

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix},$$

где A – матрица коэффициентов при переменных, или матрица системы, X – матрица-столбец переменных; B – матрица-столбец свободных членов.

Так как число столбцов матрицы $A_{m \times n}$ равно числу строк матрицы $X_{n \times 1}$,

их произведение $AX = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}$ есть матрица-столбец.

Элементами

полученной матрицы являются левые части системы (2). На основании определения равенства матриц систему (2) можно записать в виде

$$AX = B. \quad (3)$$

Система n линейных уравнений с n переменными. Метод обратной матрицы и формулы Крамера

Пусть число уравнений системы (2) равно числу переменных, т.е. $m = n$. Тогда матрица системы является квадратной, а ее определитель $\Delta = |A|$ называется **определителем системы**.

Для получения решения системы (2) при $m = n$ предположим, что квадратная матрица системы $A_{n \times n}$ невырожденная, т.е. ее определитель $|A| \neq 0$. В этом случае существует обратная матрица A^{-1} .

Умножая слева обе части матричного равенства (3) на матрицу A^{-1} , получим $A^{-1}(AX) = A^{-1}B$. Так как $A^{-1}(AX) = (A^{-1}A)X = EX = X$, то решением системы методом обратной матрицы будет матрица-столбец

$$X = A^{-1}B. \quad (3)$$

Теорема Крамера. Пусть Δ - определитель матрицы системы (2), а Δ_j - определитель матрицы, получаемой из матрицы A заменой j -го столбца столбцом свободных членов. Тогда, если $\Delta \neq 0$, система имеет единственное решение, определяемое по формулам

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta} \quad (j=1, 2, \dots, n).$$

(4)

Формулы (4) получили название формул Крамера. В соответствии с формулой (1) обратная матрица $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \tilde{A}$, где \tilde{A} - матрица, присоединенная

к матрице A . Так как элементы матрицы \tilde{A} есть алгебраические дополнения элементов матрицы A' , транспонированной к A , запишем равенство (3) в развернутой форме:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что $|A| = \Delta$, получим после умножения матриц

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} b_1 A_{11} + b_2 A_{21} + \dots + b_n A_{n1} \\ b_1 A_{12} + b_2 A_{22} + \dots + b_n A_{n2} \\ \dots \\ b_1 A_{1n} + b_2 A_{2n} + \dots + b_n A_{nn} \end{pmatrix},$$

откуда следует, что для любого j ($j=1,2,\dots,n$)

$$x_j = \frac{1}{\Delta} (b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + \dots + b_n A_{nj}).$$

На основании свойства 10 определителей $b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + \dots + b_n A_{nj} = \Delta_j$, где Δ_j - определитель матрицы, полученной из матрицы A заменой j -го

столбца ($j=1,2,\dots,n$) столбцом свободных членов. Следовательно, $x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}$.

Пример. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases}$$

а) методом обратной матрицы; б) по формулам Крамера.

Решение. а) Обозначим $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix}$. Тогда в

матричной форме данная система имеет вид $AX=B$. Найдем определитель $|A|=5$. Так как $|A| \neq 0$, матрица A - невырожденная, и существует обратная матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}; \quad X = A^{-1} B = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

т. е. решение системы (4; 2; 1).

Шаг 2. Предположим, что $a_{22}^{(1)} \neq 0$ (если это не так, то соответствующей перестановкой уравнений или переменных с изменением их номеров добьемся того, чтобы $a_{22}^{(1)} \neq 0$).

Умножая второе уравнение на подходящие числа $(-a_{32}^{(1)}/a_{22}^{(1)}, -a_{42}^{(1)}/a_{22}^{(1)}, \dots, \dots, -a_{m2}^{(1)}/a_{22}^{(1)})$ и прибавляя полученные уравнения соответственно к третьему, четвертому, ..., m -му уравнению системы, исключим переменную x_2 из всех последующих уравнений, начиная с третьего.

Продолжая процесс последовательного исключения переменных x_3, x_4, \dots, x_{r-1} , после $(r-1)$ -го шага, получим систему

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1r}x_r + a_{1,r+1}x_{r+1} + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2r}^{(1)}x_r + a_{2,r+1}^{(1)}x_{r+1} + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \dots \\ a_{rr}^{(r-1)}x_r + a_{r,r+1}^{(r-1)}x_{r+1} + \dots + a_{rn}^{(r-1)}x_n = b_r^{(r-1)}, \\ \dots \\ 0 = b_{r+1}^{(r-1)}, \\ \dots \\ 0 = b_m^{(r-1)}. \end{array} \right.$$

Число нуль в последних $m-r$ уравнениях означает, что их левые части имеют вид $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \dots + 0 \cdot x_n$. Если хотя бы одно из чисел $b_{r+1}^{(r-1)}, \dots, b_m^{(r-1)}$ не равно нулю, то соответствующее равенство противоречиво, и система (2) несовместна.

Таким образом, для любой совместной системы числа $b_{r+1}^{(r-1)}, \dots, b_m^{(r-1)}$ в системе (5) равны нулю. В этом случае последние $m-r$ уравнений в системе (5) являются тождествами и их можно не принимать во внимание при решении системы (2). Очевидно, что после отбрасывания «лишних» уравнений возможны два случая: а) число уравнений системы (5) равно числу переменных, т. е. $r = n$ (в этом случае система (5) имеет треугольный вид); б) $r < n$ (в этом случае система (5) имеет ступенчатый вид). Переход системы (2) к равносильной ей системе (5) называется **прямым ходом** метода Гаусса, а нахождение переменных из системы (5) – **обратным ходом**.

Преобразования Гаусса удобно проводить, осуществляя преобразования не с самими уравнениями, а с матрицей их коэффициентов. Рассмотрим матрицу

$$A_1 = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right),$$

называемую **расширенной матрицей системы** (2), так как в нее, кроме матрицы системы A , дополнительно включен столбец свободных членов.

Пример. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 18, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8. \end{cases}$$

Решение. Расширенная матрица системы имеет вид

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 2 & 4 & -2 & -3 & 18 \\ 3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & -3 & 2 & 1 & -8 \end{array} \right).$$

Шаг 1. Так как $a_{11} \neq 0$, исключим переменную x_1 из всех строк, начиная со второй, умножая вторую, третью и четвертую строки матрицы на числа (-2) , (-3) , (-2) и прибавляя полученные строки соответственно ко второй, третьей, четвертой строкам.

Заметив, что в новой матрице $a_{22}^{(1)} = 0$, поменяем местами вторую и третью строки:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & 20 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & -20 \end{array} \right).$$

Шаг 2. Так как теперь $a_{22}^{(1)} = -4 \neq 0$, исключим переменную x_2 из всех строк, начиная с третьей, умножая вторую строку на $(-7/4)$ и прибавляя полученную строку к четвертой:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 13,5 & 9 & 4,5 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{117}{16} & \frac{117}{8} \end{array} \right).$$

Шаг 3. Учитывая, что $a_{33}^{(2)} = -8 \neq 0$, умножаем третью строку на $13,5/8 = 27/16$ и, прибавляя полученную строку к четвертой, исключим из нее переменную x_3 . Получим (см. последнюю матрицу) систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\ -4x_2 - 10x_3 + 8x_4 = -14, \\ -8x_3 + x_4 = 6, \\ -\frac{117}{16}x_4 = \frac{117}{8}, \end{cases}$$

откуда, используя обратный ход метода Гаусса, найдем из четвертого уравнения $x_4 = -2$; из третьего $x_3 = \frac{6 - x_4}{-8} = \frac{6 + 2}{-8} = -1$; из второго

$$x_2 = \frac{-14 - 8x_4 + 10x_3}{-4} = \frac{-14 - 8(-2) + 10(-1)}{-4} = 2 \text{ и из первого уравнения}$$

$x_1 = 6 + 2x_4 - 3x_3 - 2x_2 = 6 + (-2) - 3(-1) - 2 \cdot 2 = 1$, т.е. решение системы $(1; 2; -1; 2)$.

Пример. Методом Гаусса решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 7, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 3, \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 16. \end{cases}$$

Решение. преобразуем расширенную матрицу системы

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 2 & -3 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 16 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & -7 & 3 & -11 \\ 0 & -7 & 3 & -12 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & -7 & 3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array} \right).$$

Итак, уравнение, соответствующее третьей строке последней матрицы, противоречиво – оно привелось к неверному равенству $0 = -1$, следовательно, данная система несовместна.

Система m линейных уравнений с n переменными

Вопрос о разрешимости системы (2) в общем виде рассматривается в следующей теореме.

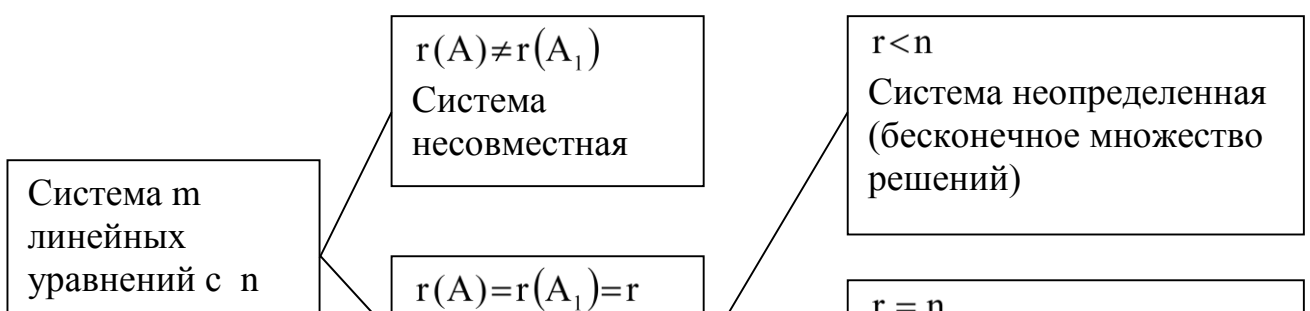
Теорема Кронекера-Капелли. Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы системы равен рангу расширенной матрицы этой системы.

Для совместных систем линейных уравнений верны следующие теоремы.

1. Если ранг матрицы совместной системы равен числу переменных, т. е. $r = n$, то система (2) имеет единственное решение.

2. Если ранг матрицы совместной системы меньше числа переменных, т. е. $r < n$, то система (2) неопределенная и имеет бесконечное множество решений.

Результаты исследования системы (2) приведем в виде схемы



Пусть $r < n$; r переменных x_1, x_2, \dots, x_r называются **основными** (или базисными), если определитель матрицы из коэффициентов при них (т.е. базисный минор) отличен от нуля. Остальные $n - r$ переменных называются неосновными (или свободными).

Решение системы (2), в котором все $n - r$ неосновных переменных равны нулю, называется **базисным**.

Исследовать на совместность и решить методом Гаусса данную систему:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 5, \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -6, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = -1. \end{cases}$$

Решение. Преобразуем расширенную матрицу системы (для удобства вычислений берем в качестве первой строки коэффициенты второго уравнения, у которого коэффициент при x_1 равен единице):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 2 & -1 & 1 & -1 & 5 \\ 3 & 1 & -1 & 2 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \end{array} \right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim$$

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 5 & -7 & 17 \end{array} \right)$, т. е. $r(A) = r(A_1) = 2$. Следовательно, система совместна.

$r < n$, ($n = 4$). Таким образом, система имеет бесконечное множество решений.

Оставим в левой части переменные x_1, x_2 , которые берем за основные (определитель из коэффициентов при них (базисный минор) отличен от нуля, т. е.

$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} \neq 0$). Остальные неосновные переменные x_3, x_4 переносим в правые

