1. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Основные определения

Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов. Числа, составляющие матрицу, называются элементами матрицы.

Матрицы обозначаются прописными (заглавными) буквами латинского алфавита, например, A, B, C, …, а для обозначения элементов матрицы используются строчные буквы с двойной индексацией: a_{ij}, где i - номер строки,
j - номер столбца.

$$\underset{m\times n}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mj} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

или, в сокращенной записи,

$A = (a_{ij})$; $i = 1,2,\dots,m$; $j = 1,2,\dots,n$.

Например, $\underset{2\times3}{A} = \begin{pmatrix} 7 & 0 & -3 \\ 3 & -5 & 8 \end{pmatrix}$. Наряду с круглыми скобками используются и другие обозначения матрицы: $[\ ]$, $\|\ \|$.

Две матрицы A и B одного размера называются **равными,** если они совпадают поэлементно, т.е. $a_{ij} = b_{ij}$ для любых $i = 1,2,\dots m$; $j = 1,2,\dots,n$.

Виды матриц. Матрица, состоящая из одной строки, называется **матрицей-строкой (вектором-строкой),** а из одного столбца – **матрицей–столбцом (вектором-столбцом):**

$A = (a_{11}\, a_{12}, \dots, a_{1n})$ – матрица-строка; $B = \begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \dots \\ b_{m1} \end{pmatrix}$ – матрица-столбец.

Матрица называется **квадратной** n-го порядка, если число её строк равно числу столбцов и равно n.

Например, $A = \begin{pmatrix} -1 & 7 & 4 \\ 0 & 5 & -7 \\ 4 & 8 & 3 \end{pmatrix}$ - квадратная матрица третьего порядка.

Элементы матрицы a_{ij}, у которых номер столбца равен номеру строки $(i = j)$, называются **диагональными** и образуют **главную диагональ** матрицы. Для квадратной матрицы главную диагональ образуют элементы $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$. Если все недиагональные элементы квадратной матрицы равны нулю, то матрица назы-

вается **диагональной.** Например, $A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -8 \end{pmatrix}$ - диагональная матрица третьего порядка.

Если у диагональной матрицы n-го порядка все диагональные элементы равны единице, то матрица называется **единичной** матрицей n-го порядка, она обозначается буквой E.

Например, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ - единичная матрица третьего порядка.

Матрица любого размера называется **нулевой**, или **нуль-матрицей,** если все её элементы равны нулю: $\underset{m\times n}{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}$.

Операции над матрицами.
Умножение матрицы на число

Произведением матрицы A на число α называется матрица $B = \alpha A$, элементы которой $b_{ij} = \alpha a_{ij}$ при $i = 1,2,\ldots,m;$ $j = 1,2,\ldots,n$. Например, если $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$, то $5A = \begin{pmatrix} -10 & 20 \\ 15 & 40 \end{pmatrix}$.

Следствие. Общий множитель всех элементов матрицы можно выносить за знак матрицы.

Например, $\begin{pmatrix} 20 & 12 & 6 \\ 52 & 2 & 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 10 & 6 & 3 \\ 26 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

В частности, произведение матрицы A на число 0 есть нулевая матрица, т.е. $0 \cdot A = O$.

Сложение матриц. Суммой двух матриц A и B одинакового размера $m \times n$ называется матрица $C = A + B$, элементы которой $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ при $i = 1,2,\ldots,m;$ $j = 1,2,\ldots,n$ (т.е. матрицы складываются поэлементно).

Например, $A=\begin{pmatrix}2 & 3 & 0\\ 6 & 5 & 6\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1 & -4\\ 2 & 5 & 1\end{pmatrix}$, $C=A+B=\begin{pmatrix}2 & 4 & -4\\ 8 & 10 & 7\end{pmatrix}$.

В частном случае $A+O=A$.

Вычитание матриц. **Разность** двух матриц одинакового размера определяется через предыдущие операции: $A-B=A+(-1)\cdot B$.

Умножение матриц. **Умножение** матрицы A на матрицу B определено, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй. Тогда **произведением матриц** $\underset{m\times k}{A}\cdot\underset{k\times n}{B}$ называется такая матрица $\underset{m\times n}{C}$, каждый элемент которой c_{ij} равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B:

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{ik}b_{kj}=\sum_{s=1}^{k}a_{is}b_{sj},\quad i=1,2,\ldots,m;\quad j=1,2,\ldots,n.$$

Пример. Вычислить произведение матриц $A\cdot B$,

где $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\ 3 & 4 & 0\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}3 & 0 & 1\\ 5 & 4 & 4\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}$.

Решение. Найдем размер матрицы-произведения (если умножение матриц возможно): $\underset{2\times3}{A}\cdot\underset{3\times3}{B}=\underset{2\times3}{C}$. Вычислим элементы матрицы-произведения C, умножая элементы каждой строки матрицы A на соответствующие элементы столбцов матрицы B следующим образом:

$$\tilde{N}=\begin{pmatrix}(-1)\cdot3+0\cdot5+2\cdot(-2) & (-1)\cdot0+0\cdot4+2\cdot0 & (-1)\cdot1+0\cdot4+2\cdot1\\ 3\cdot3+4\cdot5+0\cdot(-2) & 3\cdot0+4\cdot4+0\cdot0 & 3\cdot1+4\cdot4+0\cdot1\end{pmatrix}.$$

Получаем $C=\begin{pmatrix}-7 & 0 & 1\\ 29 & 16 & 19\end{pmatrix}$.

Многие свойства, присущие операциям над числами, справедливы и для операций над матрицами (что следует из определений этих операций):

1. A+B=B+A. 2. (A+B)+C=A+(B+C). 3. α (A+B)=$\alpha A+\alpha B$.
4. A(B+C)=AB+AC. 5. (A+B)C=AC+BC. 6. $\alpha(AB)=(\alpha A)B=A(\alpha B)$.
7. A(BC)=(AB)C.

Однако имеются и отличия.

а) Если произведение матриц AB существует, то после перестановки сомножи-телей местами произведение матриц BA может и не существовать. Действитель-но, в примере получили произведение матриц $A_{2\times3}\cdot B_{3\times3}$, а произведение $B_{3\times3}\cdot A_{2\times3}$ не существует, так как число столбцов первой матрицы не совпадает с числом строк второй матрицы.

б) Если даже произведения AB и BA существуют, то они могут быть матрицами разных размеров.

в) Когда оба произведения AB и BA существуют и оба – матрицы одинакового размера (это возможно только при умножении квадратных матриц A и B одного порядка), **коммутативный (переместительный) закон умножения, вообще говоря, не выполняется,** т.е. $A \cdot B \neq B \cdot A$.

В частном случае коммутативным законом обладает произведение любой квадратной матрицы $\grave{A}$ n-го порядка на единичную матрицу E того же порядка, причем это произведение равно A: $AE=EA=A$.

Таким образом, единичная матрица играет при умножении матриц ту же роль, что и число 1 при умножении чисел.

г) Произведение двух ненулевых матриц может равняться нулевой матрице, т.е. из того, что $A \cdot B = O$, не следует , что $A=O$ или $B=O$. Например,

$$\grave{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \neq O; \qquad \hat{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \neq O, \quad \hat{\imath}\hat{\imath} \quad \grave{A}\hat{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = O.$$

Возведение в степень. Целой положительной степенью $A^m (m > 1)$ квадратной матрицы A называется произведение m матриц, равных A, т.е. $A^m = A \cdot A \cdot \ldots \cdot A$.

Заметим, что операция возведения в степень определяется только для квадратных матриц. По определению полагают $A^0 = E$, $A^1 = A$. Нетрудно показать, что $A^m \cdot A^k = A^{m+k}$, $(A^m)^k = A^{mk}$.

Пример. Найти A^2, где $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение. $A^2 = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 24 & 32 \end{pmatrix}$. Необходимо заметить, что из ра- венства $A^m = O$ еще не следует, что матрица $A=O$.

Транспонирование матрицы – переход от матрицы A к матрице A', в которой строки и столбцы поменялись местами с сохранением порядка. Матрица A' называется **транспонированной** относительно матрицы A:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Из определения следует, что если матрица A имеет размер $m \times n$, то транспо- нированная матрица A' имеет размер $n \times m$.

Например, $A_{2\times3}=\begin{pmatrix}7 & 2 & -3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}$; $A'_{3\times2}=\begin{pmatrix}7 & 4\\ 2 & 5\\ -3 & 6\end{pmatrix}$. В литературе встречаются и другие обозначения транспонированной матрицы, например $A^{т}$.

Свойства операции транспонирования:

1) $(A')'=A.$ 2) $(\alpha A)'=\alpha A'.$ 3) $(A+B)'=A'+B'$ 4) $(AB)'=B'A'.$

Определители квадратных матриц

Необходимость введения определителя – числа, характеризующего квадратную матрицу А, тесно связано с решением систем линейных уравнений.

Определитель матрицы А обозначается $|A|$, Δ или det A.

Определителем матрицы первого порядка $A=(a_{11})$, или **определителем первого порядка**, называется элемент a_{11}: $\Delta_1=|A|=a_{11}$. Например, пусть $A=(8)$, тогда $\Delta_1=|A|=8$.

Определителем матрицы второго порядка $A=(a_{ij})$, или **определителем второго порядка**, называется число, которое отыскивается по формуле

$\Delta_2=|A|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$. Например, пусть $A=\begin{pmatrix}-2 & 8\\ 1 & 5\end{pmatrix}$,

тогда $\Delta_2=|A|=\begin{vmatrix}-2 & 8\\ 1 & 5\end{vmatrix}=-2\cdot5-8\cdot1=-18.$

Пусть дана квадратная матрица третьего порядка $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$.

Определителем матрицы третьего порядка $A=(a_{ij})$**,** или **определителем третьего порядка,** называется число, которое находится по формуле

$$\Delta_3=|A|=a_{11}\cdot\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}-a_{12}\cdot\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}+a_{13}\cdot\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}.$$

Пример. Вычислить определитель третьего порядка $|A|=\begin{vmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & 4 & 2\end{vmatrix}$.

Решение. $\Delta=1\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & 2\end{vmatrix}-(-1)\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{vmatrix}+3\cdot\begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & 4\end{vmatrix}=1\cdot0+1\cdot3+3\cdot6=21.$

Определитель третьего порядка удобно вычислять по правилу треугольников (или по правилу Сарруса). Покажем это на схеме

$$\begin{vmatrix}\circ&\circ&\circ\\\circ&\circ&\circ\\\circ&\circ&\circ\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\bullet&\circ&\circ\\\circ&\bullet&\circ\\\circ&\circ&\bullet\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\circ&\bullet&\circ\\\circ&\circ&\bullet\\\bullet&\circ&\circ\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\circ&\circ&\bullet\\\bullet&\circ&\circ\\\circ&\bullet&\circ\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}\circ&\circ&\bullet\\\circ&\bullet&\circ\\\bullet&\circ&\circ\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}\circ&\bullet&\circ\\\bullet&\circ&\circ\\\circ&\circ&\bullet\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}\bullet&\circ&\circ\\\circ&\circ&\bullet\\\circ&\bullet&\circ\end{vmatrix}.$$

Например,

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\-1&0&1\\2&4&5\end{vmatrix}=1\cdot0\cdot5+2\cdot1\cdot2+(-1)\cdot4\cdot3-2\cdot0\cdot3-(-1)\cdot2\cdot5-4\cdot1\cdot1=$$

$$=0+4-12-0+10-4=-2.$$

Для того, чтобы ввести понятие определителя более высокого порядка, потре- буются некоторые дополнительные понятия.

Минором M_{ij} **элемента** a_{ij} матрицы A n-го порядка называется определитель матрицы (n-1)-го порядка, полученной из матрицы A вычеркиванием i-й строки и j-го столбца. Например, минором элемента a_{12} матрицы A третьего порядка будет

$$M_{12}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{21}&a_{23}\\a_{31}&a_{33}\end{vmatrix}=a_{21}a_{33}-a_{31}a_{23}.$$

Каждая матрица n-го порядка имеет n^2 миноров (n-1)-го порядка.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} матрицы n-го порядка называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$: $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$, т.е. алгебраическое дополнение совпадает с минором, если сумма номеров строки и столбца $(i+j)$ - четное число, и отличается от минора знаком, если $(i+j)$ - нечетное число. Например,
$A_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=-M_{23}$; $A_{31}=(-1)^{3+1}M_{31}=M_{31}$.

Пример. Найти алгебраические дополнения всех элементов матрицы

$$A=\begin{pmatrix}1&-1&3\\2&2&1\\1&4&2\end{pmatrix}.$$

Решение

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2&1\\4&2\end{vmatrix}=0;\quad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2&1\\1&2\end{vmatrix}=-3;\quad A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2&2\\1&4\end{vmatrix}=6;$$

$$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix}-1&3\\4&2\end{vmatrix}=14;\quad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1&3\\1&2\end{vmatrix}=-1;\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1&-1\\1&4\end{vmatrix}=-5;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-1&3\\2&1\end{vmatrix}=-7;\quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1&3\\2&1\end{vmatrix}=5;\quad A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1&-1\\2&2\end{vmatrix}=4.$$

Определителем квадратной матрицы А n-го порядка называется число, равное сумме произведений элементов 1-й строки на их алгебраические дополнения: $\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{s=1}^{n} a_{1S}A_{1S}$ (разложение по элементам 1-й строки).

Так, например, вычисление определителя 4-го порядка сведется к вычислению четырех определителей 3-го порядка.

Знание свойств определителей позволит избежать громоздких вычислений.

Свойства определителей

1. Если какая-нибудь строка (столбец) матрицы состоит из одних нулей, то её определитель равен нулю.
2. Если все элементы какой-либо строки (столбца) матрицы умножить на число α, то её определитель умножится на это число α.

Замечание. За знак определителя можно выносить общий множитель любой строки или столбц; за знак матрицы можно выносить общий множитель лишь всех элементов.

3. При транспонировании матрицы её определитель не изменяется: $|A'| = |A|$.
4. При перестановке двух строк (столбцов) матрицы её определитель меняет знак на противоположный.
5. Если элементы двух строк (столбцов) матрицы пропорциональны (в частно-

сти, равны), то её определитель равен нулю.

6. Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов любой её строки (столбца) на их алгебраические дополнения, т.е. $\Delta = \sum_{s=1}^{n} a_{is}A_{is}$.
7. Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) матрицы на

алгебраические дополнения элементов другой строки (столбца) этой матрицы равна нулю, т. е. $\sum_{S=1}^{n} a_{iS}A_{jS} = 0$ при $i \neq j$.

8. Определитель матрицы не изменится, если к элементам какой-либо строки (столбца) матрицы прибавить элементы другой строки (столбца), предварительно умноженные на одно и то же число.

9.Если каждый элемент i-й строки матрицы представляет собой сумму двух слагаемых, то определитель этой матрицы равен сумме определителей таких матриц: у первой из них i-я строка состоит из первых слагаемых, а у второй – из вторых. Все остальные строки у всех трех матриц не изменятся.

Например, $\begin{vmatrix} a_{11} + в_{11} & a_{12} + в_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} в_{11} & в_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

10. Сумма произведений произвольных чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n$ на алгебраические дополнения элементов любой строки (столбца) равна определителю матрицы,
полученной из данной заменой элементов этой строки (столбца) на числа $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

11. Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению их определителей: $|C| = |A| \cdot |B|$, где $C = A \cdot B$; A и B - матрицы n-го порядка.

Замечание. Из свойства 10 следует, что даже если $AB \neq BA$, $|AB| = |BA|$.

Перечисленные свойства определителей позволяют существенно упростить их вычисление, особенно определителей высоких порядков. При вычислении оп-ределителей целесообразно так преобразовать исходную матрицу с помощью свойств 1-9, чтобы преобразованная матрица имела строку (или столбец), содержа-щую как можно больше нулей, а потом найти определитель разложением по этой строке (столбцу).

Пример. Вычислить определитель четвертого порядка
$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 6 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 4 & 6 \end{vmatrix}.$$

Решение. Преобразуем матрицу так, чтобы в 3-й строке все элементы, кроме одного, обращались в нуль. Для этого умножим, например, элементы 3-го столбца на (-4) и на 2 и прибавим их соответственно к элементам 1-го и 2-го столбцов. Раскладывая полученный определитель по элементам третьей строки, найдем
$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 6 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 4 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 12 & 2 & -2 & 4 \\ 13 & -4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -10 & 12 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 12 & 2 & 4 \\ 13 & -4 & 1 \\ -10 & 12 & 6 \end{vmatrix}.$$

Полученный определитель третьего порядка можно вычислить по правилу тре-угольников или с помощью свойства 6, однако можно продолжить упрощение матрицы. «Обнулим» в матрице третьего порядка элементы 2-й строки (кроме одного). Для этого элемента 3-го столбца матрицы, предварительно умножив на
(-13) и на 4, сложим с элементами 1-го и 2-го столбцов соответственно:
$$|A| = \begin{vmatrix} 12 & 2 & 4 \\ 12 & -4 & 1 \\ -10 & 12 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -40 & 18 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ -88 & 36 & 6 \end{vmatrix}.$$

Раскладывая по элементам второй строки и вынося общие множители, получаем

$$|A| = 1\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}-40 & 18\\ -88 & 36\end{vmatrix} = (-1)\cdot(-8)\cdot 18\cdot\begin{vmatrix}5 & 1\\ 11 & 2\end{vmatrix} = -144.$$

Пример. Вычислить определитель треугольной матрицы

$$\begin{vmatrix}2 & -3 & 5 & 0\\ 0 & 3 & -2 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{vmatrix}.$$

(Квадратная матрица называется треугольной, если все ее элементы, расположенные ниже (или выше) главной диагонали, равны нулю).

Раскладывая по первому столбцу, получаем

$$\begin{vmatrix}2 & -3 & 5 & 0\\ 0 & 3 & -2 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{vmatrix} = 2\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}3 & -2 & 1\\ 0 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 4\end{vmatrix} + 0 + 0 + 0 = 2\cdot 3\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 0 & 4\end{vmatrix} + 0 + 0 =$$

$$= 2\cdot 3(-1)\cdot 4 + 0 = -24.$$

На частном примере убеждаемся в том, что определитель треугольной (и, очевидно, диагональной) матрицы равен произведению элементов главной диагонали.

Обратная матрица

Для каждого числа $a \neq 0$ существует обратное число a^{-1}, такое, что произведе-ние $a\cdot a^{-1} = 1$. Для квадратных матриц тоже вводится аналогичное понятие.

Определение. Матрица A^{-1} называется **обратной по отношению к квадратной матрице** A, если при умножении этой матрицы на данную как справа, так и слева получается единичная матрица: $A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1} = E$.

Из определения следует, что только квадратная матрица имеет обратную; в этом случае и обратная матрица является квадратной того же порядка.

Однако не каждая квадратная матрица имеет обратную. Если $a \neq 0$ является необходимым и достаточным условием существования числа a^{-1}, то для существования матрицы A^{-1} таким условием является требование $|A| \neq 0$.

Если определитель матрицы отличен от нуля $(|A| \neq 0)$, то такая квадратная
матрица называется **невырожденной**, или **неособенной**; в противном случае $(\text{при } |A| = 0)$ **- вырожденной**, или **особенной**.

Теорема (необходимое и достаточное условие существования обратной матрицы). Обратная матрица A^{-1} существует (и единственна) тогда и только тогда, когда исходная матрица A невырожденная. Можно доказать, что обратная матрица имеет вид $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\tilde{A};\ (|A|\neq 0),$

(1)

где $\tilde{A}$ - квадратная матрица n-го порядка, элементами которой являются алгебраи-ческие дополнения элементов матрицы A', транспонированной к A: $\tilde{a}_{ij}=A'_{ij}=A_{ji}$, $i=\overline{1,n}$; $j=\overline{1,n}$. Матрицу $\tilde{A}$ называют присоединенной или союз- ной к матрице A.

Алгоритм вычисления обратной матрицы

1. Находим определитель исходной матрицы. Если $|A|=0$, то матрица A – вы-
рожденная и обратная матрица A^{-1} не существует. Если $|A|\neq 0$, то матрица A – невырожденная и обратная матрица существует.

2. Находим матрицу A', транспонированную к A.

3. Находим алгебраические дополнения элементов транспонированной матрицы $A'_{ij}=A_{ji}\ (i=1,2,\ldots,n;\ j=1,2\ldots n)$ и составляем из них присоединенную матрицу $\tilde{A}$: $\tilde{a}_{ij}=A'_{ij}=A_{ji}(i=1,2,\ldots,n;\ j=1,2,\ldots n)$.

4. Вычисляем обратную матрицу по формуле (1).

5. Проверяем правильность вычисления обратной матрицы A^{-1} исходя из ее определения $A^{-1}A=A\cdot A^{-1}=E$ (п. 5 не обязателен).

Пример. Найти матрицу, обратную к данной: $A=\begin{pmatrix}1 & -1 & 3\\ 2 & 2 & 1\\ 1 & 4 & 2\end{pmatrix}$.

Решение. 1. Определитель матрицы $|A|=21\neq 0$, т. е. матрица A – невырожден-ная и обратная матрица A^{-1} существует.

2. Находим матрицу A', транспонированную к A: $A'=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ -1 & 2 & 4\\ 3 & 1 & 2\end{pmatrix}$.

3. Находим алгебраические дополнения элементов матрицы A' и составляем из них присоединенную матрицу $\tilde{A}$, учитывая, что $A'_{ij}=A_{ji}$: $\tilde{A}=\begin{pmatrix}0 & 14 & -7\\ -3 & -1 & 5\\ 6 & -5 & 4\end{pmatrix}$.

4. Вычисляем обратную матрицу $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot\tilde{A}$:

$$A^{-1}=\frac{1}{21}\begin{pmatrix}0 & 14 & -7\\ -3 & -1 & 5\\ 6 & -5 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{0}{21} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ -\frac{3}{21} & -\frac{1}{21} & \frac{5}{21}\\ \frac{6}{21} & -\frac{5}{21} & \frac{4}{21}\end{pmatrix}.$$

5. Поверяем правильность вычисления обратной матрицы по формулам: $A^{-1}\cdot A=A\cdot A^{-1}=E$ (рекомендуем в этом убедиться самостоятельно). Для невырожденных матриц выполняются следующие свойства: 1) $\left|A^{-1}\right|=\frac{1}{|A|}$;

2) $(A^{-1})^{-1}=A$; 3) $\left(A^{m}\right)^{-1}=\left(A^{-1}\right)^{m}$; 4) $\left(A^{-1}\right)'=(A')^{-1}$; 5) $(AB)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$.

Ранг матрицы

Для решения и исследования ряда математических и прикладных задач важное
значение имеет понятие ранга матрицы.

В матрице А размером $m\times n$ вычеркиванием каких-либо строк и столбцов можно вычленить квадратные подматрицы k-го порядка, где $k\le\min(m;n)$. Определители таких подматриц называются **минорами k-го порядка матрицы А**.

Например, из матрицы $A_{3\times4}$ можно получить подматрицы первого, второго и третьего порядков.

Рангом матрицы А называется наивысший порядок отличных от нуля миноров этой матрицы.

Ранг матрицы А обозначается rang A, rg A или r (A). Из определения следует:

а) ранг матрицы $A_{m\times n}$ не превосходит меньшего из ее размеров, т. е. $r(A)\le\min(m;n)$;

б) $r(A)=0$ тогда и только тогда, когда элементы матрицы равны нулю, т.е. А=О;

в) для квадратной матрицы n-го порядка $r(A)=n$ тогда и только тогда, когда матрица А – невырожденная.

Пример. Вычислить ранг матрицы $A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 0 & 4\\ 3 & 2 & 0 & 1\\ 2 & -1 & 0 & -3\end{pmatrix}$.

Решение. Для матрицы $A_{3\times4}$ $r(A)\le\min(3;4)=3$. Проверим, равен ли ранг трём, для этого вычислим все миноры третьего порядка, т. е. определители всех подматриц третьего порядка (их всего 4, они получаются при вычеркивании одного из столбцов матрицы):

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Поскольку все миноры третьего порядка нулевые, $r(A) \le 2$. Так как существует ненулевой минор второго порядка, например $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -7 \ne 0$, то $r(A) = 2$.

В общем случае определение ранга матрицы перебором всех миноров достаточно трудоемко. Для облегчения этой задачи используются преобразова- ния, сохраняющие ранг матрицы. Назовем **элементарными преобразованиями** матрицы следующие:

1. Отбрасывание нулевой строки (столбца).
2. Умножение всех элементов строки (столбца) матрицы на число, не равное нулю.
3. Изменение порядка строк (столбцов) матрицы.
4. Прибавление к каждому элементу одной строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на любое число.
5. Транспонирование матрицы.

Теорема. Ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях матрицы.

При изучении свойств определителей было показано, что при преобразованиях квадратных матриц их определители либо сохраняются, либо умножаются на чис-ло, не равное нулю. В результате сохраняется наивысший порядок отличных от нуля миноров исходной матрицы, т. е. ее ранг не изменяется.

С помощью элементарных преобразований можно привести матрицу к так назы-ваемому ступенчатому виду, когда вычисление ее ранга не представляет труда.

Матрица A называется **ступенчатой**, если она имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1k} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rk} \end{pmatrix},$$

где $a_{ii} \ne 0, i = 1, 2, \dots, r;\ r \le k$.

Замечание. Условие $r \le k$ всегда может быть достигнуто транспонированием матрицы.

Очевидно, что ранг ступенчатой матрицы равен r, так как имеется минор r-го порядка, не равный нулю:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{rr} \neq 0 .$$

Покажем на примере вычисление ранга матрицы с помощью элементарных преобразований.

Пример. Найти ранг матрицы $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0 \\ -2 & 1 & 8 & -5 & 3 \end{pmatrix}$.

Решение. 1. Если $\mathrm{a}_{11} = 0$, то при перестановке строк или столбцов добиваются того, что $\mathrm{a}_{11} \neq 0$. В данном примере поменяем местами, например, 1-ю и 2-ю строки матрицы .

2. Если $\mathrm{a}_{11} \neq 0$, то, умножая элементы 2-й, 3-й и 4-й строк на подходящие числа (именно на $-\mathrm{a}_{21}/\mathrm{a}_{11} = 0,\ -\mathrm{a}_{31}/\mathrm{a}_{11} = 2,\ -\mathrm{a}_{41}/\mathrm{a}_{11} = 1$) и прибавляя полученные числа соответственно к элементам 2-й, 3-й и 4-й строк, добьемся того, чтобы все элементы 1-го столбца (кроме a_{11}) равнялись нулю:

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ -4 & 5 & 7 & -10 & 0 \\ -2 & 1 & 8 & -5 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 9 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 9 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

3. Если в полученной матрице $\mathrm{a}_{22} \neq 0$ (в данном случае $a_{22} = -1 \neq 0$), то, умножая элементы 3-й и 4-й строк на подходящие числа (а именно на $-\mathrm{a}_{32}/\mathrm{a}_{22} = -3,\ -\mathrm{a}_{42}/\mathrm{a}_{22} = -3$), добьемся того, чтобы все элементы 2-го столбца
(кроме $\mathrm{a}_{12}, \mathrm{a}_{22}$) равнялись нулю. Если в процессе преобразований получаются строки (или столбцы), целиком состоящие из нулей (как в данном примере), то отбрасываем эти строки (или столбцы):

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Последняя матрица имеет ступенчатый вид и содержит миноры второго порядка, не равные нулю, например $\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$. Поэтому ранг полученной ступенчатой, а следовательно, и данной матрицы равен двум.