## Образцы решения задач типового расчета

**Задача 1.** Найти, если это возможно, произведение матриц AB и BA:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 3\\ 5 & 7 & 8\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 7\\ 10 & 5 & 15\end{pmatrix}.$$

**Решение.** В матрице A 3 строки и 3 столбца, т.е. ее размерность $(3\times 3)$; размерность матрицы B $(2\times 3)$. Для существования произведения $A\times B$ нужно, чтобы число столбцов левой матрицы было равно числу строк правой матрицы. В данном случае $(3\times 3)\cdot(2\times 3)$, внутренние индексы различны $3\neq 2$. Поэтому произведения AB не существует. Произведение BA существует, т.к. $(2\times 3)\cdot(3\times 3)$ внутренние индексы равны $(3=3)$, и размерность матрицы C = BA равна $2\times 3$

$$BA=\begin{pmatrix}1 & 2 & 7\\ 10 & 5 & 15\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & -1 & 3\\ 5 & 7 & 8\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot 1+2\cdot 0+7\cdot 5 & 1\cdot 2+2\cdot(-1)+7\cdot 7 & 1\cdot 3+2\cdot 3+7\cdot 8\\ 10\cdot 1+5\cdot 0+15\cdot 5 & 10\cdot 2+5\cdot(-1)+15\cdot 7 & 10\cdot 3+5\cdot 3+15\cdot 8\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}36 & 49 & 65\\ 85 & 120 & 165\end{pmatrix}.$$

**Задача 2.** Вычислить определитель 4-го порядка:

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & 0 & -6 & 6\\ 2 & 7 & 8 & 10\\ 1 & 0 & 2 & 3\\ -1 & 4 & 5 & 6\end{vmatrix}.$$

**Решение.** Вынесем за знак определителя множитель 2 из первой строки. Тогда

$$\Delta=2\begin{vmatrix}1 & 0 & -3 & 3\\ 2 & 7 & 8 & 10\\ 1 & 0 & 2 & 3\\ -1 & 4 & 5 & 6\end{vmatrix} \quad \begin{matrix}(-2) & (-1) & (1)\\ + & + & +\end{matrix}.$$

Прибавим к элементам второй строки элементы 1-й строки, умноженные на (-2); к элементам третьей строки-элементы первой строки, умноженные на (-1); к элементам четвертой строки – элементы первой строки. В результате этого в первом столбце все элементы, кроме первого, будут нулевыми. Разложим определитель по первому столбцу. Таким образом, сводим вычисление определителя 4-го порядка к вычислению определителя 3-го порядка.

$$\Delta = 2\begin{vmatrix}1 & 0 & -3 & 3\\ 0 & 7 & 14 & 4\\ 0 & 0 & 5 & 0\\ 0 & 4 & 2 & 9\end{vmatrix} = 2\cdot 1\cdot(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}7 & 14 & 4\\ 0 & 5 & 0\\ 4 & 2 & 9\end{vmatrix} = 2\cdot 5\cdot(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}7 & 4\\ 4 & 9\end{vmatrix} =$$

$$= 10\cdot\left(63-16\right) = 470.$$

При вычислении был разложен определитель третьего порядка по элементам второй строки. В типовом расчете не всегда полученный определитель 3-го порядка будет иметь какую-нибудь строчку или столбец с двумя нулями. Поэтому для его вычисления можно воспользоваться правилом треугольников или с помощью элементарных преобразований получить в каком-либо ряду два нулевых элемента.

Например, $\begin{vmatrix}0 & 1 & 2\\ 5 & 7 & 6\\ 3 & 2 & -1\end{vmatrix} = 0\cdot\left(-7\right) + 5\cdot 2\cdot 2 + 6\cdot 3 - 6\cdot 7 - 6\cdot 2\cdot 0 - 5\cdot(-1) =$

$$= +20 + 18 - 42 + 5 = 1$$

или $\begin{vmatrix}0 & 1 & 2\\ 5 & 7 & 6\\ 3 & 2 & -1\end{vmatrix}\begin{array}{l}(-7)\ (-2)\\ +\quad +\\ \end{array} = \begin{vmatrix}0 & 1 & 2\\ 5 & 0 & -8\\ 3 & 0 & -5\end{vmatrix}.$

Умножаем первую строку на (-7) и складываем со второй, и умножаем первую строку на (-2) и складываем с третьей. Раскладываем полученный определитель по второму столбцу:

$$\begin{vmatrix}0 & 1 & 2\\ 5 & 0 & -8\\ 3 & 0 & -5\end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}5 & -8\\ 3 & -5\end{vmatrix} = -\left(-25+24\right) = 1.$$

## Контрольные задания

**Задача 1.** Найти, если это возможно, произведение матриц AB и BA.

| | |
|---|---|
| 1. $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. | |
| 2. $A=\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin 2\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} \cos 2\alpha & \sin 2\alpha \\ -\sin 2\alpha & \cos 2\alpha \end{pmatrix}$. | |
| 3. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -2 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$. | |
| 4. $A=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ . | 5. $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 10 \\ 3 & 5 & 7 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. |
| 6. $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. | |
| 7. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$ . | 8. $A=\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 1 \\ 0 & \sqrt{3} & 1 \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$. |
| 9. $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 1 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & -1 \\ -5 & -3 & -2 \end{pmatrix}$. | |
| 10. $2A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2 & -2 & -8 \\ 0 & -4 & -6 \end{pmatrix}$, $3B=\begin{pmatrix} 3 & 9 & 6 \\ 0 & -6 & 9 \\ 9 & -3 & 15 \end{pmatrix}$. | |

11. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & x & x \\ x^2 & x^2 & x^2 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} x^2 & x^2 & x^2 \\ x & x & x \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

12. $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & -5 \\ 1 & 2 & 3 & -4 \\ -1 & -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

13. $A=\begin{pmatrix} a & a & a \\ 1 & 1 & 1 \\ -a & a & -a \end{pmatrix},$ $B=\begin{pmatrix} -a & 1 & a \\ a & 1 & -a \\ -a & 1 & a \end{pmatrix}.$

14. $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$

15. $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 6 & 9 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$

16. $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$

17. $A=\begin{pmatrix} 10 & 20 & 30 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix},$ $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$

18. $A=\begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -5 & -3 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$

19. $A=\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -10 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 5 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$

20. $A=\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \\ 2/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}.$

21. $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$

22. $A=\begin{pmatrix} \mathrm{tg}^2\alpha & \cos^2\alpha \\ \sin^2\alpha & \mathrm{ctg}^2\alpha \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} \cos^2\alpha & \sin^2\alpha \\ \cos^2\alpha & \sin^2\alpha \end{pmatrix}.$

| | |
|---|---|
| 23. $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . | 24. $A=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 7 \\ 1 & 0 & 9 \\ 0 & 6 & 3 \end{pmatrix}.$ |
| 25. $A=\begin{pmatrix} \cos 3\alpha & \sin 2\alpha \\ -\sin 2\alpha & \cos 3\alpha \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} \cos 3\alpha & \sin 2\alpha \\ -\sin 2\alpha & \cos 3\alpha \end{pmatrix}.$ | |
| 26. $5A=\begin{pmatrix} 0 & 5 & 10 \\ 50 & 10 & 100 \\ 0 & 10 & 20 \end{pmatrix},\ 3B=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$ | |
| 27. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ B=A^2.$ | 28. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & a & a \\ b & b & b \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 1 & a & b \\ 1 & a & b \end{pmatrix}.$ |
| 29. $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & 4 & 4 \\ 8 & 8 & 8 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8 \end{pmatrix}.$ | |
| 30. $A=\begin{pmatrix} -15 & 3 & 0 \\ 1 & 23 & 10 \\ 0 & 10 & 27 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$ | |

**Задача 2.** Вычислить определитель четвертого порядка.

| | | |
|---|---|---|
| 1. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$. | 2. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 & -1 \\ 3 & 0 & 3 & 1 \\ 7 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$. | 3. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ -4 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 7 & 3 & 1 \end{vmatrix}$. |
| 4. $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 3 & -3 \end{vmatrix}$. | 5. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 7 & 2 \\ 4 & 8 & 1 & 1 \\ 9 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$. | 6. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}$. |
| 7. $\begin{vmatrix} 5 & 3 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 7 & 4 & 6 \\ 6 & 1 & 0 & 7 \end{vmatrix}$. | 8. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ -2 & 1 & 4 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 5 \end{vmatrix}$. | 9. $\begin{vmatrix} -1 & -4 & 2 & -5 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 7 & 1 & 6 \\ 9 & 0 & 9 & 5 \end{vmatrix}$. |
| 10. $\begin{vmatrix} 4 & 5 & 7 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 7 & 0 & 2 & 2 \\ -7 & 0 & 4 & -2 \end{vmatrix}$. | 11. $\begin{vmatrix} 10 & 20 & 30 & 40 \\ -1 & -2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & -4 \\ -10 & -20 & 30 & -40 \end{vmatrix}$. | 12. $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 1 \\ 4 & -2 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & 5 & 4 \\ 10 & 1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$. |
| 13. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -7 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & 2 & 3 \\ 6 & 1 & 6 & 0 \end{vmatrix}$. | 14. $\begin{vmatrix} 5 & 7 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & -3 & 6 & 8 \\ 8 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$. | 15. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 1 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix}$. |
| 16. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 5 & 1 \\ 0 & 8 & 1 & 9 \\ 6 & 3 & 1 & -4 \end{vmatrix}$ | 17. $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 5 & 4 & 6 & 3 \\ 2 & 3 & 6 & 4 \\ 1 & 6 & 0 & 3 \end{vmatrix}$. | 18. $\begin{vmatrix} -5 & 5 & 10 & 0 \\ 3 & 6 & 6 & -9 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 8 & 4 \end{vmatrix}$. |

| | | |
|---|---|---|
| 19. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 6 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ 4 & 7 & 8 & 2 \end{vmatrix}$. | 20. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 4 & 7 \\ 6 & -1 & 3 & 2 \\ 8 & 5 & 7 & 4 \end{vmatrix}$. | 21. $\begin{vmatrix} -3 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & -3 \\ 2 & 4 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 4 & 2 \end{vmatrix}$. |
| 22. $\begin{vmatrix} 7 & 5 & 4 & 7 \\ -3 & 1 & 4 & 8 \\ 9 & 1 & 3 & 2 \\ 7 & 5 & 8 & 6 \end{vmatrix}$. | 23. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 9 & 6 & 4 \\ 2 & 7 & 1 & 0 \\ 1 & 9 & 6 & 3 \end{vmatrix}$. | 24. $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & 8 \\ 1 & 9 & 8 & 5 \\ 0 & 9 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & 8 & 7 \end{vmatrix}$. |
| 25. $\begin{vmatrix} 0 & 8 & 1 & 1 \\ 1 & 9 & 9 & 7 \\ 2 & 3 & 2 & 7 \\ 6 & 3 & 6 & 4 \end{vmatrix}$. | 26. $\begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 1 \\ 3 & 1 & 7 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 1 \\ 10 & 5 & 0 & 10 \end{vmatrix}$. | 27. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & 7 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 4 & 2 \end{vmatrix}$. |
| 28. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 3 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$. | 29. $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{6} & \sqrt{8} & \sqrt{2} \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 5 & 1 & 0 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{6} & \sqrt{8} & -\sqrt{2} \end{vmatrix}$. | 30. $\begin{vmatrix} 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 1/3 \\ 2/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 1/5 & 0 & 0 & 4/5 \end{vmatrix}$. |