, которой удобно пользоваться при решении дифференциальных уравнений:

Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами $y'' + py' + qy = 0$. Заменить y'', y' и y соответственно на k^2, k и 1. $k^2 + pk + q = 0$ (*). Найти $k_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$.		
Случай 1. Корни характеристического уравнения действительны и различны	$k_2 \neq k_1$	$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$
Случай 2. Корни характеристического уравнения действительны и равны	$k_1 = k_2 = k$	$y = e^{kx} (C_1 + C_2 x)$
Случай 3. Корни характеристического уравнения комплексные:	$p^2 - 4q < 0$ Введем $i^2 = -1$. Тогда $p^2 - 4q = i^2 (4q - p^2)$ или $k_{1,2} = a \pm bi$	$y = e^{ax} (C_1 \cos bx + C_2 \sin bx)$
Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами $y'' + py' + qy = f(x)$, $y = y_u + y_o$, y_o – решение однородного уравнения, y_u – частное решение неоднородного.		
Случай 1. $f(x) = P_n(x) \cdot e^{ax}$	$a \neq k_1, a \neq k_2$	$y_u = Q_n(x) \cdot e^{ax}$
	$a = k_2 \neq k_1$	$y_u = x \cdot Q_n(x) \cdot e^{ax}$
	$a = k_2 = k_1$	$y_u = x^2 \cdot Q_n(x) \cdot e^{ax}$
Случай 2. $f(x) = e^{ax} (P_n(x) + Q_n(x))$	$z = a + bi$ не является корнем характеристического уравнения (*)	$y_u = e^{ax} (S_n(x) \cos bx + T_n(x) \sin bx)$
	$z = a + bi$ является корнем характеристического уравнения (*)	$y_u = x e^{ax} (S_n(x) \cos bx + T_n(x) \sin bx)$

Рассмотрим примеры, на которых покажем не только принцип применения метода, но и *порядок оформления* решения.

Пример 2. Найти общее решение уравнения

$$y'' + 7y' + 12y = 24x^2 + 16x - 15.$$

Решение

1) Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$k^2 + 7k + 12 = 0.$$

$$k_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 48}}{2} = \frac{-7 \pm 1}{2}.$$

$$k_1 = -3; \quad k_2 = -4.$$

2) Запишем общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения по формуле $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$:

$$y_0 = C_1 \cdot e^{-3x} + C_2 \cdot e^{-4x}.$$

3) Запишем формулу, по которой следует искать частное решение y_q данного уравнения. Для этого сравним правую часть уравнения $f(x) = 24x^2 + 16x - 15$ с общим видом правой части:

$$f(x) = e^{\alpha x} \cdot P_n(x).$$

$24x^2 + 16x - 15$ – многочлен второй степени с коэффициентами 24; 16; -15.

В данном случае показательная функция $e^{\alpha x} = 1$, т. е. $\alpha = 0$. Так как $\alpha = 0$ не совпадает ни с одним из корней характеристического уравнения ($k_1 = -3$; $k_2 = -4$), частное решение нужно искать в виде $y_q = Ax^2 + Bx + C$.

$Q_n(x) = Ax^2 + Bx + C$ – многочлен второй степени ($n = 2$), неизвестные (неопределенные) коэффициенты A , B , C этого многочлена нужно найти, подставив выражения y_q , y_q' , y_q'' в данное уравнение.

4) Запишем y_q , y_q' , y_q'' столбиком:

$$\begin{array}{l|l} 12 & y_q = Ax^2 + Bx + C; \\ 7 & y_q' = 2Ax + B; \\ 1 & y_q'' = 2A \end{array}$$

Слева указаны коэффициенты 12, 7, 1, на которые следует умножить y_q , y_q' , y_q'' , чтобы получить левую часть уравнения $y'' + 7y' + 12y = 24x^2 + 16x - 15$. В левой части получим многочлен

второй степени с неопределенными коэффициентами, который должен быть равен данному многочлену второй степени в правой части. Два многочлена будут равны тогда и только тогда, когда равны коэффициенты при одинаковых степенях x . Запишем столбиком полученные уравнения:

$$\left. \begin{array}{l} x^2 \\ x^1 \\ x^0 \end{array} \right| \begin{array}{l} 12A = 24; \\ 14A + 12B = 16; \\ 2A + 7B + 12C = -15. \end{array} \right\}$$

Имеем систему трех уравнений с тремя неизвестными коэффициентами A, B, C .

Решив ее, найдем $A = 2, \quad B = -1, \quad C = -1$.

Частное решение: $y_q = 2x^2 - x - 1$.

5) Общее решение данного уравнения:

$$y = y_0 + y_q,$$

или

$$y = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{-4x} + 2x^2 - x - 1.$$

Пример 3. Найти общее решение уравнения $y'' + y' - 2y = 3e^x$.

Решение

1) Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$k^2 + k - 2 = 0, \quad k_1 = -2; \quad k_2 = 1.$$

2) Запишем общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения по формуле $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$:

$$y_0 = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x.$$

3) Сравним правую часть данного дифференциального уравнения $f(x) = 3e^x$ с $f(x) = e^{\alpha x} \cdot P_n(x)$. Отметим, что $\alpha = 1$ совпадает с одним корнем характеристического уравнения; многочлен – число 3 – нулевой степени, т. е. $n = 0$. Поэтому частное решение y_q следует искать в виде $y_q = A \cdot e^x \cdot x$.

4) Запишем

$$\begin{array}{l|l} -2 & y_q = A \cdot e^x \cdot x, \\ 1 & y_q' = A \cdot e^x + A \cdot e^x \cdot x, \\ 1 & y_q'' = A \cdot e^x + A \cdot e^x + A \cdot e^x \cdot x. \end{array}$$

Подставив выражения y_q, y_q', y_q'' с указанными коэффициентами в данное дифференциальное уравнение, получим

$$2A \cdot e^x + A \cdot e^x \cdot x + A \cdot e^x + A \cdot e^x \cdot x - 2A \cdot e^x \cdot x = 3e^x,$$

или

$$3A \cdot e^x = 3e^x,$$

откуда $A = 1$. Частное решение: $y_q = x \cdot e^x$.

5) Искомое общее решение данного уравнения:

$$y = C_1 \cdot e^{-2x} + C_2 \cdot e^x + x \cdot e^x.$$

Пример 4. Найти общее решение уравнения $y'' - y = x \cdot e^{-x}$.

Решение

1) Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$k^2 - 1 = 0; \quad k_1 = -1; \quad k_2 = 1.$$

2) Запишем общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения по формуле $y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}$:

$$y_0 = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^x.$$

3) Сравним правую часть данного уравнения $f(x) = x \cdot e^{-x}$ с $f(x) = e^{\alpha x} \cdot P_n(x)$. Отмечаем, что $\alpha = -1$ совпадает с одним корнем характеристического уравнения и многочлен x степени $n = 1$. Поэтому частное решение следует искать в виде $y_q = (Ax + B) \cdot x \cdot e^{-x}$.

4) Так как требуется найти y_q, y_q', y_q'' , удобнее записать y_q в виде $y_q = (Ax^2 + Bx) \cdot e^{-x}$.

Запишем y_q, y_q', y_q'' столбиком:

$$\begin{array}{l|l} -1 & y_q = (Ax^2 + Bx) \cdot e^{-x}, \\ 0 & y_q' = (2Ax + B) \cdot e^{-x} - (Ax^2 + Bx) \cdot e^{-x}, \\ 1 & y_q'' = 2A \cdot e^{-x} - (2Ax + B) \cdot e^{-x} - (2Ax + B) \cdot e^{-x} + (Ax^2 + Bx) \cdot e^{-x}. \end{array}$$

Подставим выражения y_q, y_q' с указанными коэффициентами в данное уравнение. Получим равенство

$$2A \cdot e^{-x} - 2(2Ax + B) \cdot e^{-x} + (Ax^2 + Bx) \cdot e^{-x} - (Ax^2 + Bx) \cdot e^{-x} = x \cdot e^{-x}.$$

Разделим уравнение на $e^{-x} \neq 0$ и упростим:

$$\begin{array}{l} 2A - 2(2Ax + B) = x, \\ 2A - 4Ax - 2B = x. \end{array} \quad \begin{array}{l} x^1 \left| \begin{array}{l} -4A = 1; \\ 2A - 2B = 0, \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} A = -1/4; \\ B = -1/4. \end{array} \right. \\ x^0 \left| \begin{array}{l} -4A = 1; \\ 2A - 2B = 0, \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} A = -1/4; \\ B = -1/4. \end{array} \right. \end{array}$$

Частное решение: $y_q = -\frac{1}{4}(x^2 + x) \cdot e^{-x}.$

5) Общее решение дифференциального уравнения:

$$y = C_1 \cdot e^{-x} + C_2 \cdot e^x - \frac{1}{4}(x^2 + x) \cdot e^{-x}.$$

Пример 5. Решить уравнение $y'' + 2y' + 5y = 2 \cos x$.

Решение

1) Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$k^2 + 2k + 5 = 0;$$

$$k_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = \frac{-2 \pm 4i}{2} = -1 \pm 2i \quad (a = -1; \quad b = 2).$$

2) По формуле (11.16) общим решением будет

$$y_0 = e^{-x} \cdot (C_1 \cdot \cos 2x + C_2 \cdot \sin 2x).$$

3) Сравним правую часть уравнения $f(x) = 2 \cos x$ с $f(x) = M \cdot \cos \beta x + N \cdot \sin \beta x$.

Здесь $M = 2$, $N = 0$; $\beta = 1$. Числа $\pm \beta i = \pm i$ не являются корнями характеристического уравнения. Частное решение следует искать в виде

$$y_q = A \cdot \cos x + B \cdot \sin x.$$

4) Запишем

$$\begin{array}{l|l} 5 & y_q = A \cos x + B \sin x, \\ 2 & y_q' = -A \sin x + B \cos x, \\ 1 & y_q'' = -A \cos x - B \sin x. \end{array}$$

Подставив y_q , y_q' , y_q'' в уравнение, получим
 $-A \cos x - B \sin x - 2A \sin x + 2B \cos x + 5A \cos x + 5B \sin x = 2 \cos x$,
 или $\sin x \cdot (4B - 2A) + \cos x \cdot (4A + 2B) = 2 \cos x$.

$$\left. \begin{array}{l} \sin x \mid 4B - 2A = 0; \\ \cos x \mid 4A + 2B = 2. \end{array} \right\}$$

$$A = \frac{2}{5}; \quad B = \frac{1}{5}.$$

Частное решение: $y_q = \frac{2}{5} \cos x + \frac{1}{5} \sin x$.

5) Общее решение данного дифференциального уравнения:

$$y = e^{-x} (C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x) + \frac{2}{5} \cos x + \frac{1}{5} \sin x.$$

Задачи для решения в аудитории

Найти решения уравнений. В тех задачах, в которых заданы начальные условия, найти решения, удовлетворяющие этим условиям.

- | | |
|--|---|
| 1. $y'' + y = 4e^x; y(0) = 4, y'(0) = -3;$ | 2. $y'' - 2y' + y = 6xe^x;$ |
| 3. $y'' + y' - 2y = 3xe^x;$ | 4. $y'' + y = 4 \sin x;$ |
| 5. $y'' - y = -x^2;$ | 6. $y'' + 2y' + 2y = xe^{-x}$ при
$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0;$ |

7. $y'' - 8y' + 15y = 0$ при $y(0) = 2$, $y'(0) = 8$;
 8. $y'' - 2y' + 5y = 0$ при $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$;
 9. $y'' + 16y = 0$, при $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$;
 10. $y'' - 6y' + 9y = 0$ при $y(0) = 2$, $y'(0) = 7$;
 11. $y'' - 5y' + 6y = 0$, при $y(0) = 3$, $y'(0) = -8$;
 12. $y'' + 8y' + 16y = 0$;
 13. $y'' + 9y = 0$;
 14. $y'' - 6y' + 10y = 0$, при $y(0) = 1$, $y'(0) = 3$.

Ответы

1. $y = (2 \cos x - 5 \sin x) + 2e^x$. 2. $y = (C_1 + C_2 x + x^3) \cdot e^x$.
 3. $y = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{-2x} + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x}{3} \right) \cdot e^x$.
 4. $y = (C_1 \cos x + C_2 \sin x) - 2x \cos x$.
 5. $y = C_1 \cdot e^x + C_2 \cdot e^{-x} + x^2 + 2$. 6. $y = e^{-x} \cdot (x - \sin x)$. 7. $y = e^{3x} + e^{5x}$.
 8. $y = e^x (\cos 2x + \sin 2x)$. 9. $y = \cos 4x + \sin 4x$.
 10. $y = 2 \cdot e^{3x} + e^{3x} \cdot x$. 11. $y = e^{-2x} + 2 \cdot e^{-3x}$. 12. $y = e^{-4x} \cdot (C_1 + C_2 \cdot x)$.
 13. $y = C_1 \cdot \cos 3x + C_2 \cdot \sin 3x$. 14. $y = e^{3x} \cdot \cos x$.

Индивидуальные задания

Найти общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения, используя метод подбора коэффициентов частного решения (метод неопределенных коэффициентов)

1. $y'' - 3y' + 2y = (x^2 + x - 3)$. 2. $y'' - 4y' + 4y = 3x^2 + 2x - 3$.
 3. $y'' + 6y' + 34y = 4x^2 + 2x - 1$. 4. $9y'' + 24y' + 16y = -5x^2 - 4$.
 5. $y'' + 2y' + 2y = 1 + x - x^2$. 6. $y'' - 3y' + 2y = 7x^2 - 3x + 2$.
 7. $5y'' - 7y' + 2y = 10x^2 - x + 3$. 8. $y'' - 2y' + y = x^3 + x - 5$.
 9. $y'' + 6y' + 34y = 5x^2 - 4x + 2$. 10. $y'' + y' = 2x^3 - x + 3$.
 11. $y'' - 4y' + 4y = x^2 + 3x - 7$. 12. $y'' + 3y' - 4y = x^2 + 5$.
 13. $y'' + y' - 2y = 4x^2 - 3$. 14. $4y'' - 4y' + y = 6x^2 - 1$.
 15. $y'' - 4y' + 13y = x^2 + x - 2$. 16. $2y'' - 7y' + 5y = x^2 - 3$.

17. $y'' + 6y' + 34y = 5x^2 + 2x$

18. $y'' - 4y' + 8y = 5x^2 - 3x + 1.$

19. $y'' - 5y' + 4y = x^2 - 3x + 3$

20. $y'' - 2y' + 2y = 1 - 3x - x^2$

21. $25y'' + 8y' + y = x - 3x^2$

22. $y'' - 6y' + 34y = 3x^2 - 2x$

23. $13y'' + 4y' + y = 2x^2 + x - 1$

24. $y'' - 4y' + 3y = 7x^2 - x + 2$

25. $y'' - 6y' + 9y = x^2 + 5x - 3.$

26. $4y'' - 4y' + y = 6x^2 + x - 1$

Вопросы и задания для самопроверки

1. Что называется дифференциальным уравнением первого порядка?
2. Что называется общим решением дифференциального уравнения первого порядка, интегральными кривыми?
3. Дайте геометрическую иллюстрацию частного и общего решений дифференциального уравнения первого порядка.
4. Сформулируйте задачу Коши.
5. Дайте определение дифференциального уравнения с разделяющимися переменными и укажите метод его интегрирования.
6. Сформулируйте теорему существования и единственности решения дифференциального уравнения с разделяющимися переменными.
7. Дайте определение однородного дифференциального уравнения и способа его решения.
8. Что называется линейным дифференциальным уравнением первого порядка? Дайте способ его решения.
9. Сформулируйте теорему Коши для линейного дифференциального уравнения.
10. Что называется линейным дифференциальным уравнением второго порядка?
11. Сформулируйте задачу Коши для линейного дифференциального уравнения второго порядка.
12. Дайте определение фундаментальной системы решений и определителя Вронского.
13. Докажите теорему о структуре общего решения.
14. Дайте определение характеристического уравнения.
15. Структура решения линейного однородного дифференциального уравнения.

§5. Применение обыкновенных дифференциальных уравнений к составлению простейших математических моделей.

1. Задача о мальчике Дениске из рассказа Виктора Драгунского «Тайное становится явным»

Дениска выкинул из окна 15-го этажа манную кашу, которую мама сварила ему на завтрак. Известно, что сила сопротивления воздуха пропорциональна скорости полета каши. Через четыре секунды каша пролетела мимо окна 8-го этажа. Выясните, через сколько секунд каша попадет на новую шляпку проходившего мимо гражданина, если высота каждого этажа дома, где живет мальчик Дениска, равна 2,5 метрам?

Решение задачи о мальчике Дениске.

Пусть $x(t)$ – перемещение каши по направлению к земле за время t после ее вылета из окна, а m – масса каши. Используя второй закон Ньютона, запишем уравнение, описывающее движение каши:

$$mx'' = -kx' + mg,$$

где k – коэффициент пропорциональности, g – ускорение силы тяжести, а

$$x' = \frac{dx}{dt}, x'' = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Перепишем уравнение в виде

$$x'' + \lambda x' = g, \quad \lambda = \frac{k}{m}.$$

Полученное уравнение – неоднородное линейное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Правая часть уравнения представляет собой постоянную, т.е. многочлен нулевой степени. Решая уравнение уже знакомым методом (см. §3), получим его общее решение:

$$x = C_1 + C_2 e^{-\lambda t} + \frac{g}{\lambda} t.$$

В начальный момент времени перемещение и вертикальная составляющая скорости равны нулю:

$$x(0) = 0, \quad x'(0) = 0.$$

поэтому

$$C_1 + C_2 = 0, \quad -\lambda C_2 + \frac{g}{\lambda} t = 0.$$

Откуда

$$C_1 = -C_2 = -\frac{g}{\lambda^2}.$$

и закон движения выброшенной каши, т.е. зависимость её перемещения x от времени t , имеет вид

$$x = -\frac{g}{\lambda^2} (1 - \lambda t - e^{-\lambda t}).$$

Для нахождения коэффициента λ , имеем условие:

$$x = 7 \cdot 2,5 \text{ (м) при } t = 4 \text{ (с)}$$

(ведь до окна 8-го этажа каше пришлось преодолеть семь этажей по 2,5 метра). Получаем тогда из закона движения выброшенной каши алгебраическое уравнение:

$$17,5 = -\frac{10}{\lambda^2} (1 - 4\lambda - e^{-4\lambda}),$$

которое, однако, невозможно решить аналитически. А вот приближенное решение этого уравнения найти не сложно!

Действительно, заметим, что величина $e^{-4\lambda}$ мала при $\lambda > 1$, а величина ускорения g силы тяжести приблизительно $10 \text{ (м/с}^2\text{)}$. Решая это квадратное уравнение, получим $\lambda = 2 \text{ (1/с)}$. (Объясните самостоятельно, почему второй корень квадратного уравнения оказался лишним!)

Окончательно можно записать закон движения каши:

$$x = -\frac{g}{4}(1 - 2t - e^{-2t}).$$

Теперь можно выяснить, когда каша долетит до шляпы проходившего мимо гражданина. Для этого в полученный выше закон надо подставить значение $x = 15,25$ (м), $g = 10$ (м/с²) и опять отбросить малый экспоненциальный член e^{-2t} :

$$37,5 = -\frac{10}{4}(1 - 2t), \quad t \approx 8(\text{с}).$$

(Кстати, легко проверить, что при найденном значении времени t отброшенный нами в правой части равенства член e^{-2t} имеет величину $e^{-2t} \approx e^{-16} \approx 0,00000011$, т.е. действительно мал по сравнению с оставленным членом $1 - 2t$)

Таким образом, манная каша, выброшенная мальчиком Дениской, будет лететь до земли примерно 8 секунд. Отметим, что за это время, проходивший мимо гражданин вполне может удалиться от падающей каши на безопасное расстояние! А Дениска тем самым не смогла бы убедиться в достоверности того, что всё тайное становится явным.

2. Математическая модель подвески автомобиля.

Для составления данной модели необходимо рассмотреть модель Фохта. Она используется в механике для описания колебательного процесса подвески автомобиля [9].

Пусть $y(t)$ перемещение подвески, тогда $-ky(t)$ характеризует жесткость пружины, $-\lambda v = \lambda y'(t)$ - вязкое трение в амортизаторе, m - масса машины, a - её ускорение, используя законы Ньютона, можно получить уравнение, описывающее перемещение подвески автомобиля [3]:

$$y'' + \frac{\lambda}{m} y' + \frac{\kappa}{m} y = 0 \text{ или } y'' + py' + qy = 0. \quad (3.28)$$

Решив это уравнение, получим три возможных случая, которые соответствует аperiodическому процессу, жесткой подвеске и регулируемой.

Напишем соответствующее характеристическое уравнение

$$k^2 + pk + q = 0.$$

и найдем его корни:

$$k_{1,2} = \frac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}.$$

1) Пусть $\frac{p^2}{4} > q$. Тогда корни k_1 и k_2 – действительные отрицательные числа. Следовательно, в этом случае общее решение выражается через показательные функции:

$$y = C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{k_2 t},$$

где $k_1 < 0, k_2 < 0$.

Из этой формулы следует, что отклонение y при любых начальных условиях асимптотически стремится к нулю, если $t \rightarrow \infty$. В данном случае колебаний не будет, так как силы вязкого сопротивления амортизатора велики по сравнению с коэффициентом жесткости ресоры k .

2) Пусть $\frac{p^2}{4} = q$. Тогда корни k_1 и k_2 равны между собой. Если $k_1 = k_2 = k$, то $p^2 - 4q = 0$, т.е. $k = -\frac{p}{2}$ или $2k + p = 0$.

Таким образом, в этом случае общее решение уравнения имеет вид

$$y = e^{\frac{p}{2}t} (C_1 + C_2 t).$$

Здесь отклонение также стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$, но не так быстро, как в предыдущем случае (благодаря наличию сомножителя $C_1 + C_2 t$. Данный случай является редким, переходным от случая колебаний 1) к случаю – 3).

3) Пусть $p = 0$, т. е. – отсутствует сила вязкого трения в амортизаторе. Что соответствует выходу из строя амортизатора. Уравнение тогда примет вид

$$y'' + qy = 0.$$

Характеристическое уравнение имеет вид $k^2 + q = 0$, а его корни равны $k_1 = bi$ и $k_2 = -bi$ ($b = \sqrt{q}$).

Общее решение:

$$y = C_1 \cos bt + C_2 \sin bt.$$

В последней формуле произвольные постоянные C_1 и C_2 заменим другими. Именно, введем постоянные A и связанные с C_1 и C_2 соотношениями

$$C_1 = A \sin \varphi_0, C_2 = A \cos \varphi_0.$$

A и φ_0 через C_1 и C_2 определяются так:

$$A = \sqrt{C_1^2 + C_2^2}, \varphi_0 = \operatorname{arctg} \frac{C_1}{C_2}$$

Подставляя значения C_1 и C_2 в общее решение, будем иметь

$$y = A \sin \varphi_0 \cos bt + A \cos \varphi_0 \sin bt \text{ или}$$

$$y = A \sin(bt + \varphi_0)$$

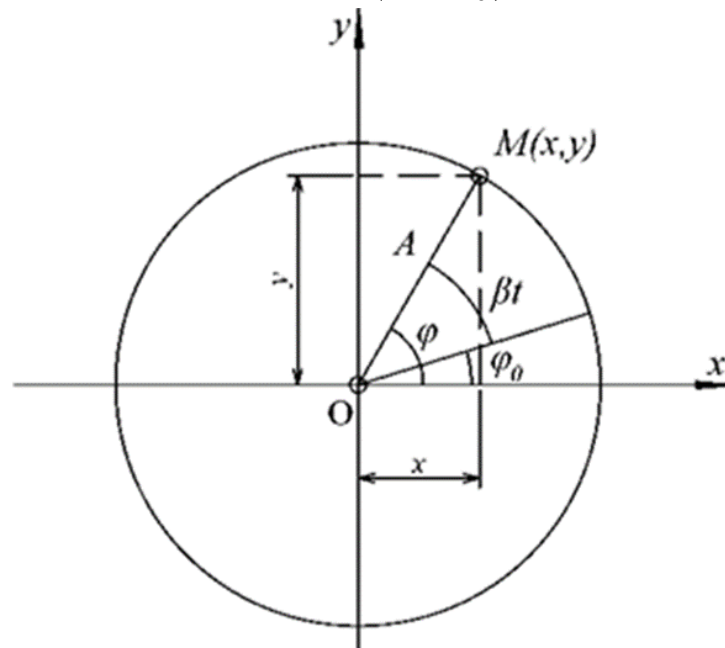


Рис. 3.1. Векторное изображение гармонических колебаний

Колебания в этом случае называются *гармоническими*. Интегральными кривыми являются синусоиды. Промежуток времени T , за который аргумент синуса изменяется на 2π , называется *периодом*

колебаний; в данном случае $T = \frac{2\pi}{b}$. *Частотой* колебания называется

число колебаний за время 2π ; в данном случае частота равна b ; A – величина наибольшего отклонения от положения равновесия – называется *амплитудой* колебания; φ_0 называется *начальной фазой*.

В электротехнических и других дисциплинах широко используют комплексное и векторное изображения гармонических колебаний.

Рассмотрим в комплексной плоскости xOy радиус-вектор $A = A(t)$ постоянной длины $|A| = A = \text{const}$.

Конец вектора A при изменении параметра t (в данном случае t – время) описывает окружность радиуса A с центром в начале координат (рис. 3.2). Пусть угол ψ , образованный вектором A и осью Ox , выражается так: $\psi = bt + \varphi_0$. Величина b называется *угловой скоростью вращения вектора A* . Проекции вектора A на оси Oy и Ox будут

$$y = A \sin(\beta t + \varphi_0), \quad x = A \cos(\beta t + \varphi_0). \quad (3.29)$$

Выражения (3.29) суть решения уравнения (3.28). Рассмотрим комплексную величину

$$z = x + iy = A \cos(\beta t + \varphi_0) + i A \sin(\beta t + \varphi_0),$$

или

$$z = A(\cos(\beta t + \varphi_0) + i \sin(\beta t + \varphi_0)). \quad (3.30)$$

Комплексная величина z изображается вектором A . Таким образом, решения уравнения гармонических колебаний (3.28) можно рассматривать как *проекции вектора A на оси Oy и Ox , вращающегося с угловой скоростью β при начальной фазе φ_0* .

Пользуясь формулой Эйлера выражение (3.30) можно переписать так:

$$z = A e^{i(\beta t + \varphi_0)}. \quad (3.31)$$

Мнимая и действительная части выражения (3.30) являются решениями уравнения (3.28). Выражение (3.31) называется *комплексным решением* уравнения (3.28). Перепишем выражение (3.31) так:

$$z = Ae^{i\varphi_0} e^{i\beta t}. \quad (3.32)$$

Выражение $z = Ae^{i\varphi_0}$ называют комплексной амплитудой. Обозначим ее через A^* . Тогда комплексное решение (3.28) перепишется так:

$$z = A^* e^{i\beta t} \quad (3.33)$$

4) Пусть $p \neq 0$ и $\frac{p^2}{4} < q$.

В этом случае корни характеристического уравнения – комплексные числа

$$k_1 = \alpha + \beta i, \quad k_2 = \alpha - \beta i,$$

где

$$\alpha = \frac{-p}{2} \quad \text{и} \quad \beta = \frac{\sqrt{4q - p^2}}{2}.$$

Общий интеграл имеет вид

$$y = e^{\alpha x} (C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x) \quad (3.34)$$

или

$$z = Ae^{\alpha t} \sin(\beta t + \varphi_0)$$

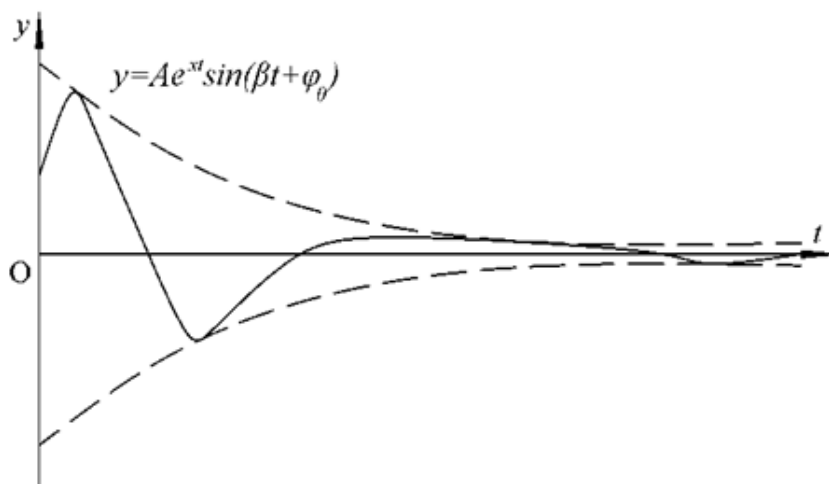


Рис. 3.2. График затухающих колебаний.

Здесь в качестве амплитуды приходится рассматривать величину

$Ae^{\alpha t}$, зависящую от времени. Так как $\alpha < 0$, то она стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$, т.е. мы имеем дело с затухающими колебаниями. График, которых изображен на рис. 3.2. Что соответствует мягкости подвески. Затухание колебаний, как видно из рисунка, происходит быстро и плавно.

3. Определение изгиба консольной балки.

Рассмотрим упругую призматическую балку, изгибающуюся под действием внешних сил, как непрерывно распределенных (вес, нагрузка), так и сосредоточенных [11]. Направим ось Ox горизонтально, по оси балки в её недеформированном состоянии, ось Oy – вертикально вниз (рис. 3.3).

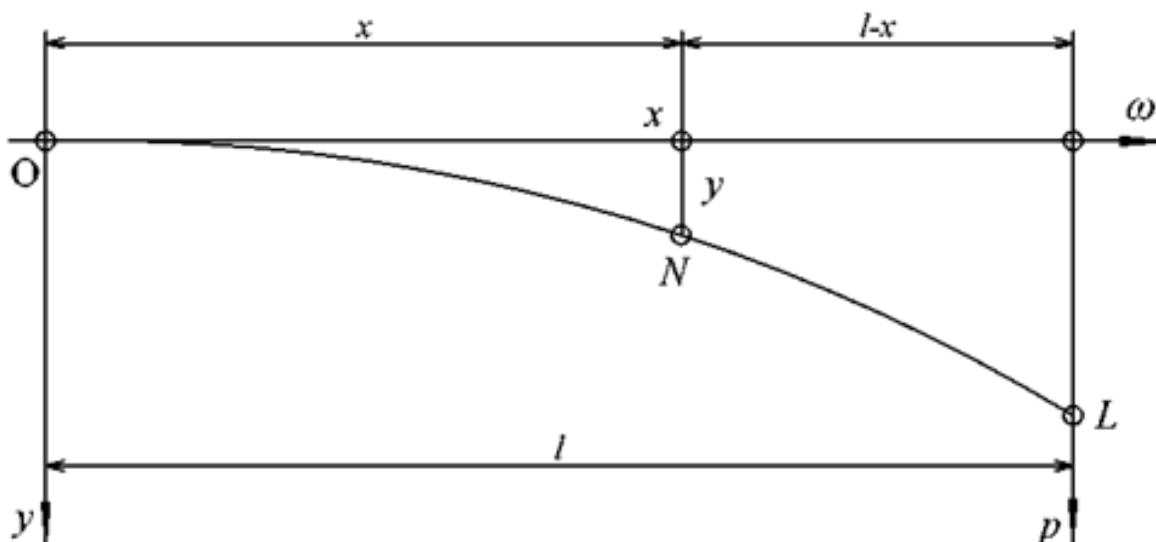


Рис. 3.3. Упругая призматическая балка.

Каждая сила, действующая на балку (например, нагрузка балки, реакция опор), имеет момент относительно какого-нибудь поперечного сечения балки, равный произведению силы на расстояние точки приложения силы от данного сечения. Сумма $M(x)$ моментов всех сил, приложенных к части балки, расположенной по одну сторону от данного сечения, с абсциссой x , называется изгибающим моментом балки относительно данного сечения.

В курсе сопротивления материалов доказывается, что изгибающий момент балки равен

$$M(x) = \frac{EJ}{R},$$

где E – так называемый модуль упругости, зависящий от материала балки;

J – момент инерции площади поперечного сечения балки относительно горизонтальной линии, проходящей через центр тяжести площади поперечного сечения;

R – радиус кривизны оси изогнутой балки, который выражается формулой

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}.$$

Подставляя это выражение в изгибающий момент балки, мы получим дифференциальное уравнение второго порядка:

$$\frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{M(x)}{EJ}. \quad (3.35)$$

Из которого, зная функцию $M = M(x)$, необходимо найти неизвестную функцию y от x и тем самым установить вид *изогнутой оси* балки (называемой иногда *упругой линией*). Его точное решение, однако, затруднительно, и обыкновенно его заменяют другим, приближенным, но значительно более простым уравнением.

Ввиду того, что прогиб балок весьма мал, сравнительно с их длиной (иначе их нельзя было бы применять в строительном деле!), упругая линия имеет пологую форму, и угловой коэффициент касательной настолько мал, что его квадратом сравнительно с единицей, можно в знаменателе пренебречь, и тогда уравнение (3.35) примет простой вид:

$$y'' = \frac{M(x)}{EJ}. \quad (3.36)$$

Далее, используя различные условия работы балки мы доведем до конца интегрирование уравнения (3.36) и найдем соответствующие этим случаям упругие линии.

Вторая производная y'' в левой части уравнения (3.36) может быть как положительной, так и отрицательной. Установим правило, ко-

торым надлежит руководствоваться при определении знака изгибающего момента. Для того чтобы это уравнение имело место всегда, надо знак правой части выбирать в соответствии со знаком левой. Если ось Oy , как мы условились, направлять всегда вверх, то производная будет положительна или отрицательна, в зависимости от того, направлена ли в рассматриваемой точке упругая линия вогнутостью вверх или вниз. С другой стороны, ясно, что вогнутость упругой линии будет направлена вверх, если момент внешних сил, действующих – безразлично – на правую или на левую часть балки, стремится поднять эту часть балки или опустить рассматриваемую точку; наоборот вогнутость будет направлена вниз, если момент стремится опустить обе части балки или поднять нашу точку. Остается поэтому приписать в первом случае моменту знак (+), а во втором – знак (-), чтобы уравнения (3.36) имело смысл.

Это условие можно выразить следующим образом:
момент внешних сил, приложенных к левой части балки, относительно нейтральной линии взятого сечения, считается положительным, если вращает по часовой стрелке, и отрицательным – в противном случае; для момента сил, приложенных к правой части балки, действует обратное правило: он положителен, если вращает против часовой стрелки, отрицателен – в противном случае.

Пример 1. Изгиб балки с одним заделанным, другим свободным концом.

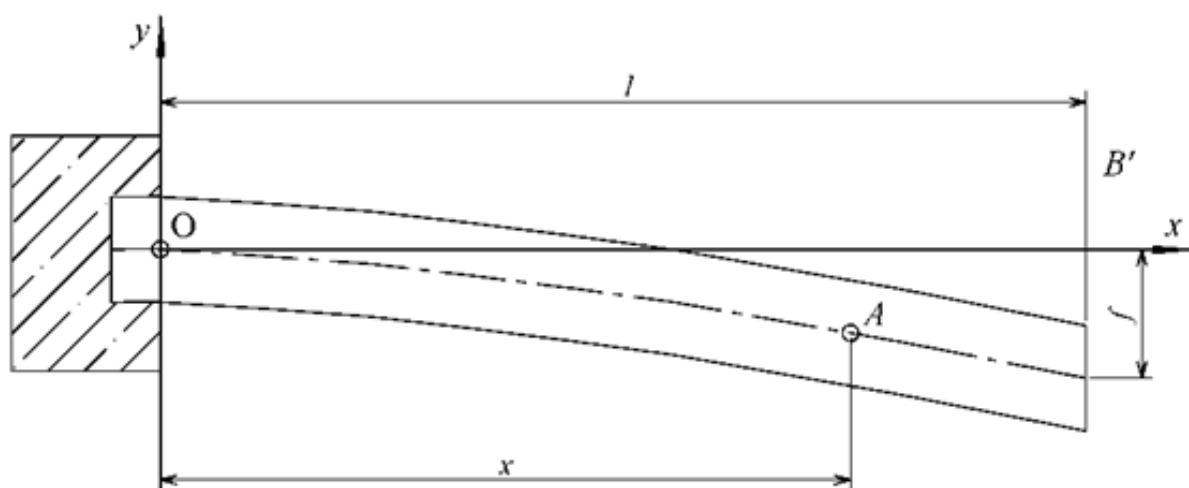


Рис. 3.4. Чертёж балки.

Балка наглухо заделана в конце 0 и подвергается действию сосредоточенной вертикальной силы P , приложенной к другому концу балки длины l (рис. 3.4). Весом балки пренебрегаем. Найти уравнение изогнутой оси и определить стрелу прогиба f .

Решение. Ось балки измениться и примет вид, указанный на рис. 2.6. Так как заделанный конец балки не может поворачиваться, то касательная к упругой линии в ее левом конце должна быть горизонтальна.

Если оси выбраны так, как указано на рис. 2.6, то, рассекая балку в точке A (абсциссе которой соответствует x), мы видим, что на правую часть балки действует сила P , имеющая относительно A момент $P(l-x)$, который следует взять со знаком $(-)$, согласно правилу, сформулированному выше. При определении момента силы воспользовались тем, что он равен произведению силы на плечо. Уравнение (3.36) примет вид:

$$y'' = -\frac{P}{EI}(l-x).$$

Интегрируя, для первой производной y' получим выражение:

$$y' = \int \frac{P}{EI}(x-l)dx = \frac{P}{EI}\left(\frac{x^2}{2} - lx\right) + C_1,$$

где C_1 – постоянная интегрирования

Интегрируя еще раз, найдем:

$$y = \int \left[\frac{P}{EI}\left(\frac{x^2}{2} - lx\right) + C_1 \right] dx = \frac{P}{EI}\left(\frac{x^3}{6} - \frac{lx^2}{2}\right) + C_1x + C_2,$$

где C_2 – также постоянная интегрирования. Так как при $x=0$ (в точке закрепления) касательная горизонтальна и нет прогиба, то $y' = 0$ и $y=0$. Из этих начальных условий сразу заключаем, что $C_1=C_2=0$. Таким образом уравнение изогнутой оси имеет вид:

$$y = \frac{Pl^3}{6EI}\left(\frac{x^3}{l^3} - 3\frac{x^2}{l^2}\right) \quad (3.37)$$

Для определения стрелы прогиба $f = BB'$, полагаем в (3.37) $x = l$ и отбрасываем знак, получаем:

$$f = \frac{Pl^3}{3EI}. \quad (3.38)$$

Пример 2. Изгиб балки с одним заделанным, другим свободным концом при действии на неё равномерно распределённой по всей длине нагрузки. Пусть теперь, при тех же условиях закрепления (см. пример 1), на балку действует равномерно распределенная по длине сплошная нагрузка. Найти уравнение изогнутой оси и определить стрелу прогиба f .

Решение. Величину нагрузки, приходящуюся на единицу длины балки, обозначим через q ; таким образом, величина всей нагрузки есть $Q=ql$. На часть AB балки действует нагрузка $q(l-x)$, которую (при вычислении моментов) можно заменить силой, приложенной в середине отрезка AB . Ее момент относительно A будет

$$q(l-x) \cdot \frac{(l-x)}{2},$$

так что дифференциальное уравнение упругой линии в этом случае имеет вид:

$$y'' = -\frac{q}{2EI}(x-l)^2 = -\frac{q}{2EI}(x^2 - 2xl + l^2).$$

Интегрируя дважды, последовательно получим:

$$y' = -\frac{q}{2EI} \left(\frac{x^3}{3} - x^2l + l^2x \right) + C_1,$$

$$y = -\frac{q}{2EI} \left(\frac{x^4}{12} - \frac{x^3l}{3} + \frac{l^2x^2}{2} \right) + C_1x + C_2$$

Как и раньше, убеждаемся в том, что $C_1=C_2=0$. Уравнение упругой линии:

$$y = -\frac{ql^4}{24EI} \left(\frac{x^4}{l^4} - 4\frac{x^3}{l^3} + 6\frac{x^2}{l^2} \right) = -\frac{Ql^3}{24EI} \left(\frac{x^4}{l^4} - 4\frac{x^3}{l^3} + 6\frac{x^2}{l^2} \right). \quad (3.39)$$

Наибольший прогиб получается при $x=l$; для стрелы прогиба имеем выражение

$$f = \frac{Q}{EI} \cdot \frac{l^3}{8}. \quad (3.40)$$

Сравнивая со стрелой прогиба в первом случае, видим, что если одна и та же нагрузка $P=Q$ сосредоточена на конце балки, либо распределена равномерно по всей балке, то стрела прогиба во втором случае составит лишь $\frac{3}{8}$ стрелы прогиба в первом.

Пример 3. Предположим наконец, что на балку действует одновременно сплошная нагрузка (q кг на единицу длины) и сила P , приложенная на свободном конце балки, причем направление этой силы может быть, как вниз, так и вверх.

В данном случае для вычисления момента $M(x)$ можно воспользоваться моментами, вычисленными в примерах 1 и 2 (лишь если сила P действует вверх, в первом надлежит изменить знак), а затем сложить их.

В соответствии с этим, и уравнение упругой линии в рассматриваемом случае получается просто путем складывания (если сила P по-прежнему действует вниз) или вычитания (если она изменила направление) правых частей уравнений (2.13) и (2.15):

$$y = \frac{Pl^3}{6EI} \left(\frac{x^3}{l^3} - 3\frac{x^2}{l^2} \right) \pm \frac{Ql^3}{24EI} \left(\frac{x^4}{l^4} - 4\frac{x^3}{l^3} + 6\frac{x^2}{l^2} \right).$$

Пример 4. Изгиб балки с опертыми концами. Рассмотрим балку длины l , концы которой K и L покоятся на опорах (рис. 2.7), так что они не могут опуститься, но могут поворачиваться. Пусть на балку действует нагрузка Q равномерно распределенная по всей длине балки (по q кг на единицу длины). Найти уравнение изогнутой оси и определить стрелу прогиба f .

Решение.

Из соображений симметрии ясно, что наинизшая точка изогнутой балки придется посередине, так что в ней касательная будет горизонтальна. В этой точке и возьмем начало координат, направив оси так, как указано на чертеже.

Нагрузка Q , как ясно также из соображений симметрии, разделится поровну между опорами K и L , вызвав в них реакции величины $\frac{Q}{2}$ и направленные вверх. Вычислим теперь изгибающий

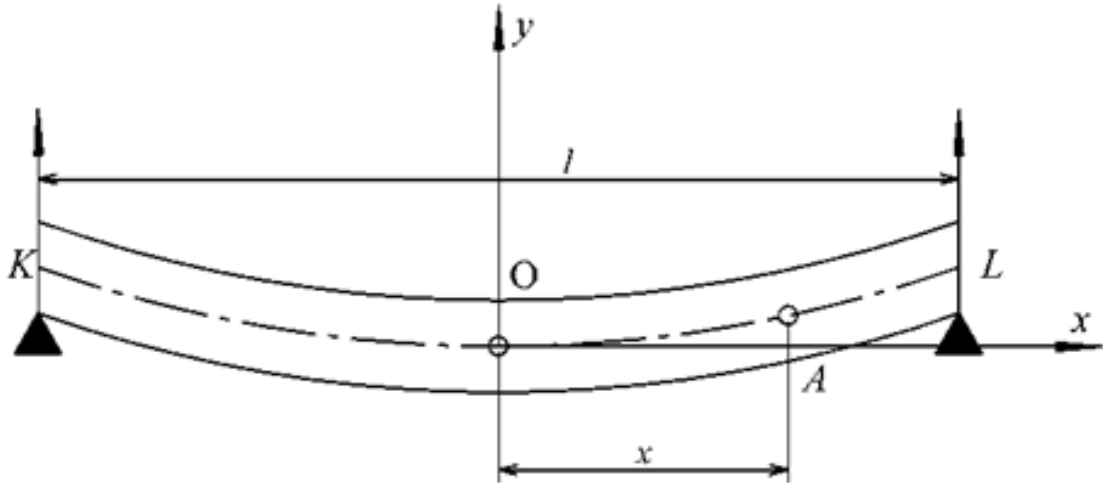


Рис. 3.5. Чертёж балки

момент $M(x)$ для сечения, соответствующего абсциссе $x > 0$ (т. е. проведенного через точку A). На правую часть балки AL действует, во-первых, реакция опоры L момент которой относительно точки A будет

$$+ \frac{Q}{2} \left(\frac{l}{2} - x \right).$$

На ту же часть действует и нагрузка

$$\frac{q}{2} \left(\frac{l}{2} - x \right),$$

которая может быть заменена одной силой, приложенной в середине отрезка AL . Её момент относительно точки A равен

$$- \frac{q}{2} \left(\frac{l}{2} - x \right)^2.$$

Таким образом,

$$M(x) = \frac{Q}{2} \left(\frac{l}{2} - x \right) - \frac{q}{2} \left(\frac{l}{2} - x \right)^2 = \frac{q}{2} \left(\frac{l}{2} - x \right) \left[l - \left(\frac{l}{2} - x \right) \right] = \frac{q}{2} \left[\left(\frac{l}{2} \right) - x^2 \right].$$

Так что дифференциальное уравнение упругой линии в этом случае имеет вид:

$$y'' = \frac{q}{2EI} \left(\frac{l^2}{4} - x^2 \right).$$

Интегрируя (и отбрасывая произвольную постоянную, ибо $y' = 0$ при $x=0$) получим:

$$y' = \frac{q}{2EI} \left(\frac{l^2}{4} x - \frac{x^3}{3} \right).$$

Интегрируем ещё раз (причем снова постоянная равна 0, так как $y = 0$ при $x = 0$):

$$y = \frac{q}{2EI} \left(\frac{l^2}{4} \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{12} \right) = \frac{ql^3}{24EI} \left(\frac{x^4}{l^4} - \frac{3}{2} \frac{x^2}{l^2} \right).$$

Это и есть уравнение изогнутой оси балки, справедливое, ввиду симметрии, и для левой ее половины. Для получения стрелы f прогиба, очевидно, достаточно вычислить ординату конца балки, т.е. положить здесь $x = \frac{l}{2}$

$$f = \frac{5}{8} \cdot \frac{ql^3}{48EI} \quad (3.41)$$

В рассматриваемом случае прогиб составляет лишь $5/48$, т. е. 10,4% прогиба, который получился бы, если бы та же балка была одним концом заделана в стену (см. (2.16)).

Пример 5. Изгиб балки с опертыми концами. Рассмотрим балку длины l , концы которой K и L покоятся на опорах (рис. 3.6), так что они не могут опуститься, но могут поворачиваться. Пусть на балку действует сосредоточенная сила P , приложенная в точке M на расстоянии a от левого конца (рис. 3.6). Найти уравнение изогнутой оси и определить стрелу прогиба f .

Решение.

Если положить $b = l - a$, то, разлагая силу P на две составляющие, приложенные в точках K и L , для величин этих составляющих будем иметь, как известно из элементов статики, выражения:

$$P_1 = \frac{b}{l} P, P_2 = \frac{a}{l} P.$$

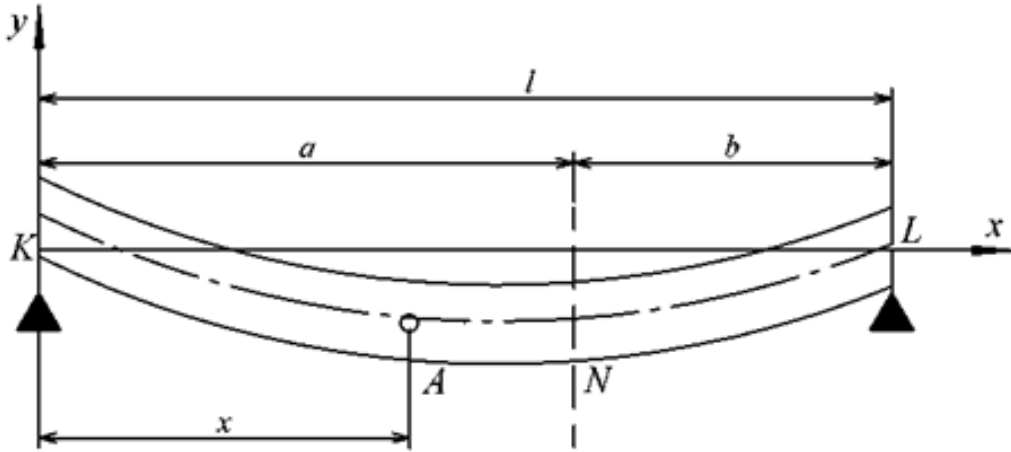


Рис. 3.6. Чертёж балки.

Таковы же будут и соответствующие реакции опор, направленные вверх. Вычисляя для точки $A(x)$ изгибающий момент, нам придется особо рассмотреть части LN и NL балки.

Итак, пусть $x < a$; тогда единственной внешней силой, действующей на левую часть балки, будет реакция P_1 . Ее момент равен

$$M(x) = P_1 \cdot x \quad (3.42)$$

так что дифференциальное уравнение упругой линии в этом случае имеет вид:

$$y'' = \frac{P_1}{EI} x.$$

Интегрируя получим:

$$y' = \frac{P_1}{EI} \frac{x^2}{2} + C_1.$$

Интегрируем ещё раз (причем постоянная C_2 равна 0, так как $y = 0$ при $x = 0$):

$$y = \frac{P_1}{EI} \frac{x^3}{6} + C_1 x.$$

Таким образом уравнение упругой линии имеет заданный вид

$$y = \frac{P_1}{EI} \frac{x^3}{6} + C_1 x \quad (3.43)$$

(где C_1 пока остается неизвестной) лишь для части KN .

Пусть теперь $x > a$, так что точка A лежит правее точки N приложения силы P . Тогда на левую же часть балки, кроме реакции P_1 действует и сама сила P , момент которой относительно A есть $-P(x-a)$. Поэтому в настоящем случае

$$M(x) = P_1 \cdot x - P(x-a) \quad (3.44)$$

А дифференциальное уравнение упругой линии в этом случае имеет вид:

$$y'' = \frac{P_1}{EI} \cdot x - \frac{P}{EI} (x-a)$$

Результат интегрирования можно написать в виде:

$$y' = \frac{P_1}{EI} \cdot \frac{x^2}{2} - \frac{P}{EI} \frac{(x-a)^2}{2} + C',$$

где C' – постоянная интегрирования. Аналогично, второе интегрирование даст:

$$y = \frac{P_1}{EI} \cdot \frac{x^3}{6} - \frac{P}{EI} \frac{(x-a)^3}{6} + C'x + C'', \quad (3.45)$$

где C'' – также постоянная. Это уравнение выражает часть NL упругой линии.

Замечательно здесь, что упругая линия в разных частях выражается с помощью различных аналитических выражений. Тем не менее в точке N (т. е. при $x = a$) не только оба уравнения (3.43) и (3.45) должны дать одно и то же значение ординаты у точки N , но и оба уравнения, выражающие угловой коэффициент касательной y' , должны также дать для этого коэффициента при $x = a$ одно и то же числовое значение (в теории сопротивления материалов предполагается, что упругая линия не может иметь угла, который образовался бы, если бы в точке N касательные справа и слева имели разные угловые коэффициенты).

Итак,

$$\frac{P_1}{EI} \cdot \frac{a^2}{2} + C_1 = \frac{P_1}{EI} \cdot \frac{a^2}{2} + C'$$

$\frac{P_1}{EI} \cdot (x-a)^2$ обратиться в нуль и, аналогично

$$\frac{P_1}{EI} \cdot \frac{a^3}{6} + C_1 a = \frac{P_1}{EI} \cdot \frac{a^3}{6} + C' a .$$

При интегрировании членов $-\frac{P}{EI}(x-a)$, $-\frac{P}{EI} \frac{(x-a)^2}{2}$ следует ввести новую переменную $t = x - a$. Это делается для того, чтобы сохранить множитель $x-a$ (обращающийся в 0 в точке N) и после интегрирования, что значительно облегчает определение произвольных постоянных: постоянные для левой и для правой части балки оказываются теми же! Замечание это принадлежит Клебшу.

У учащихся, в связи с этим, часто возникают сомнения в тождественности результатов, полученных непосредственным почленным интегрированием и интегрированием в только что указанной форме. Возьмем, для примера, двумя способами интеграл от $x - a$. Имеем:

$$1) \int (x-a) dx = \frac{x^2}{2} - ax + C_1, \quad 2) \int (x-a) dx = \frac{(x-a)^2}{2} + C_2$$

Раскрывая второе выражение, получим:

$$\frac{x^2}{2} - ax + \left(\frac{a^2}{4} + C_2 \right),$$

это совпадает с первым выражением, если положить

$$C_1 = \frac{a^2}{4} + C_2 .$$

Таким, образом, лишь произвольные постоянные, фигурирующие в обоих выражениях оказываются неравными, и ту постоянную, которая встречается во втором – определить легче. Из первого тождества $C' = C_1$, а тогда из второго $C'' = 0$. Единственная еще не определенная постоянная C' найдется из условия неподвижности точки L : уравнение (2.19a) при $x = l$ должно дать нулевое значение для y :

$$\frac{P_1}{EI} \cdot \frac{l^3}{6} - \frac{P}{EI} \frac{(l-a)^3}{6} + C'l = 0$$

Откуда

$$C_1 = C' = \frac{P}{EI} \cdot \frac{b^3}{6} - \frac{P}{EI} \frac{bl^2}{6l} = \frac{Pb}{6EI} (l^2 - b^2).$$

Определение постоянных в этой задаче также своеобразно.

Предположим теперь, что $a \geq b$ и найдем точку наибольшего прогиба. Ограничивая значения x промежутком $(0, a)$, приравняем нулю естественно первое выражение для производной:

$$\frac{P}{EI} \cdot \frac{x^2}{2} + C_1 = 0 \text{ или } \frac{P}{2EI} \frac{bx^2}{l} - \frac{Pb}{6EI} (l^2 - b^2) = 0.$$

Откуда

$$x = \sqrt{\frac{(l^2 - b^2)}{3}}.$$

Но $l^2 - b^2 = (l-b) \cdot (l+b) = a(a+2b) \leq 3a^2$,

так что это значение меньше a если $a > b$, и равно a в случае равенства

$a=b$. Так как $y'' = \frac{P_1}{EI} \cdot x > 0$ то, в первом предположении, найденное

значение x , действительно, доставляет функции y наименьшую (а по абсолютному значению наибольшую) величину, для промежутка $(0, a)$ значений x . Однако, как легко показать, в промежутке (a, l) наименьшее значение (при $a > b$) всегда достигается на конце $x=a$; поэтому найденная выше точка будет точкой наибольшего прогиба всей вообще балки, Величина стрелы прогиба

$$f = \frac{Pb}{3lEI} \left(\frac{l^2 - b^2}{3} \right)^{\frac{3}{2}} = 0.$$

Если же $a = b$. т. е. сила P приложена в середине балки, то там, разумеется, и будет наибольший прогиб. Выражение для f упрощается

в этом случае, ибо $l^2 - b^2 = l^2 - \left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{3l^2}{4}$, так что $f = \frac{Pb}{EI} \cdot \frac{l^3}{48}$.

Интересно сопоставить это число с величиной стрелы прогиба в предыдущей задаче (см. 3.41)), если положить $Q = P$: равномерно распределенная нагрузка на стрелу, которая составляет лишь $5/8$ стрелы, соответствующей такой же по величине силе, но сосредоточенной в середине балки.

Итак, если сила приложена не в середине балки ($a > b$), то наибольший прогиб будет не в точке приложения силы и не в середине балки, а между ними. Однако, расстояние этой точки от середины балки очень мало, где бы ни была приложена сила. В самом деле, это расстояние увеличивается с уменьшением b , но даже в пределе, при $b \rightarrow 0$, абсцисса точки наибольшего прогиба лишь значения

$$\sqrt{\frac{l^2}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = 0,58l,$$

так что упомянутое расстояние никогда не превосходит $0,08l$.

Рассмотрим численный пример. Пусть имеем круглую балку из сварочного железа, диаметра 4:22 см и длины $l = 300$ см, опертую по концам и несущую посередине груз $P=12000$ кг.

$$I = \frac{\pi d^4}{64} = 11500 \text{ см}^4, E = 2000000 \text{ кг/см}^2,$$

получим $f = 0,3$ см, т. е. лишь 1% всего пролета. Наибольший уклон упругая линия имеет, очевидно, по концам. Полагая $x=0$ в выражении

для y' , найдем $|y'_0| = |C_1| = \frac{Pl^2}{16EI} = 0,0239$; это отвечает углу в $1^\circ 41'$. Та-

ким образом: эти выкладки косвенно подтверждают то предположение о пологости упругой кривой, на котором была построена вся теория.

Задачи для решения в аудитории

1. Определить наименьшую скорость, с которой нужно бросить тело вертикально вверх, чтобы оно не вернулось на Землю (вторая космическая скорость). Сопротивлением воздуха пренебречь. Гравитаци-

онная постоянная равна $6,66 \cdot 10^{-8} \frac{\text{см}^3}{\text{г} \cdot \text{см}^2}$, радиус Земли – $63 \cdot 10^7$ см.

2. Составить уравнение кривой, проходящей через точку с коор-

динатами (4;4). Кривая обладает следующим свойством: отрезки касательных, заключенных между осями координат, проведенных в любой точке касания, делятся пополам точкой касания.

3. Тело массой m брошено с некоторой высоты. Определить закон изменения его скорости при падении вниз, приняв за коэффициент пропорциональности силы сопротивления воздуха величину k .

Ответы

$$1. 11,2 \frac{\text{км}}{\text{с}}. 2. y = \frac{16}{x}. 3. v = Ce^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}. 4. y = \frac{x^2 + 4}{4}.$$

Библиографический список

1. Математика : Журбенко, Л. Н. учебное пособие / Ю. М. Данилов Л. Н. Журбенко, Г. А. Никонов [и др.].– М. : ИНФРА-М, 2016. – 496 с.

2. Бугров, Я. С. Высшая математика : учебник / Я. С. Бугров. – 7-е изд.– Москва: Юрайт, 2018. – Т. 3: Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы – 288 с. – ISBN 978-5-9916-8643-3.

3. Руппель, Е.Ю. Задачник - практикум по математике : учебное пособие / Е.Ю. Руппель, Т.Е. Болдовская, С.В.Матвеева. – Омск : СиБАДИ, 2013. – Ч. 2. – 116 с.

4. Карасёва, Р.Б. Математика: практикум для студентов технических направлений заочной формы обучения / Р. Б. Карасева, С. В. Матвеева, Е. Ю. Руппель – Омск : СиБАДИ, 2016. – URL: <http://bek.sibadi.org/fulltext/esd94.pdf>. (дата обращения: 12.04.18). – ISBN 978-5-93204-862-7.

5. Демидович, Б. П. Краткий курс высшей математики : учебное пособие / Б. П. Демидович, В. А. Кудрявцев.– М. : Астрель, 2008. – 654 с.

6. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления : в 2 т. / Н.С. Пискунов.– М. : Интеграл–пресс, 2006.– Т.1,2.

7. Мышкис, А.Д. Лекции по высшей математике / А.Д. Мышкис. – М. : Лань, 2007.– 688 с.

8. Руппель, Е.Ю. Задачник - практикум по математике : учебное пособие ./ Е.Ю. Руппель, Т.Е.Болдовская, С.В.Матвеева. – Омск : СиБАДИ, 2013. /– Ч. 2. – 116 с.

9. Демидович, Б. П. Краткий курс высшей математики : учебное

пособие / Б. П. Демидович, В. А. Кудрявцев.– М. : Астрель, 2008. – 654с.

10. Журбенко, Л. Н. Математика: учебное пособие/ Л. Н. Журбенко, Ю. М. Данилов [и др.].– М. : ИНФРА-М, 2016. – 496 с.

11. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления / Н.С. Пискунов.– М. : Интеграл–пресс, 2006.– Т.1,2.

12. Болдовская, Т.Е, Задачник - практикум по математике : учебное пособие/ Т.Е.Болдовская, С.В.Матвеева, Е.Ю. Руппель. – Омск : СибАДИ, 2013. /– Ч. 2. – 115 с.

13. Руппель, Е.Ю. Математическое моделирование линии управления пневмоприводом/Е.Ю.Руппель//Наука XXI века: опыт прошлого -взгляд в будущее: материалы Международной научно-практической конференции. СибАДИ, 2015. -С. 36 -39.

14. Руппель, Е.Ю. Формирование профессиональных компетенций студентов при изучении курса математики/Е. Ю. Руппель.// Образование. Транспорт. Инновации. Строительство (ОТИС 2018): сборник научных трудов национальной научно -практической конференции 19-20 апреля 2018/СибАДИ. -С. 695-698.

15. Руппель Е.Ю. Использование в теоретическом курсе математики задач, учитывающих будущую профессиональную деятельность обучающихся/Е.Ю. Руппель//Методика преподавания математических и естественнонаучных дисциплин: современные проблемы и тенденции развития: материалы IV Всероссийской научно-практической конференции (Омск, 4 июля 2017 г.)/отв. ред. А.А. Романова. -Омск: Изд-во Ом. гос. унта, 2017. -С. 69-71.