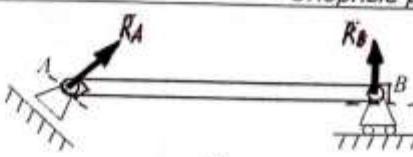
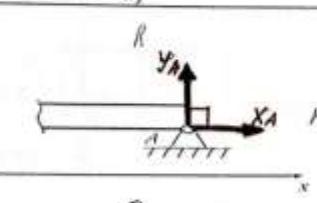
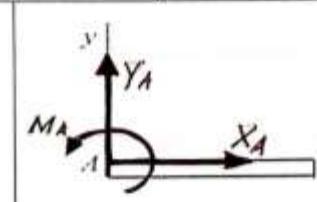
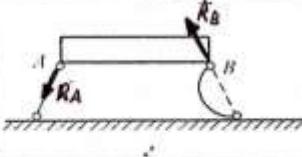


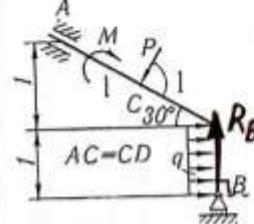
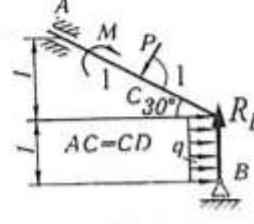
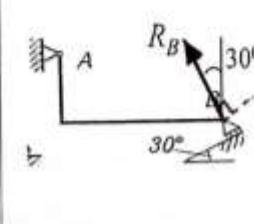
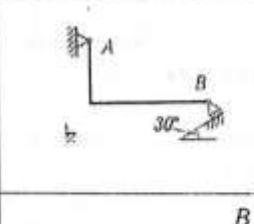
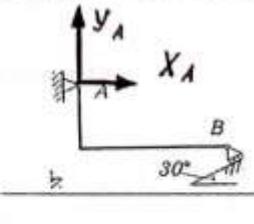
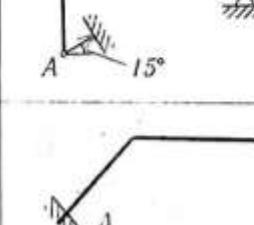
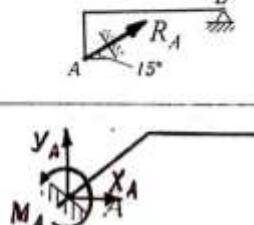
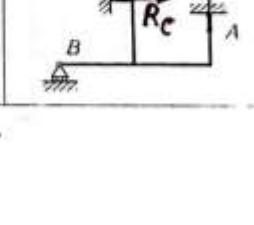
## Практическая работа №1 «Определение реакций опор твёрдого тела»

### Алгоритм решения задачи:

#### 1. Определить и показать на рисунке опорные реакции.

<i>Опорные реакции (реакции связей)</i>		
	a)	a) Подвижная опора (подвижный цилиндрический шарнир) – одна реакция, перпендикулярная опорной поверхности
	б)	б) Неподвижная опора (неподвижный цилиндрический шарнир). Две взаимно-перпендикулярные реакции $X_A$ и $Y_A$ , параллельные предварительно проведенным осям $Ox$ и $Oy$ .
	в)	в) Плоская жесткая заделка в точке A: три реакции связи $X_A$ , $Y_A$ , $M_A$
	г)	г) – опора A – опорный стержень с шарнирами на концах (реакция направлена по стержню; опора B – изогнутый стержень (реакция направлена вдоль линии действия, проходящей через шарниры).

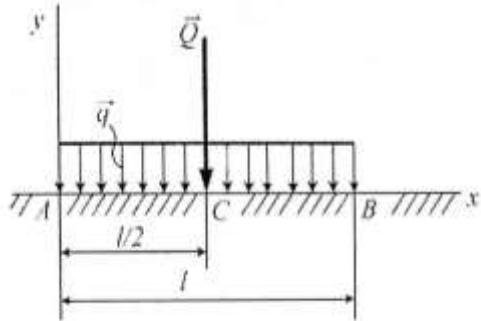
### ПРИМЕРЫ

<b>Опора B – подвижная опора, в ней реакция <math>R_B</math>, перпендикулярна я поверхности ОДНА РЕАКЦИЯ!!</b>			
<b>Опора A – неподвижная опора, в ней ДВЕ реакции <math>X_A</math> и <math>Y_A</math></b>			
<b>Опора A – подвижный стержень, ОДНА реакция через шарниры</b>			
<b>Опора A – жесткая заделка, ТРИ реакции: <math>X_A</math>; <math>Y_A</math>; <math>M_A</math></b>			

## 2. Равномерно-распределённую нагрузку заменить равнодействующей силой $Q$ .

Сила  $Q = q \cdot l$ , где  $l$  – длина участка, на который действует равномерно-распределённая нагрузка.

Любое несвободное твердое тело можно превратить в свободное, если освободить его от связей, заменив их действие силами реакций.



*Равномерно распределенная нагрузка*  
Модуль равнодействующей равен площади эпюры распределенных сил.  
Равнодействующая прямоугольной эпюры распределенных сил равна  $Q = ql$ . Точка приложения равнодействующей силы  $Q$  проходит через центр тяжести эпюры на расстоянии  $l/2$ .

Показать силу  $Q$  на рисунке.

### 3. Все наклонные силы разложить на две составляющие.

#### РАЗЛОЖЕНИЕ НАКЛОННЫХ СОСОРЕДОТОЧЕННЫХ СИЛ НА ДВЕ СОСТАВЛЯЮЩИЕ

Дано: Произвольная плоская система сил. Для наклонных сил показан угол с вертикалью или с горизонталью. Ось  $X$  горизонтальная ось, направленная вправо. Ось  $Y$  вертикальная ось, направленная вверх.

Определить: Разложить наклонные силы на две составляющие и записать проекции сил на оси  $X$  и  $Y$ .

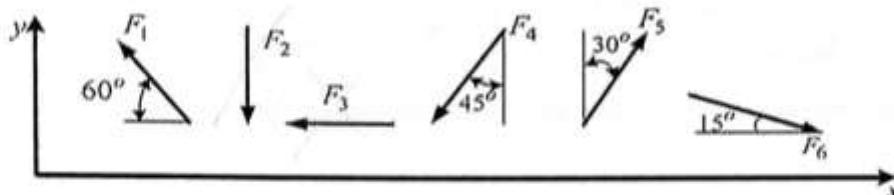


Рисунок 1

Сила  $F_2$  вертикальная, сила  $F_3$  горизонтальная их не надо раскладывать.

На наклонных силах построили прямоугольники, наклонная сила является гипотенузой (рис. 2).

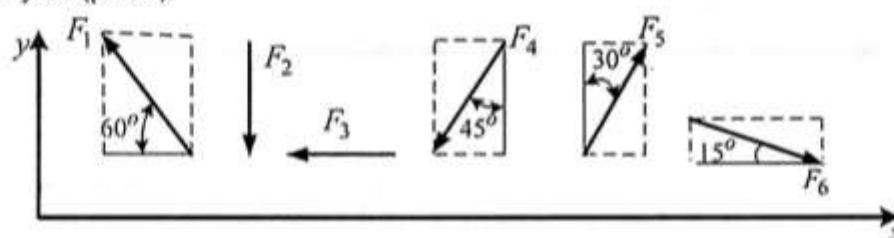


Рисунок 2

Разложить наклонные силы на две составляющие, т.е. наклонную гипотенузу разложить на два катета: горизонтальный и вертикальный.

Покажем вектор равный произведению силы и косинусу угла. Прилежащий вектор – это косинус, где показан угол там косинус (рис. 3).

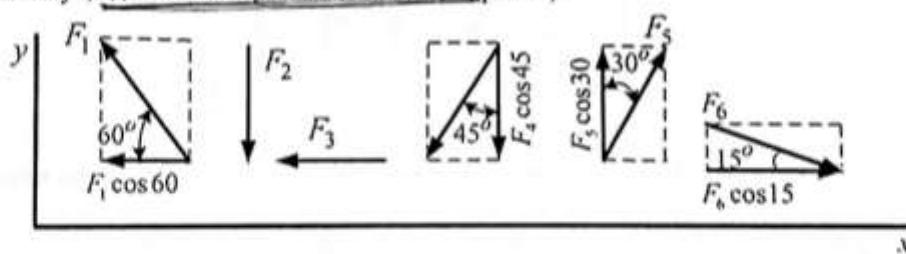


Рисунок 3

Добавим второй вектор равный произведению силы и синуса угла (рис. 4).

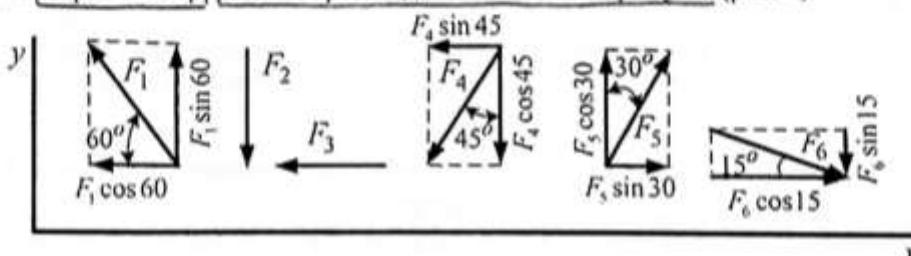


Рисунок 4

Горизонтальная ось  $X$  показана синим цветом, поэтому все **горизонтальные силы** выделим синим цветом. Вертикальная ось  $Y$  показана красным цветом, поэтому все **вертикальные силы** выделим красным цветом.

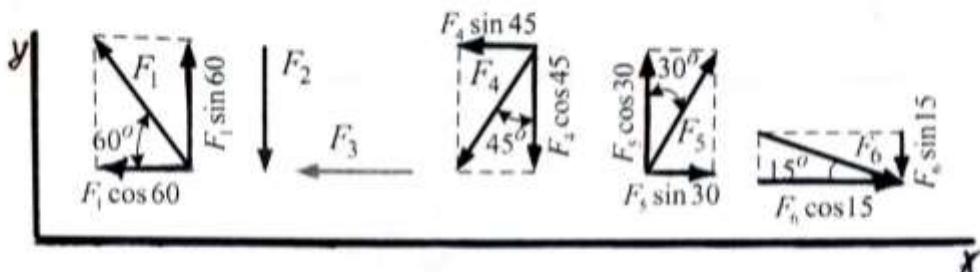


Рисунок 5

Записать проекцию всех сил на ось  $X$ . Правило: все синие силы, сонаправленные с  $X$ , имеют знак плюс, в другую сторону минус. Вправо плюс, влево минус (рис. 6).

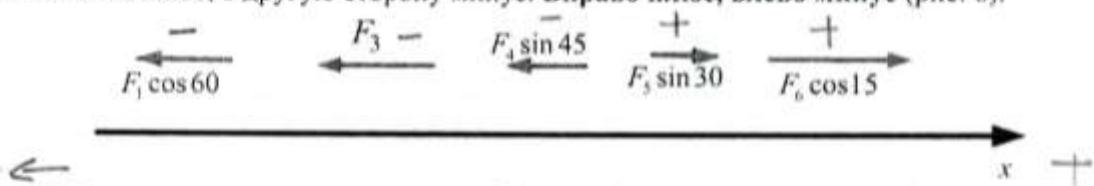


Рисунок 6

Проекция на ось  $X$ :  $-F_1 \cos 60 - F_3 - F_4 \sin 45 + F_5 \sin 30 + F_6 \cos 15$

Записать проекцию всех сил на ось  $Y$ . Правило: все красные силы, сонаправленные с  $Y$ , имеют знак плюс, в другую сторону минус. Вверх плюс, вниз минус (рис. 7).

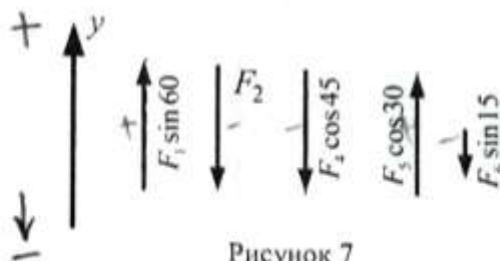


Рисунок 7

Проекция на ось  $Y$ :  $F_1 \sin 60 - F_2 - F_4 \cos 45 + F_5 \cos 30 - F_6 \sin 15$

+      -      -      +      -

#### 4. Составить три уравнения равновесия.

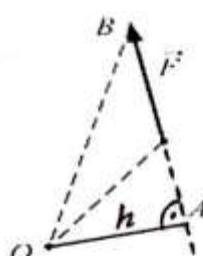
Если тело под действием произвольной системы сил находится в равновесии, то сумма моментов всех сил относительно точки равна нулю.

##### Момент силы относительно точки

Моментом силы относительно точки  $O$  на плоскости называется произведение модуля силы на её плечо относительно этой точки, взятое со знаком плюс или минус:

$$M_O = \pm Fd$$

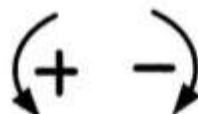
Плечом  $d$  силы  $F$  относительно точки  $O$  называют длину перпендикуляра, опущенного из точки  $O$  на линию действия силы  $AB$ .



Момент силы относительно точки  $O$  будем считать положительным, если сила  $F$  стремится повернуть плоскость чертежа вокруг точки  $O$  в сторону, противоположную движению часовой стрелки, и отрицательным, если по часовой.

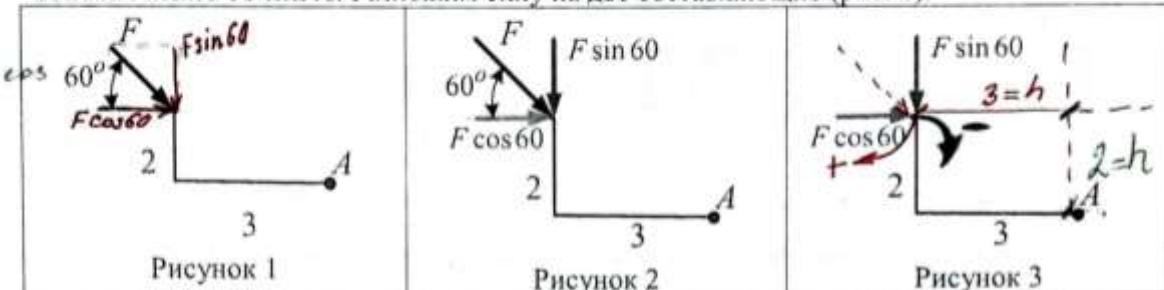
### МОМЕНТ СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ТОЧКИ

**Алгебраический момент силы относительно точки –**  
это алгебраическая величина, равная произведению модуля силы на плечо, взятое со знаком плюс или минус.



#### ПРИМЕР 2. МОМЕНТ СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ТОЧКИ

Задана сила  $F$ , расстояние два и три метра (рис. 1). Записать момент силы  $F$  относительно точки  $A$ . Разложим силу на две составляющие (рис. 2).



Силу  $F$  заменили двумя силами, для них запишем момент относительно точки  $A$  (рис. 3).  
Правило знаков: в точке  $A$  закрепляем чертеж иголкой. Сила  $F \cos 60$  стремится вращать

чертеж по вращению часовой стрелки, значит знак минус . Сила  $F \sin 60$  стремится вращать чертеж против вращения часовой стрелки, значит знак плюс . Плечо – кратчайшее расстояние между точкой и линией действия силы.

Определить плечо силы  $F \sin 60$ .

На силу  $F \sin 60$  положить ручку и перенести ее параллельно до точки  $A$ .

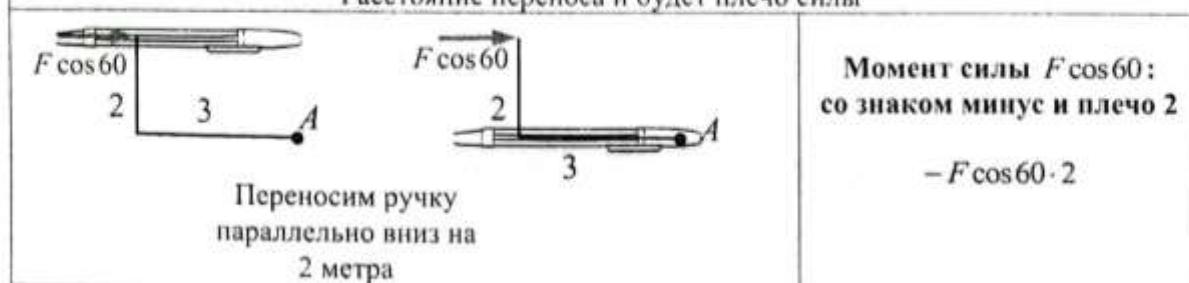
Расстояние переноса и будет плечо силы



Определить плечо силы  $F \cos 60$ .

На силу  $F \cos 60$  положить ручку и перенести ее параллельно до точки  $A$

Расстояние переноса и будет плечо силы



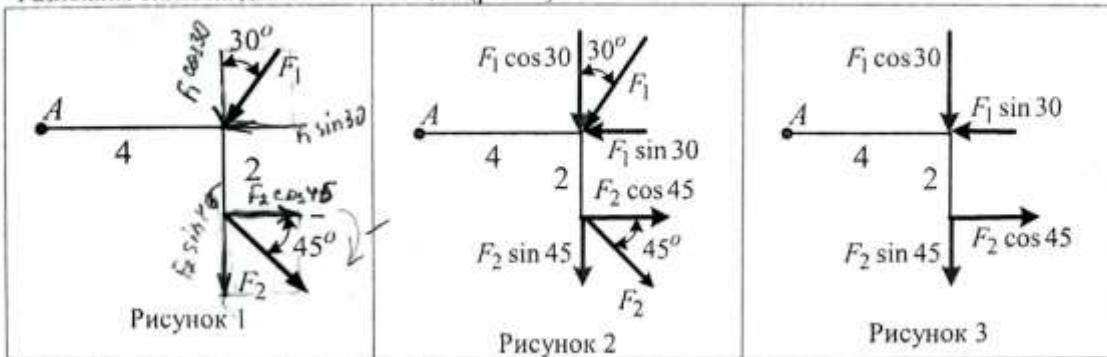
Таким образом, момент силы  $F$  относительно точки  $A$  равен *если*  

$$F \sin 60 \cdot 3 - F \cos 60 \cdot 2$$

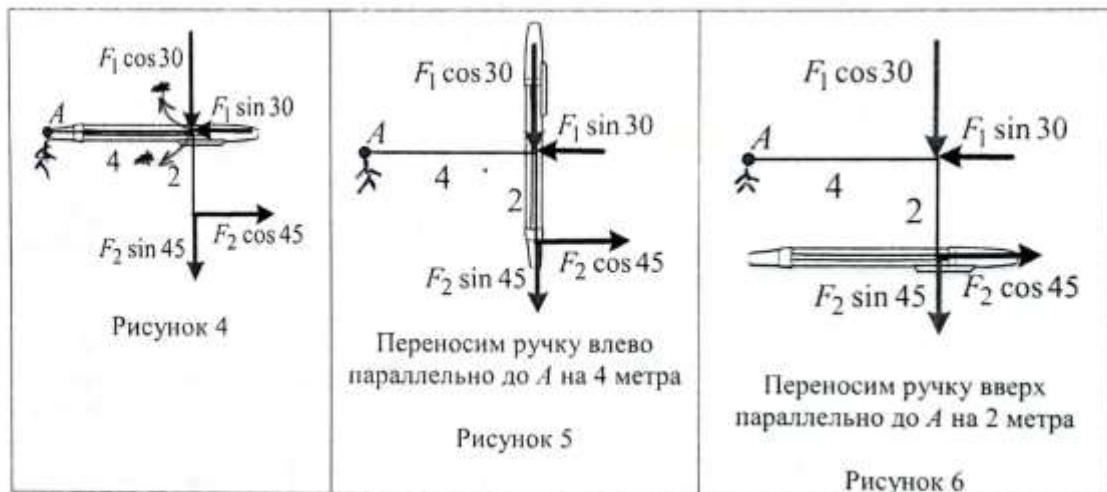
**ПРИМЕР 3. МОМЕНТ СИЛЫ ОТНОСИТЕЛЬНО ТОЧКИ**

Записать моменты сил  $F_1$  и  $F_2$  относительно точки  $A$  (рис. 1).

Разложим силы на две составляющие (рис. 2).



Силы  $F_1$  и  $F_2$  заменили двумя силами, для них запишем момент относительно точки  $A$  (рис. 3).



Положить ручку на силу  $F_1 \sin 30$ , видим, что линия действия силы пересекает точку  $A$ , значит момент будет равен НУЛЮ (не пишем момент силы  $F_1 \sin 30$ ).

Момент силы  $F_1 \cos 30$  со знаком минус и плечом 4:  $-F_1 \cos 30 \cdot 4$  (рис. 5)

Момент силы  $F_2 \sin 45$  со знаком минус и плечом 4:  $-F_2 \sin 45 \cdot 4$  (рис. 5)

Момент силы  $F_2 \cos 45$  со знаком плюс и плечом 2:  $F_2 \cos 45 \cdot 2$  (рис. 6)

Таким образом, момент сил  $F_1$  и  $F_2$  относительно точки  $A$  равен

$$-F_1 \cos 30 \cdot 4 - F_2 \sin 45 \cdot 4 + F_2 \cos 45 \cdot 2$$

Тело, ограничивающее свободу движения другого тела, является по отношению к нему **связью**.

Реакцией связи называют силу или систему сил, выражающую механическое действие связи на тело. При определении направлений реакций связей можно использовать следующее правило: куда запрещено перемещение, оттуда направлена реакция связи.

**Первое уравнение:** сумма моментов всех сил относительно точки.

Момент силы относительно точки равен произведению силы на плечо, взятое со знаком плюс или минус.

**Второе уравнение:** сумма проекций всех сил на горизонтальную ось X равна нулю.

**Третье уравнение:** сумма проекций всех сил на вертикальную ось Y равна нулю.

Если тело под действием произвольной системы сил находится в равновесии, то:

1. Сумма моментов всех сил относительно точки равна нулю  $\sum_{i=1}^n M_{iA} = 0$ .
2. Сумма проекций всех сил на горизонтальную ось равна нулю  $\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0$
3. Сумма проекций всех сил на вертикальную ось равна нулю  $\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0$

## 5. Проверка.

Нужно на рисунке выбрать такую точку, чтобы в ней не пересекались опорные реакции.

Запишем уравнение: сумма моментов всех сила относительно точки.

$$\sum M_{iC} = 0;$$

Подставляем исходные данные и значения опорных реакций, которые нашли в трех уравнениях. При вычислении должен получиться ноль (значит, задача решена верно).

## Варианты для самостоятельного решения

## Вариант 1

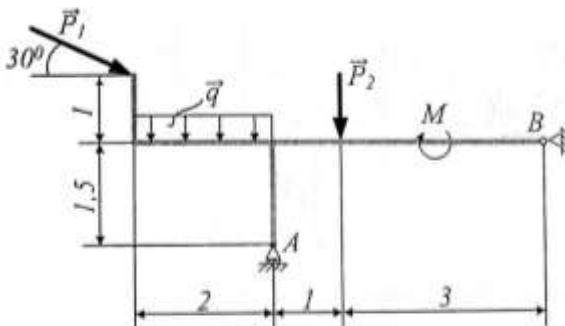


Рисунок 1

*Дано.* Заданы две активные силы  $P_1=10$  кН;  $P_2=12$  кН; момент пары сил  $M = 17$  кН·м; интенсивность равномерно-распределенной нагрузки  $q = 1,6$  кН/м.

*Определить:* опорные реакции.

## Вариант 2

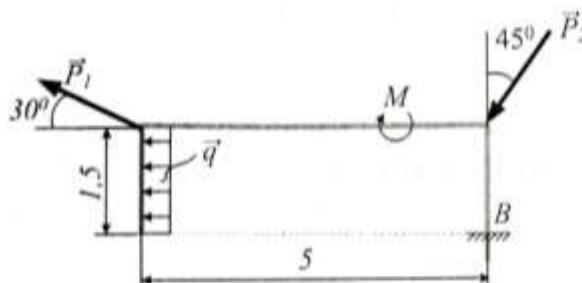


Рисунок 1

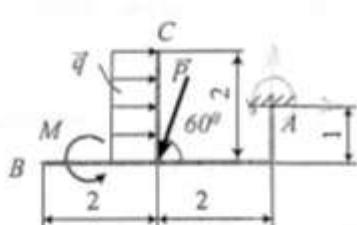
*Дано.* Заданы две активные силы:  $P_1=10$  кН;  $P_2=15$  кН; момент пары сил  $M = 20$  кН·м; интенсивность равномерно-распределенной нагрузки  $q = 3$  кН/м.

*Определить* Опорные реакции.

## Пример решения задачи

## Определение реакций опор твёрдого тела

## ПРИМЕР 1

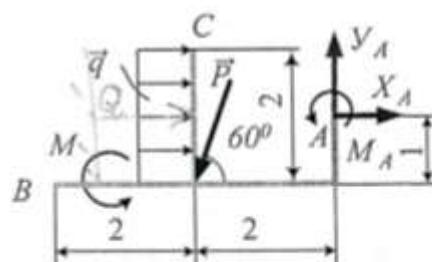


*Дано.* Сила  $P = 20$  кН; момент пары сил  $M = 10$  кН·м; интенсивность равномерно распределенной нагрузки  $q = 2$  кН/м.

*Определить:* реакции опор твёрдого тела.

## ПЛАН РЕШЕНИЯ

- Показать на рисунке опорные реакции. Опора А – жесткая заделка, в ней три реакции  $X_A$ ,  $Y_A$  и  $M_A$ .

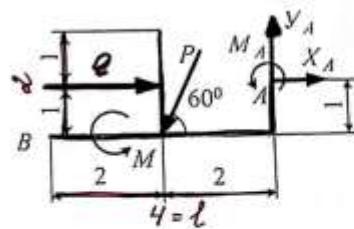


2. Равномерно-распределенную нагрузку заменить равнодействующей силой  $Q$ .

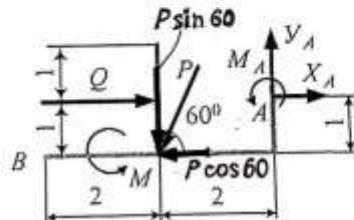
Сила  $Q = q \cdot l$ , где  $l$  – длина участка, на который действует равномерно-распределенная нагрузка.

$$Q = q \cdot l = 2 \cdot 2 = 4 \text{ кН.}$$

Показать силу  $Q$  в середине участка, т.е. на 1 м вверх и 1 м вниз.



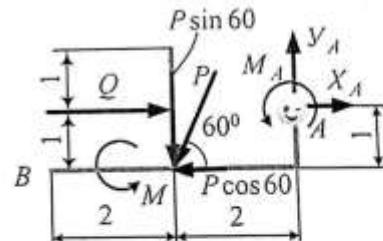
3. Все наклонные силы разложить на две составляющие



4. Составить три уравнения равновесия.

Если тело под действием произвольной системы сил находится в равновесии, то сумма моментов всех сил относительно точки равна нулю.

Первое уравнение: сумма моментов всех сил относительно точки  $A$ .



Момент силы, относительно точки равен произведению силы на плечо,  $(+ \rightarrow)$   
взятое со знаком плюс или минус.

Плечи не будет у сил  $X_A$ ,  $Y_A$  и  $Q$ , линии действия этих сил проходят через точку  $A$  (положите ручку на эти силы, они пересекают точку  $A$ )

$$\sum_{i=1}^n M_{iA} = 0; \quad M_A + M + P \sin 60^\circ \cdot 2 - P \cos 60^\circ \cdot 1 = 0. \quad (1)$$

Из уравнения (1) находим момент в заделке  $M_A$

$$M_A = -M - P \sin 60^\circ \cdot 2 + P \cos 60^\circ = \\ = -10 - 20 \cdot 0,866 \cdot 2 + 20 \cdot 0,5 = -34,36 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

Второе уравнение равновесия: сумма проекций всех сил на горизонтальную ось  $X$  равна нулю.

Синие силы вправо плюс, влево минус



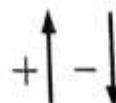
$$\sum_{i=1}^n F_{ix} = 0; \quad Q - P \cos 60^\circ + X_A = 0; \quad (2)$$

Из уравнения (2) определим реакцию  $X_A$  в опоре  $A$

$$X_A = P \cos 60^\circ - Q = 20 \cdot 0,5 - 4 = 6 \text{ кН.}$$

Третье уравнение равновесия: сумма проекций всех сил на вертикальную ось  $Y$  равна нулю.

Красные силы вверх плюс, вниз минус



$$\sum_{i=1}^n F_{iy} = 0; -P \sin 60^\circ + Y_A = 0. \quad (3)$$

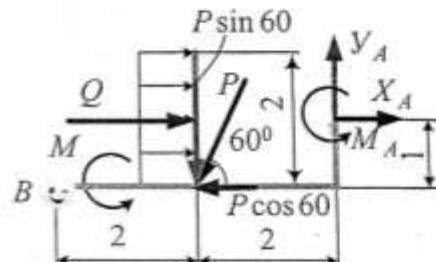
Из уравнения (3) определим реакцию  $Y_A$  в опоре  $A$

$$Y_A = P \sin 60^\circ = 20 \cdot \sin 60 = 17,32 \text{ кН.}$$

**Проверка:** На рисунке выбрать точку, чтобы в ней не пересекались опорные реакции.

Выбрали точку  $B$ . Относительно точки  $B$  записать сумму моментов всех сил.

$$\sum M_{iB} = 0;$$



$$M - Q \cdot 1 - P \sin 60 \cdot 2 + M_A + Y_A \cdot 4 - X_A \cdot 1 = 0. \quad (4)$$

Подставляем исходные данные и значения опорных реакций, которые сейчас нашли. При вычислении должен получиться ноль.

$$10 - 4 \cdot 1 + 20 \cdot 0,866 \cdot 2 - 34,36 + 17,32 \cdot 4 - 6 = 0.$$

При вычислении получился ноль, задача решена верно.