Типовой расчёт
«Векторная алгебра»

Если известны координаты точек $A(a_1,\ a_2,\ a_3)$ и $B(b_1, b_2, b_3)$, то координаты вектора $\vec{a}=\overrightarrow{AB}\{b_1-a_1;\ \ b_2-a_2;\ \ b_3-a_3\}=\vec{a}\{x;\ y;\ z\}$.

Разложение этого вектора по ортам $\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$: $\vec{a}=x\cdot\vec{i}+y\cdot\vec{j}+z\cdot\vec{k}$.

Длина вектора находится по формуле $|\vec{a}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, а направляющие косинусы равны $\cos\alpha=\dfrac{x}{|\vec{a}|}$, $\cos\beta=\dfrac{y}{|\vec{a}|}$, $\cos\gamma=\dfrac{z}{|\vec{a}|}$. Орт вектора $\vec{a}^o=\{\cos\alpha;\ \cos\beta;\ \cos\gamma\}$.

Пример 8. Даны точки $A(1;\ 7;\ 0)$, $B(5;\ 7;\ 3)$, $C(7;\ 6;\ 5)$.

Разложить вектор $\vec{a}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}$ по ортам $\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$ и найти его длину, направляющие косинусы, орт вектора $\vec{a}$. Найдем координаты векторов:

$\overrightarrow{AC}\{7-1;\ 6-7;\ \ 5-0\}=\overrightarrow{AC}\{6;-1;\ 5\}$ и $\overrightarrow{BC}\{7-5;\ \ 6-7;\ \ 5-3\}=\overrightarrow{BC}\{2;\ \ -1;\ \ 2\}$.

Вектор $\vec{a}=\overrightarrow{AC}-\ -\overrightarrow{BC}=\vec{a}\{6-2;\ \ -1-(-1);\ \ 5-2\}=\vec{a}\{4; 0; 3\}$, $|\vec{a}|=\sqrt{4^2+0+3^2}=\sqrt{25}=5$,

$\cos\alpha=\dfrac{4}{5}$, $\cos\beta=0$, $\cos\gamma=\dfrac{3}{5}$, $\vec{a}^0\left\{\dfrac{4}{5}; 0; \dfrac{3}{5}\right\}$.

Контрольные варианты к задаче 8. Даны точки A, B и C. Разложить вектор $\vec{a}$ по ортам $\vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}$. Найти длину, направляющие косинусы и орт вектора $\vec{a}$.

1. $A(1; 2; -1), B(1; 3; 4), C(0; 1; 5)$, $\vec{a}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}$.
2. $A(1; 2; -1), B(1; 3; 4), C(0; 1; 5)$, $\vec{a}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}$.
3. $A(1; 2; -1), B(1; 3; 4), C(0; 1; 5)$, $\vec{a}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}$.
4. $A(1; 2; -1), B(1; 3; 4), C(0; 1; 5)$, $\vec{a}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AC}$.
5. $A(1; 2; -1), B(1; 3; 4), C(0; 1; 5)$, $\vec{a}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$.
6. $A(1; 2; -1), B(1; 3; 4), C(0; 1; 5)$, $\vec{a}=\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}$.
7. $A(1; 2; -1), B(1; 3; 4), C(0; 1; 5)$, $\vec{a}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}$.
8. $A(1; 2; -1), B(1; 3; 4), C(0; 1; 5)$, $\vec{a}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AB}$.
9. $A(1; 2; -1), B(1; 3; 4), C(0; 1; 5)$, $\vec{a}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}$.
10. $A(1; 2; -1), B(1; 3; 4), C(0; 1; 5)$, $\vec{a}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}$.
11. $A(4; 1; 0), B(2; -2; 1), C(6; 3; 1)$, $\vec{a}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$.
12. $A(4; 1; 0), B(2; -2; 1), C(6; 3; 1)$, $\vec{a}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}$.

13. $A(4;1;0)$, $B(2;-2;1)$, $C(6;3;1)$, $\vec{a}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

14. $A(4;1;0)$, $B(2;-2;1)$, $C(6;3;1)$, $\vec{a}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AC}$.

15. $A(4;1;0)$, $B(2;-2;1)$, $C(6;3;1)$, $\vec{a}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$.

16. $A(4;1;0)$, $B(2;-2;1)$, $C(6;3;1)$, $\vec{a}=\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}$.

17. $A(4;1;0)$, $B(2;-2;1)$, $C(6;3;1)$, $\vec{a}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}$.

18. $A(4;1;0)$, $B(2;-2;1)$, $C(6;3;1)$, $\vec{a}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AB}$.

19. $A(4;1;0)$, $B(2;-2;1)$, $C(6;3;1)$, $\vec{a}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}$.

20. $A(4;1;0)$, $B(2;-2;1)$, $C(6;3;1)$, $\vec{a}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}$.

21. $A(-1;-2;4)$, $B(-4;-2;0)$, $C(3;-2;1)$, $\vec{a}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}$.

22. $A(-1;-2;4)$, $B(-4;-2;0)$, $C(3;-2;1)$, $\vec{a}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}$.

23. $A(-1;-2;4)$, $B(-4;-2;0)$, $C(3;-2;1)$, $\vec{a}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.

24. $A(-1;-2;4)$, $B(-4;-2;0)$, $C(3;-2;1)$, $\vec{a}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AC}$.

25. $A(-1;-2;4)$, $B(-4;-2;0)$, $C(3;-2;1)$, $\vec{a}=\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$.

26. $A(-1;-2;4)$, $B(-4;-2;0)$, $C(3;-2;1)$, $\vec{a}=\overrightarrow{CA}-\overrightarrow{CB}$.

27. $A(-1;-2;4)$, $B(-4;-2;0)$, $C(3;-2;1)$, $\vec{a}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}$.

28. $A(-1;-2;4)$, $B(-4;-2;0)$, $C(3;-2;1)$, $\vec{a}=\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AB}$.

29. $A(-1;-2;4)$, $B(-4;-2;0)$, $C(3;-2;1)$, $\vec{a}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}$.

30. $A(-1;-2;4)$, $B(-4;-2;0)$, $C(3;-2;1)$, $\vec{a}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{AC}$.

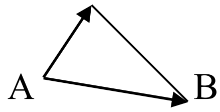
Задача 9. Если даны векторы $\vec{a}\{a_1;a_2;a_3\}$ и $\vec{b}\{b_1;b_2;b_3\}$, то $\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1\cdot b_1+a_2\cdot b_2+a_3\cdot b_3$.

Тогда $\cos\widehat{\vec{a},\vec{b}}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$; проекция вектора $\vec{b}$ на направление вектора $\vec{a}$ $\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}$, условие перпендикулярности ненулевых векторов выглядит следующим образом: $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

Условие коллинеарности векторов: $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}$.

Пример 9. Даны вершины треугольника $A(1;\ 1;\ 1)$, $B(5;\ 4;\ 1)$, $C(6;\ 13;\ 1)$. Найти угол при вершине A и проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на сторону AC. C

Внутренний угол при вершине А образован векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$,



$\overrightarrow{AB}\{5-1;\ 4-1;\ 1-1\} = \overrightarrow{AB}\{4,\ 3,\ 0\}$, $\overrightarrow{AC}\ \{5;\ 12;\ 0\}$.

Тогда $\cos\widehat{\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}} = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\overrightarrow{AC}\right|}$. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = 4\cdot 5 + 3\cdot 12 + 0 = 56$, $\overrightarrow{AB} = = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$,

$\overrightarrow{AC} = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13$. $\cos\angle A = \dfrac{56}{5\cdot 13} = \dfrac{56}{65}$.

Проекция $\overrightarrow{AB}$ на направление вектора $\overrightarrow{AC}$: $\text{пр}_{\overrightarrow{AC}}\overrightarrow{AB} = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|} = \dfrac{56}{13}$.

Контрольные варианты к задаче 9

1. Даны векторы $\vec{a} = 2\vec{i} - 4\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b} = -\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$. Найти $\text{пр}_{\vec{a}+\vec{b}}\vec{b}$.

2. Найти косинус угла, образованного вектором $\vec{b} = 10\vec{i} - 2\sqrt{2}\cdot\vec{j} - 6\vec{k}$ и осью OZ.

3. Даны векторы $\vec{a} = 5\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}$. Найти косинус угла между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

4. Даны векторы $\vec{a} = -6\vec{i} - 5\vec{k}$ и $\vec{b}\{5;\ \sqrt{3};\ 6\}$. Вычислить $\text{пр}_{\vec{b}}(\vec{a} + \vec{b})$.

5. Найти косинус угла, образованного вектором $\vec{a} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ и осью ОУ.

6. Даны векторы $\vec{a} = \{3;\ 1;\ -1\}$ и $\vec{b} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}$. Найти косинус угла, образованного вектором $\vec{a} + \vec{b}$ и осью ОХ.

7. Даны векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ и $\overrightarrow{AC} = 2\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}$. Найти $\text{пр}_{\overrightarrow{AC}}\left(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}\right)$.

8. Вычислить проекцию вектора $\vec{a} = 5\vec{i} + 2\vec{j} + 5\vec{k}$ на ось вектора $\vec{b} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$.

9. Определить угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$ и $\vec{b} = 4\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$.

10. Определить, при каком значении m векторы $\vec{a} = m\vec{i} + \vec{j}$ и $\vec{b} = 3\vec{i} - 3\vec{j} + 4\vec{k}$ перпендикулярны.

11. Определить, при каком значении α векторы $\vec{a} = \alpha\vec{i} - 3\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b}\{1;\ \alpha;\ 2\}$ взаимно перпендикулярны.

12. Даны вершины треугольника: $A(-1;\ -2;\ 4)$, $B(-4;\ -2;\ 0)$, $C(3;\ -2;\ 1)$. Определить внутренний угол при вершине B.

13. Даны вершины треугольника: $A(3;\ 2;\ -3)$, $B(5;\ 1;\ -1)$, $C(1;\ -2;\ 1)$. Определить внутренний угол при вершине A.

14. Найти вектор $\vec{x}$, коллинеарный вектору $\vec{a}\{2;\ 1;\ -1\}$ и удовлетворяющий условию $\vec{x}\cdot\vec{a} = 3$.

15. Даны две точки $M(-5;\ 7;\ -6)$ и $N(7;\ -9;\ 9)$. Вычислить проекцию вектора $\vec{a}\{1,\ -3,\ 1\}$ на ось вектора $\overrightarrow{MN}$.

16. Даны векторы: $\vec{a}=2\vec{i}-4\vec{j}+\vec{k}$ и $\vec{b}=-\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$. Вычислить $\text{пр}_{\vec{a}+2\vec{b}}\vec{b}$.

17. Найти острый угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}\{2;\ 1;\ 0\}$, $\vec{b}=-\vec{j}+\vec{k}$.

18. Даны три вектора: $\vec{a}\{3;\ -6;\ -1\}$, $\vec{b}\{1;\ 4;\ -5\}$, $\vec{c}=3\vec{i}-4\vec{j}+12\vec{k}$. Найти $\text{пр}_{\vec{c}}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)$.

19. Даны три вектора: $\vec{a}\{1;-3;\ 4\}$, $\vec{b}\{3;\ -4;\ 2\}$, $\vec{c}=-\vec{i}+\vec{j}+4\vec{k}$. Найти $\text{пр}_{\vec{b}+\vec{c}}\vec{a}$.

20. Найти острый угол между диагоналями параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}\{2;\ 1;\ 0\}$ и $\vec{b}=-2\vec{j}+\vec{k}$.

21. Даны три вектора: $\vec{a}\{3;-6;-1\}$, $\vec{b}\{1;4;-5\}$, $\vec{c}=3\vec{i}-4\vec{j}+12\vec{k}$. Вычислить $\text{пр}_{\vec{a}}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$.

22. Найти вектор $\vec{x}$, зная, что он перпендикулярен векторам $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{k}$ и $\vec{b}=3\vec{j}$ и удовлетворяет условию $\vec{x}\cdot\left(2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}\right)=-6$.

23. Найти вектор $\vec{x}$, коллинеарный вектору $\vec{a}=2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ и удовлетворяющий условию $\vec{x}\cdot\vec{b}=6$.

24. Даны вершины треугольника: $A(-1;\ -2;\ 4)$, $B(-4;\ -2;\ 0)$, $C(3;\ -2;\ 1)$. Определить внешний угол при вершине A.

25. Даны вершины треугольника: $A(3;\ 2;\ -3)$, $B(5;\ 1;\ -1)$, $C(1;\ -2;\ 1)$. Определить внешний угол при вершине A.

26. Дан вектор $\vec{a}=3\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ и точки $M(3;\ -1;\ 2)$ и $N(4;\ -2;\ 1)$. Найти $\text{пр}_{\overline{MN}}\vec{a}$.

27. В треугольнике с вершинами $A(2;\ -1;\ 3)$, $B(1;1;\ 1)$, $C(0;\ 0;\ 5)$. Определить внутренний угол при вершине A.

28. Даны векторы $\vec{a}\{1;\ -1;\ 2\}$ и $\vec{b}\{2;\ -2;\ 1\}$. Найти проекцию вектора $\vec{c}=3\vec{a}-\vec{b}$ на направление вектора $\vec{b}$.

29. Даны вершины треугольника: $A(4;\ 1;\ 0)$, $B(2;\ 2;\ 1)$, $C(6;\ 3;\ 1)$. Найти проекцию вектора $\overrightarrow{AB}$ на сторону $\overrightarrow{AC}$.

30. Даны векторы $\vec{a}=3\vec{i}-6\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+4\vec{j}-5\vec{k}$, $\vec{c}=3\vec{i}+4\vec{j}+2\vec{k}$. Найти проекцию вектора $\vec{a}+\vec{c}$ на вектор $\vec{b}+\vec{c}$.

Задача 10. Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, можно найти по формуле $S_n=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$, а площадь треугольника, построенного на этих векторах: $S_\Delta=\dfrac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$.

Пример 10. Даны вершины треугольника $A(1;2;\ 0)$, $B(3;\ 0;-3)$ и $C(5;\ 2;\ 6)$. Найти его площадь и длину высоты, опущенной из вершины C.

$S_\Delta=\dfrac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$. Находим векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$\overrightarrow{AB}\{3-1;\ 0-2;\ -3-0\}=\overrightarrow{AB}\{2,-2,-3\}$, $\quad \overrightarrow{AC}\{5-1;\ 2-2;\ 6-0\}=\overrightarrow{AC}\{4,0,6\}$.

Векторное произведение $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & -2 & -3\\ 4 & 0 & 6\end{vmatrix}=\vec{i}\cdot\begin{vmatrix}-2 & -3\\ 0 & 6\end{vmatrix}-\vec{j}\cdot\begin{vmatrix}2 & -3\\ 4 & 6\end{vmatrix}+$

$$+\vec{k}\cdot\begin{vmatrix}2 & -2\\ 4 & 0\end{vmatrix}=\vec{i}\cdot(-12+0)-\vec{j}\cdot(12+12)++\vec{k}\cdot(0+8)=-12\vec{i}-24\vec{j}+8\vec{k}=$$

$$=\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{(-12)^2+(-24)^2+8^2}=\sqrt{784}=28,\quad S_\Delta=\frac{1}{2}\cdot 28=14.$$

Так как $S_\Delta=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot h$, где $h-$длина высоты, опущенной из вершины C на сторону AB,

$h=\dfrac{2\cdot S_\Delta}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}$. $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{2^2+(-2)^2+(-3)^2}=\sqrt{17}$, $\quad h=\dfrac{2\cdot 14}{\sqrt{17}}=\dfrac{28\cdot\sqrt{17}}{17}$.

Контрольные варианты к задаче 10

1. В параллелограмме ABCD даны векторы $\overrightarrow{AB}=3\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$ и $\overrightarrow{AD}\{2;\ 1;\ -2\}$. Найти площадь параллелограмма, построенного на диагоналях параллелограмма ABCD.

2. Даны три вершины параллелограмма $A(3;\ -2;\ 4)$, $B(4;\ 0;\ 3)$, $C(7;\ 1;\ 5)$. Найти длину высоты, опущенной из вершины C (через площадь параллелограмма).

3. Найти площадь треугольника с вершинами $A(-1;\ 3;\ 2)$, $B(1;\ 2;\ 6)$, $C(2;\ 5;\ 1)$ (средствами векторной алгебры).

4. Найти площадь треугольника с вершинами $A(5;\ 2;\ 7)$, $B(6;\ 1;\ 9)$, $C(5;\ 2;\ 8)$ (средствами векторной алгебры).

5. Даны три вершины треугольника: $A(3;\ -1;\ 2)$, $B(3;\ 0;\ 3)$, $C(2;\ -1;\ 1)$. Найти его высоту, приняв BC за основание (через площадь треугольника).

6. На векторах $\vec{a}\left\{1;\ 1;\ \frac{3}{2}\right\}$ и $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}+\frac{9}{2}\vec{k}$ построен параллелограмм. Найти площадь параллелограмма, сторонами которого являются диагонали данного параллелограмма.

7. Даны векторы $\vec{a}\{-1;\ 3;\ -3\}$ и $\vec{b}=2\vec{i}+2\vec{k}$. Найти вектор $\vec{c}$, перпендикулярный к векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если модуль вектора $\vec{c}$ численно равен площади треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, и тройка векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}-$левая.

8. Даны точки $A(2;\ -1;\ -4)$, $B(5;\ 1;\ 2)$, $C\left(\frac{11}{2};\ -\frac{1}{2};\ -\frac{5}{2}\right)$. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$ и $(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AC})$.

9. На векторах $\vec{a}\{4;\ 7;\ 3\}$ и $\vec{b}\{1;\ 2;\ 1\}$ построен параллелограмм. Найти высоту, опущенную на основание $\vec{b}$ (через площадь).

10. В треугольнике ABC, где $A(-1;\ 4;\ 3)$, $B(-1;\ 20;\ 13)$, $C(-1;\ 10;\ 7)$, найти длину высоты, опущенной на сторону AB (через площадь треугольника; средствами векторной алгебры).

11. На векторах $\vec{a}(-2;\ -2;\ -3)$ и $\vec{b}=3\vec{i}+6\vec{j}+7\vec{k}$ построен параллелограмм. Найти площадь параллелограмма, построенного на диагоналях данного параллелограмма.

12. В треугольнике с вершинами $A(-1;\ 4;\ 3)$, $B(-1;\ 20;\ 13)$ и $C(-1;\ 10;\ 7)$ точка E делит сторону AB пополам. Найти площадь треугольника ACE (средствами векторной алгебры).

13. Найти площадь параллелограмма со сторонами $2\vec{a}-\vec{b}$ и $\vec{a}+2\vec{b}$, если $\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{i}+2\vec{j}-\vec{k}$.

14. Найти площадь треугольника со сторонами $\vec{a}$ и $\vec{b}-\vec{c}$, если $\vec{a}\{1;\ -2;\ 0\}$, $\vec{b}=2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$ и $\vec{c}=-\vec{j}+3\vec{k}$.

15. Дан треугольник с вершинами $A(2;\ -1;\ 2)$, $B(1;\ 2;\ -1)$ и $C(3;\ 2;\ 1)$. Вычислить площадь треугольника и высоту, опущенную из вершины A (средствами векторной алгебры).

16. Даны векторы $\vec{a}=\vec{i}-2\vec{j}+\vec{k}$ и $\vec{b}=5\vec{i}+3\vec{j}$. Найти вектор $\vec{d}$, который перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если длина его численно равна площади треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, и тройка векторов $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{d}$ – правая.

17. Даны точки $A(1;\ 2;\ 0)$, $B(3;\ 0;\ -3)$ и $C(5;\ 2;\ 6)$. Вычислить площадь треугольника и высоту, опущенную из вершины C (средствами векторной алгебры).

18. В треугольнике с вершинами $A(2;\ -1;\ 2)$, $B(1;\ 2;\ -1)$ и $C(3;\ 2;\ 1)$ точка E делит сторону AB пополам. Найти площадь треугольника BCE (средствами векторной алгебры).

19. Даны точки $A(2;\ -1;\ 2)$, $B(1;\ 2;\ -1)$ и $C(3;\ 2;\ 1)$. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=\overrightarrow{BC}-2\overrightarrow{CA}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{CB}$.

20. Даны три вершины треугольника: $A(1;\ -1;\ 2)$, $B(5;\ -6;\ 2)$, $C(1;\ 3;\ -1)$. Вычислить его высоту, опущенную из вершины B (через площадь, средствами векторной алгебры).

21. Дан треугольник с вершинами $A(1;\ 2;\ -1)$, $B(0;\ 1;\ 5)$ и $C(-1;\ 2;\ 1)$. Найти его высоту, опущенную из вершины A (через площадь, средствами векторной алгебры).

22. Даны векторы $\vec{b}\{-3;\ 1;\ 2\}$ и $\vec{c}=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $2\vec{b}-\vec{c}$ и $2\vec{c}-\vec{b}$.

23. Даны векторы $\vec{b}\{3;\ 1;\ -1\}$ и $\vec{a}=2\vec{i}+3\vec{j}-\vec{k}$. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $2\vec{a}-\vec{b}$ и $3\vec{b}-\vec{a}$.

24. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{b}+3\vec{a}$ и $2\vec{a}$, где $\vec{a}=\vec{i}-3\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$.

25. В треугольнике с вершинами $A(1;\ 2;\ 0)$, $B(3;\ 0;\ -3)$ и $C(5;\ 2;\ 6)$ точка E делит сторону AB пополам. Найти площадь треугольника ACE (средствами векторной алгебры).

26. Даны векторы $\vec{a}\{2;\ -3;\ 1\}$ и $\vec{b}\{-3;\ 1;\ 2\}$. Найти вектор $\vec{c}$, который перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если модуль вектора $\vec{c}$ численно равен площади треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, и тройка векторов $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ – левая.

27. Даны точки $A(5;\ -1;\ 3)$, $B(0;\ -2;\ 1)$ и $C(3;\ 2;\ 4)$. Найти длину высоты треугольника ABC, опущенной из вершины C (через площадь, средствами векторной алгебры).

28. Даны три вершины параллелограмма $A(-1;\ -2;\ 0)$, $B(2;\ 1;\ 3)$ и $C(-3;\ 0;\ 1)$. Найти длину высоты, опущенной из вершины C (через площадь, средствами векторной алгебры).

29. На векторах $\vec{a}\{2;\ -3;\ 1\}$ и $\vec{b}=2\vec{k}-3\vec{i}+\vec{j}$ построен параллелограмм. Найти площадь параллелограмма, построенного на его диагоналях.

30. Даны векторы $\vec{a}\{2;\ -3;\ 1\}$, $\vec{b}=-3\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$ и $\vec{c}=\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$. Вычислить площадь треугольника, построенного на векторах $2\vec{a}$ и $\vec{b}+3\vec{c}$.

Задача 11. Если даны координаты $\bar{a}(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $\bar{b}(x_2,\ y_2,\ z_2)$ и $\bar{c}(x_3,\ y_3,\ z_3)$, то смешанное произведение векторов вычисляют по формуле

$$\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Объемы параллелепипеда и тетраэдра (треугольной пирамиды), построенных на векторах $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ находятся с помощью смешанного произведения векторов:

$$V_{пар} = \left|\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}\right|,\quad V_{тет} = \frac{1}{6}\left|\vec{a}\cdot\overleftarrow{b}\cdot\vec{c}\right|.$$

Если $\vec{a}\times\overleftarrow{b}\cdot\vec{c} > 0$, то тройка векторов $\vec{a},\ \overleftarrow{b},\ \vec{c}$ - правая.

Если $\vec{a}\times\overleftarrow{b}\cdot\vec{c} < 0$, то тройка левая.

Если $\vec{a}\times\overleftarrow{b}\cdot\vec{c} = 0$, то векторы $\vec{a},\ \overleftarrow{b},\ \vec{c}$ компланарны.

Пример 11. Дан параллелепипед $ABCD\,A'B'C'D'$, построенный на векторах $\overrightarrow{AB}\{4;\ 3;\ 0\}$, $\overrightarrow{AD}(2;\ 1;\ 2\}$ и $\overrightarrow{AA'}\{-3;\ -2;\ 5\}$. Найти высоту, проведенную из вершины A' на грань $ABCD$.

Объем $V_{пар}$ равен произведению площади основания на высоту:

$$V_{пар} = S\cdot h = \left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right|\cdot h.$$

$V_{пар}$ находится также по формуле $V_{пар} = \left|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AA'}\right|$, поэтому

$$h=\frac{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AA'}\right|}{\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right|}.$$

Вычислим векторное произведение $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ 4 & 3 & 0\\ 2 & 1 & 2\end{vmatrix}=$

$$=\vec i\cdot\begin{vmatrix}3 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix}-\vec j\cdot\begin{vmatrix}4 & 0\\ 2 & 2\end{vmatrix}+\vec k\cdot\begin{vmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix}=6\vec i-8\vec j-2\vec k=\{6;-8;-2\}.$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right|=\sqrt{6^2+(-8)^2+(-2)^2}=2\sqrt{26}.$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AA'}=\begin{vmatrix}4 & 3 & 0\\ 2 & 1 & 2\\ -3 & -2 & 5\end{vmatrix}=-12,\quad \left|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AA}\right|=|-12|=12.$$

Тогда $h=\frac{12}{2\sqrt{26}}=\frac{12\cdot\sqrt{26}}{2\cdot 26}=\frac{3\sqrt{26}}{13}.$

Контрольные варианты к задаче 11

1. Найти объем треугольной пирамиды, построенной на векторах $\overrightarrow{AB}\{1;\ 3;\ 1\}$, $\overrightarrow{AC}\{0;\ 1;\ -1\}$ и $\overrightarrow{AD}=-2\vec i+2\vec j+2\vec k$.

2. Найти объем треугольной пирамиды с вершинами $A(-1;\ 4;\ 1)$, $B(0;7;1)$, $C(1;\ 3;\ 5)$, $D(0;\ 6;\ -1)$.

3. Найти значение t, при котором векторы $\vec a\{2;\ -1;\ 5\}$, $\vec b\{t;\ 4;\ 2\}$ и $\vec c=\{1;\ 0;\ -1\}$ образуют левую тройку, а объем параллелепипеда, построенного на них, равен 33.

4. Даны векторы $\vec a=t\vec i+2\vec j+\vec k$, $\vec b\{1;-1;0\}$, $\vec c=\vec k$. Найти значение t, при котором выполняется равенство $\vec a\cdot\vec b\cdot\vec c=\vec a\cdot\vec c$.

5. Точки $A(2;\ 3;\ t)$, $B(3;\ -1;\ -2)$, $C(1;\ 4;\ 0)$ и Д$(1;3;2)$ лежат в одной плоскости. Найти t.

6. Найти объем параллелепипеда, зная четыре его вершины: $A(3;\ -1;\ 2)$, $B(0;\ -1;\ 3)$, $C(0;\ 1;\ 1)$ и $D(3;\ 4;-1)$.

7. Найти значение t, при котором векторы $\vec a=t\vec i+t\vec j+\vec k$, $\vec b=5\vec i+3\vec j$, $\vec c\{-1;\ 3;\ t\}$ компланарны.

8. Точки $A(-2;\ 1;\ -3)$, $B(3;\ 4;\ 4)$, $C(5;\ 6;\ 0)$ и $E(5;\ 6;\ t)$ служат вершинами параллелепипеда, объем которого равен 16. Найти t.

9. Даны векторы $\vec a\{-2;\ -2;\ 2\}$ $\vec b\{1;\ -1;\ 1\}$ и $\vec c=5i-0{,}5\vec j+t\vec k$. Найти значение t, при котором имеет место равенство $\vec a\times\vec b\cdot\vec c=\vec a\cdot\vec b$.

10. Векторы $\vec{a}=t\vec{i}+2\vec{j}+3\vec{k}$, $\vec{b}=5\vec{j}+7\vec{k}$ и $\vec{c}=-\vec{i}+3\vec{j}+4\vec{k}$ компланарны. Найти t.

11. Даны векторы $\vec{a}\{1;\ t;\ -1\}$, $\vec{b}=2\vec{i}+\vec{j}+3\vec{k}$ и $\vec{c}=-\vec{j}-5\vec{i}$. Найти значение t, при котором имеет место равенство $\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}=\overrightarrow{a\cdot b}-\overrightarrow{b\cdot c}+\overrightarrow{a\cdot c}$.

12. Даны векторы $\vec{a}\{-2;\ 3;\ t\}$ $\vec{b}=4\vec{i}-4\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{c}=4\vec{k}+\vec{j}$. Найти значение t, при котором имеет место равенство $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=\left|\vec{b}\right|$.

13. Векторы $\vec{a}\{1;\ -3;\ 1\}$ $\vec{b}\{3;\ 2;\ -2\}$ и $\vec{c}=t\vec{i}+4\vec{j}-\vec{k}$ образуют правую тройку, причем объем параллелепипеда, построенного на этих векторах, равен девяти. Найти t.

14. Векторы $\vec{a}=6\vec{i}+\vec{j}+5\vec{k}$, $\vec{b}=3\vec{i}-2\vec{j}+7\vec{k}$ и $\vec{c}$ образуют левую тройку и служат ребрами параллелепипеда, объем которого равен 45. Вектор $\vec{c}$ перпендикулярен плоскости XOY. Найти отличную от нуля координату вектора $\vec{c}$.

15. Векторы $\vec{a}\{3;\ 4;\ t\}$ $\vec{b}\{0;\ -3;\ 1\}$ и $\vec{c}=2\vec{i}+5\vec{k}$ образуют левую тройку. Объем построенного на них параллелепипеда равен 51. Найти t.

16. Найти объем треугольной пирамиды с вершинами в точках $A(2;\ 2;\ 2)$, $B(4;\ 3;\ 3)$, $C(4;\ 5;\ 4)$ и $D(5;\ 5;\ 6)$.

17. Объем треугольной пирамиды равен пяти. Три его вершины находятся в точках $A(2;\ 1;\ -1)$, $B(3;\ 0;\ 1)$, $C(2;\ -1;\ 3)$. Найти отличную от нуля координату четвертой вершины D, если она лежит на оси OY.

18. Точки $A(1;\ 3;\ 2)$, $B(1;\ 4;\ 0)$, $C(3;\ -1;\ -2)$ и $D(2;\ 3;\ t)$ лежат в одной плоскости. Найти t.

19. Найти значение t, при котором векторы $\vec{a}\{t;\ 3;\ 2\}$, $\vec{b}\{2;\ -3;\ -4\}$ и $\vec{c}\{-3;\ 12;\ 6\}$ компланарны.

20. Проверить, лежат ли точки $A(2;\ -1;\ 2)$, $B(1;\ 2;\ 1)$, $C(2;\ 3;\ 0)$ и $D(5;\ 0;\ -6)$ в одной плоскости.

21. Найти объем треугольной пирамиды, вершины которой находятся в точках $A(6;\ 1;\ 5)$, $B(-1;\ 3;\ 0)$, $C(4;\ 5;\ -2)$ и $D(1;\ -1;\ 6)$.

22. Даны векторы $\vec{a}\{1;\ 2;\ t\}$, $\vec{b}\{1;\ -3;\ 2\}$ и $\vec{c}=\overrightarrow{-2i}+\vec{k}$. Найти t, при котором имеет место равенство $\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}=\left|\vec{c}\right|^2$.

23. Векторы $\vec{a}\{1;\ 1;\ t\}$, $\vec{b}\{2;\ 1;\ 1\}$, $\vec{c}=\vec{i}-\overrightarrow{2j}+3\vec{k}$ образуют правую тройку. Объем построенной на них треугольной пирамиды равен $5/3$. Найти t.

24. Вершины треугольной пирамиды находятся в точках $A(0;-2;5)$, $B(6;\ t;\ 0)$, $C(3;\ -3;\ 6)$ и $D(2;\ -1;\ 3)$. Найти значение t, если объем пирамиды равен 45.

25. Даны векторы $\vec{a}\{1;\ -1;\ 1\}$, $\vec{c}\{5;\ t;\ 2\}$, $\vec{b}=-2\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$. Найти значение t, если имеет место равенство $\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}=\left|\vec{b}\right|\cdot\left|\vec{a}\right|$.

26. Даны векторы $\vec{a}=3\vec{i}+4\vec{k}$, $\vec{b}=\vec{j}+2\vec{k}$ и $\vec{c}=\vec{i}-\vec{j}+t\vec{k}$. Найти значение t, если имеет место равенство $\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}=\left|\vec{a}\right|$.

27. Определить, при каком значении t векторы $\vec{a}=\vec{i}+\vec{j}$, $\vec{b}=\vec{j}-\vec{k}$, $\vec{c}=t\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$ компланарны.

28. Даны векторы $\vec{a}=\{-2;\ 1;\ 1\}$, $\vec{b}\{1;\ 5;\ 0\}$, $\vec{c}=\vec{i}-\vec{j}+t\vec{k}$. Найти значение t, при котором имеет место равенство $\vec{a}\cdot\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{a}|^2$.

29. Векторы $\vec{a}=-2\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}$, $\vec{b}=7\vec{i}+t\vec{j}$, $\vec{c}\{3;\ 0;\ 1\}$ образуют правую тройку, а объем построенного на них параллелепипеда равен 12. Найти значение t.

30. Даны векторы $\vec{a}\{2;\ t;\ 1\}$, $\vec{b}=4\vec{i}+\vec{k}$, $\vec{c}=2\vec{j}+\vec{k}$. Найти значение t, если имеет место равенство $\vec{a}\times\vec{b}\cdot\vec{c}=-\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\cdot\vec{c}$.

Задача 12. При решении этой задачи будем использовать свойства векторного произведения двух векторов. Модуль векторного произведения двух векторов $\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=|\vec{a}|\,\left|\vec{b}\right|\sin\widehat{\vec{a},\vec{b}}$, поэтому $|\vec{a}\times\vec{a}|=0$. По свойствам векторного произведения $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$, $(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b})\times\vec{c}=\alpha\cdot\vec{a}\times\vec{c}+\beta\cdot\vec{b}\times\vec{c}$. Площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, равна $S_n=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$. Площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $S_T=\frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$.

Пример 12. В параллелограмме ABCD даны векторы $\overrightarrow{AB}=2\vec{m}-\vec{n}$ и $\overrightarrow{AD}=\vec{m}+3\vec{n}$. Найти $\left|\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{BD}\right|$, если $|\vec{m}|=4$, $|\vec{n}|=\sqrt{2}$, $(\widehat{\vec{m},\ \vec{n}})=\frac{\pi}{6}$. Это условие в параллелограмме ABCD вектор $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=2\vec{m}-\vec{n}+\vec{m}+3\vec{n}=3\vec{m}+2\vec{n}$. Тогда $\overrightarrow{CA}=-2\vec{n}-3\vec{m}$. Вектор $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}=\vec{m}+3\vec{n}-2\vec{m}+\vec{n}=4\vec{n}-\vec{m}$;

$$\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{BD}=(-2\vec{n}-3\vec{m})\times(4\vec{n}-\vec{m})=-8\vec{n}\times\vec{n}+2\vec{n}\times\vec{m}-3\vec{m}\times4\vec{n}+\vec{m}\times\vec{m}=$$

$$=2\vec{n}\times\vec{m}+12\vec{n}\times\vec{m}=14\vec{n}\times\vec{m};$$

$$\left|\overrightarrow{CA}\times\overrightarrow{BD}\right|\ |14\vec{n}\times\vec{m}|=14\,|\vec{n}|\cdot|\vec{m}|\cdot\sin\frac{\pi}{6}=14\cdot4\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{1}{2}=28\sqrt{2}.$$

Контрольные варианты к задаче 12

1. На векторах $\vec{a}=2\vec{m}-5\vec{n}$ и $\vec{b}=3\vec{m}+\vec{n}$ построен треугольник. Найти его площадь, если $|\vec{m}|=1$, $|\vec{n}|=\sqrt{3}$, $(\widehat{\vec{m},\ \vec{n}})=\frac{\pi}{6}$.

2. Даны векторы $\vec{a}=\vec{m}+3\vec{n}$, $\vec{b}=4\vec{m}-\vec{n}$ и $\vec{c}=3\vec{m}+\vec{n}$. Найти модуль векторного произведения $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}$, если $|\vec{m}|=2$, , $|\vec{n}|=\sqrt{3}$, $(\widehat{\vec{m},\ \vec{n}})=\frac{\pi}{6}$.

3. Даны векторы $\vec{a}=2\vec{m}+\vec{n}$, $\vec{b}=\vec{m}+2\vec{n}$. Найти $\left|\vec{a}\times\vec{b}+5\vec{m}\times\vec{n}\right|$, если

$|\vec{m}| = 1,\ \ , |\vec{n}| = \sqrt{3},\ \ (\vec{m}, \widehat{\ } \vec{n}) = \dfrac{\pi}{6}.$

4. В треугольнике ABC даны векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{m} - 6\vec{n}$ и $\overrightarrow{BC} = 3\vec{m} + 2\vec{n}$. Найти $\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CA}\right|$, если $|\vec{m}| = 2,\ \ , |\vec{n}| = \sqrt{3},\ \ (\vec{m}, \widehat{\ } \vec{n}) = \dfrac{\pi}{6}.$

5. В параллелограмме ABCD даны векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{n} - 0{,}5\vec{m}$ и $\overrightarrow{AD} = 5{,}5\vec{m}$. Найти $\left|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BD}\right|$, если $|\vec{m}| = 3,\ \ |\vec{n}| = 2,\ \ (\vec{m}, \widehat{\ } \vec{n}) = \dfrac{\pi}{4}.$

6. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\vec{a} = 5\vec{m} + 2\vec{n}$ и $\vec{b} = 3\vec{m} + \vec{n}$, если $|\vec{m}| = 1,\ \ |\vec{n}| = \sqrt{3},\ \ (\vec{m}, \vec{n}) = \pi/6.$ $\wedge$

7. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{AB} = 5\vec{n} + 4\vec{m}$ и $\overrightarrow{AD} = 2\vec{m} - \vec{n}$, если $|\vec{m}| = 2,\ \ |\vec{n}| = \sqrt{3},\ \ (\vec{m}, \widehat{\ } \vec{n}) = \pi/6.$

8. Даны векторы $\vec{a} = 3\vec{m} - 4\vec{n}$, $\vec{b} = \vec{m} + 12\vec{n}$, где $|\vec{m}| = 2,\ |\vec{n}| = 1,\ (\vec{m}, \widehat{\ } \vec{n}) = \pi/4.$ Найти $\left|\vec{a} \times (\vec{a} + \vec{b})\right|$.

9. В параллелограмме ABCD даны векторы $\overrightarrow{AB} = 3\vec{a} + 5\vec{b}$ и $\overrightarrow{AD} = \vec{a} - 2\vec{b}$. Найти $\left|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BD}\right|$, если $|\vec{a}| = \dfrac{\sqrt{2}}{4},\ \ |\vec{b}| = \sqrt{8},\ \ (\vec{a}, \widehat{\ } \vec{b}) = \pi/3.$

10. Даны векторы $\vec{a} = \dfrac{1}{2}\vec{m} + 4\vec{n}$ и $\vec{b} = -\vec{m} + 3\vec{n}$. Найти $\left|(\vec{a} + 2\vec{b}) \times \vec{b}\right|$, если $|\vec{m}| = 5,\ \ |\vec{n}| = 1,\ \ (\vec{m}, \widehat{\ } \vec{n}) = \pi/4.$

11. Даны векторы $\vec{a} = 2\vec{m} - \vec{n}$, $\vec{b} = 4\vec{m} - \vec{n}$, и $\vec{c} = \vec{m} + 2\vec{n}$. Найти $\left|(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c}\right|$, если $|\vec{m}| = 2,\ \ |\vec{n}| = \sqrt{3},\ \ (\vec{m}, \widehat{\ } \vec{n}) = \pi/6.$

12. Даны векторы $\vec{a} = 3\vec{m} - \vec{n}$, $\vec{b} = -\vec{m} + 2\vec{n}$. Найти $\left|\vec{a} \times \vec{b} + 5\vec{m} \times \vec{n} - 3\vec{n} \times m\right|$, если $|\vec{m}| = 2,\ \ |\vec{n}| = \sqrt{3},\ \ (\vec{m}, \vec{n}) = \widehat{\ } \pi/6.$

13. В параллелограмме ABCD даны векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{n} - 0{,}5\vec{m}$ и $\overrightarrow{AD} = 5{,}5\vec{m}$. Найти $\left|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BD}\right|$, если $|\vec{m}| = 2,\ \ |\vec{n}| = \sqrt{3},\ \ (\vec{m}, \widehat{\ } \vec{n}) = 5\pi/6.$

14. В треугольнике ABC даны векторы $\overrightarrow{AB} = -6\vec{n} + \vec{m}$ и $\overrightarrow{BC} = 3\vec{m} + 2\vec{n}$. Найти $\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CA}\right|$, если $|\vec{m}| = 2,\ \ |\vec{n}| = \sqrt{3},\ \ (\vec{m}, \widehat{\ } \vec{n}) = \pi/6.$

15. Даны векторы $\vec{a} = 3\vec{m} + \vec{n}$ и $\vec{b} = \vec{m} - 3\vec{n}$. Найти $\left|\vec{a} \times \vec{b} + 3\vec{m} \times \vec{n} - 2\vec{n} \times \vec{m}\right|$, если $|\vec{m}| = 4,\ \ |\vec{n}| = \sqrt{3},\ \ (\vec{m}, \widehat{\ } \vec{n}) = \pi/6.$

16. Даны векторы $\vec{a} = 4\vec{m} + \vec{n}$, $\vec{b} = 3\vec{m} + \vec{n}$. Найти $\left|\vec{a} \times (\vec{b} - \vec{a})\right|$, если $|\vec{m}| = 2,\ \ |\vec{n}| = \sqrt{12},\ \ (\vec{m}, \widehat{\ } \vec{n}) = \pi/6.$

17. В параллелограмме ABCD даны векторы $\overrightarrow{AB} = -3{,}5\vec{n} + \vec{m}$ и $\overrightarrow{AD} = 5{,}5\vec{n}$. Найти $\left|\overrightarrow{CA} \times \overrightarrow{BD}\right|$, если $|\vec{m}| = 2,\ \ |\vec{n}| = \sqrt{12},\ \ (\vec{m}, \widehat{\ } \vec{n}) = \pi/6.$

18. В треугольнике ABC даны векторы $\overrightarrow{AB} = 3\vec{n} + 2\vec{m}$ и $\overrightarrow{BC} = 3\vec{m} + 2\vec{n}$. Найти $\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CA}\right|$, если $|\vec{m}| = 3$, $|\vec{n}| = \sqrt{12}$, $(\vec{m}, \hat{\ } \vec{n}) = \pi/3$.

19. Даны векторы $\vec{a} = 3\vec{p} - \frac{1}{3}\vec{q}$ и $\vec{b} = 2\vec{p} + \vec{q}$. Найти $\left|\left(5\vec{a} - 3\vec{b}\right) \times \left(\vec{b} - 4\vec{a}\right)\right|$, если $|\vec{p}| = 2$, $|\vec{q}| = 3$, $(\vec{p}, \hat{\ } \vec{q}) = 5\pi/6$.

20. Даны векторы $\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{m} + 3\vec{n}$, $\vec{b} = \vec{m} + 2\vec{n}$. Найти $\left|\left(3\vec{a} + \vec{b}\right) \times \vec{b}\right|$, если $|\vec{m}| = 4$, $|\vec{n}| = 2$, $(\vec{m}, \hat{\ } \vec{n}) = \pi/4$.

21. В параллелограмме ABCD даны векторы $\overrightarrow{AB} = 5\vec{a} + 7\vec{b}$ и $\overrightarrow{AD} = -3\vec{a} + \vec{b}$. Найти $\left|\overrightarrow{AC} \times (\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD})\right|$, если $|\vec{a}| = \sqrt{3}$, $|\vec{b}| = 3$, $(\vec{a}, \hat{\ } \vec{b}) = \pi/3$.

22. Даны векторы $\vec{a} = \vec{m} + \vec{n}$, $\vec{b} = -\vec{m} + 3\vec{n}$ и $\vec{c} = 5\vec{m} - \vec{n}$. Найти $\left|2\vec{a} \times \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{c} \times \vec{b}\right|$, если $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = \sqrt{18}$, $(\vec{m}, \hat{\ } \vec{n}) = \pi/4$.

23. Даны векторы $\vec{a} = \vec{m} - 2\vec{n}$, $\vec{b} = 5\vec{m} + 3\vec{n}$ и $\vec{c} = -\vec{m} + \vec{n}$. Найти $\left|\vec{a} \times \vec{b} - 3\vec{c} \times \left(\vec{a} + \vec{b}\right)\right|$, если $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = \sqrt{8}$, $(\vec{m}, \hat{\ } \vec{n}) = 3\pi/4$.

24. Даны векторы $\vec{p} = 2\vec{m} - 3\vec{n}$, $\vec{q} = 7\vec{m} + \vec{n}$. Найти $\left|\left(8\vec{p} - 2\vec{q}\right) \times \left(\vec{p} + \frac{1}{2}\vec{q}\right)\right|$, если $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 3$, $(\vec{m}, \vec{n}) \hat{=} 5\pi/6$.

25. Даны векторы $\vec{a} = 4\vec{m} - \frac{1}{2}\vec{n}$ и $\vec{b} = 3\vec{m} - \vec{n}$. Найти $\left|\left(2\vec{a} + 3\vec{b}\right) \times \left(\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}\right)\right|$, если $|\vec{m}| = 3$, $|\vec{n}| = 2$, $(\vec{p}, \vec{q}) = 3\pi/4$.

26. Даны векторы $\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{m} + 6\vec{n}$ и $\vec{b} = -2\vec{m} + 3\vec{n}$. Найти $\left|\left(3\vec{a} + 2\vec{b}\right) \times \vec{b}\right|$, если $|\vec{m}| = 5$, $|\vec{n}| = 2\sqrt{2}$, $(\vec{m}, \vec{n}) = \pi \hat{/} 4$.

27. Даны векторы $\vec{a} = 3\vec{m} - 4\vec{n}$ и $\vec{b} = \vec{m} + 5\vec{n}$. Найти $\left|\vec{a} \times \left(2\vec{a} + 3\vec{b}\right)\right|$, если $|\vec{m}| = 5$, $|\vec{n}| = \sqrt{12}$, $(\vec{m}, \hat{\ } \vec{n}) = \pi/3$.

28. Векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{n} + 2\vec{m}$ и $\overrightarrow{BC} = 6\vec{m} - 2\vec{n}$ служат сторонами треугольника ABC. Найти $\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{CA}\right|$, если $|\vec{m}| = \sqrt{3}$, $|\vec{n}| = 2$, $(\vec{m}, \vec{n})\hat{\ } = \pi/6$.

29. В параллелограмме ABCD даны векторы $\overrightarrow{AB} = \vec{n} + 2\vec{m}$ и $\overrightarrow{AD} = 4\vec{m} - 6\vec{n}$. Найти $\left|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{BD}\right|$,, если $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = \sqrt{12}$, $(\vec{m}, \hat{\ } \vec{n}) = \pi/3$.

30. В треугольнике ABC даны векторы $\overrightarrow{AB} = -\vec{n} + 4\vec{m}$ и $\overrightarrow{BC} = 3\vec{m} + \vec{n}$. Найти $\left|\overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{AB}\right|$, если $|\vec{m}| = 2$, $|\vec{n}| = 3$, $(\vec{m}, \hat{\ } \vec{n}) = \pi/6$.

Задача 13. Даны координаты вершин пирамиды $A(1,\ 1,\ 1)$; $B(5;\ 3;\ 1)$; $C(3;\ 2;\ 3)$; $D(-2,\ -1,\ 6)$.

1. Найти длину вектора $\overrightarrow{AD}$.
2. Найти угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.
3. Найти проекцию вектора $\overrightarrow{AD}$ на вектор $\overrightarrow{AB}$.
4. Найти площадь грани ABC.
5. Найти объем пирамиды $ABCD$.

Координаты векторов: $\overrightarrow{AB}\{4,\ 2,\ 0\}$; $\overrightarrow{AC}\{2,\ 1,\ 2\}$; $\overrightarrow{AD}\{-3,\ -2,\ 5\}$.

1. Длина вектора $\left|\overrightarrow{AD}\right| = \sqrt{(-3)^2 + (-2)^2 + 5^2} = \sqrt{38}.$

2. $$\cos \widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\overrightarrow{AC}\right|}. \qquad \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 2 = 10;$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{4^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}; \qquad \left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 2^2} = 3.$$

$$\cos \widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}} = \frac{10}{2\sqrt{5} \cdot 3} = \frac{\sqrt{5}}{3}; \qquad \left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) = \arccos\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

3. Проекция вектора $\overrightarrow{AD}$ на вектор $\overrightarrow{AB}$: $\text{Пр}_{\overrightarrow{AB}}\, \overrightarrow{AD} = \dfrac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|}.$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AD} = 4 \cdot (-3) + 2(-2) + 0 \cdot 5 = -16; \qquad \left|\overrightarrow{AB}\right| = 2\sqrt{5};$$

$$\text{Пр}_{\overrightarrow{AB}}\, \overrightarrow{AD} = -\frac{16}{2\sqrt{5}} = -\frac{8\sqrt{5}}{5}.$$

4. $$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|; \qquad \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4\vec{i} - 8\vec{j} - 0 \cdot \vec{k} = 4\left(\vec{i} - 2\vec{j}\right).$$

$$\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = 4\sqrt{1^2 + 2^2} = 4\sqrt{5}; \qquad S_{ABC} = 2\sqrt{5}.$$

5. $$V_{ABCD} = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}\right)\right|; \qquad \left(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}\right) = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ -3 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 4. \quad V_{ABCD} = \frac{2}{3}.$$

Контрольные варианты к задаче 13

Задача. Даны координаты вершин пирамиды ABCD. Требуется найти:

1) длины векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AD}$;

2) угол между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$;

3) проекцию вектора $\overrightarrow{AD}$ на вектор $\overrightarrow{AB}$;

4) площадь грани ABC ;

5) объем пирамиды ABCD.

1. $A(-2;\ 0;\ 4)$, $B(4;\ -3;\ -2)$, $C(7;-2;\ 2)$, $D(-1;\ 2;\ 6)$.

2. $A(0;-1;\ 1)$, $B(6;\ -4;\ -5)$, $C(9;-3;\ -1)$, $D(1;\ 1;\ 3)$.

3. $A(-5;\ 1;\ 3)$, $B(1\ -2;\ -3)$, $C(4;-1;\ 1)$, $D(-4;\ 3;\ 5)$.

4. $A(-1;\ -3;\ 0)$, $B(5;\ -6;\ -6)$, $C(8;-5;\ -2)$, $D(0;\ -1;\ 2)$.

5. $A(1;\ 2;\ 5)$, $B(7;\ -1;\ -1)$, $C(10;0;\ 3)$, $D(2;\ 4;\ 7)$.

6. $A(-3;\ -2;-1)$, $B(3;\ -5;\ -7)$, $C(6;-4;\ -3)$, $D(-2;\ 0;\ 1)$.

7. $A(2;\ 3;\ 2)$, $B(8;\ 0;\ -4)$, $C(11;1;\ 0)$, $D(3;\ 5;\ 4)$.

8. $A(-4;\ 4;\ -2)$, $B(2;\ 1;\ -8)$, $C(5;2;\ -4)$, $D(-3;\ 6;\ 0)$.

9. $A(3;\ 5;-3)$, $B(9;\ 2;\ -9)$, $C(12;3;\ -5)$, $D(4;\ 7;\ -1)$.

10. $A(4;\ -4;\ 1)$, $B(10;\ -7;\ -5)$, $C(13;-6;\ -1)$, $D(5;\ -2;\ 3)$.

11. $A(4;\ 0;\ 4)$, $B(0;\ 5;\ 0)$, $C(0;0;\ 6)$, $D(1;\ 3;\ -1)$.

12. $A(-1;\ -3;\ 4)$, $B(2;\ 3;\ -4)$, $C(-3;1;\ -2)$, $D(4;\ -1;\ 3)$.

13. $A(0;\ 0;\ 0)$, $B(2;\ 3;\ -1)$, $C(-2;4;\ 5)$, $D(3;\ -1;\ 4)$.

14. $A(3;\ 2;\ -4)$, $B(2;\ -5;\ 3)$, $C(-5;6;\ -1)$, $D(5;\ 2;\ 4)$.

15. $A(6;\ 0;\ 1)$, $B(-6;\ 2;\ -3)$, $C(2;2;\ 4)$, $D(3;\ 4;\ -2)$.

16. $A(-4;\ 1;-4)$, $B(0;\ -5;\ 0)$, $C(0;0;-2)$, $D(-1;\ 3;\ 1)$.

17. $A(2;\ 3;\ 5)$, $B(3;\ -2;\ 6)$, $C(2;\ 2;\ -5)$, $D(6;\ 3;\ -3)$.

18. $A(5;\ -2;-1)$, $B(3;\ 3;\ 4)$, $C(3;-1;\ -2)$, $D(0;\ -1;\ 2)$.

19. $A(3;\ -1;\ -2)$, $B(5;\ -2;\ -1)$, $C(0;-1;\ 2)$, $D(3;\ 3;\ 4)$.

20. $A(5;\ 2;\ 4)$, $B(-5;\ 6;\ -1)$, $C(3;2;\ -4)$, $D(2;\ -5;\ 3)$.

21. $A(4;\ 0;\ 0)$, $B(-2;\ 1;\ 2)$, $C(1;3;\ 2)$, $D(3;\ 2;\ 7)$.

22. $A(4;\ 2;\ 5)$, $B(0;\ 7;\ 1)$, $C(0;2;\ 7)$, $D(1;\ 5;\ 0)$.

23. $A(4;\ 4;\ 10)$, $B(7;\ 10;\ 2)$, $C(2;8;\ 4)$, $D(9;\ 6;\ 9)$.

24. $A(4;\ 6;\ 5)$, $B(6;\ 9;\ 4)$, $C(2;10;\ 10)$, $D(7;\ 5;\ 9)$.

25. $A(3;\ 5;\ 4)$, $B(8;\ 7;\ 4)$, $C(5;10;\ 4)$, $D(4;\ 7;\ 8)$.

26. $A(10;\ 6;\ 6)$, $B(-2;\ 8;\ 2)$, $C(6;8;\ 9)$, $D(7;\ 10;\ 3)$.

27. $A(1;\ 8;\ 2)$, $B(5;\ 2;\ 6)$, $C(5;7;\ 4)$, $D(4;\ 10;\ 9)$.

28. $A(6;\ 6;\ 5)$, $B(4;\ 9;\ 5)$, $C(4;6;\ 11)$, $D(6;\ 9;\ 3)$.

29. $A(7;\ 2;\ 2)$, $B(5;\ 7;\ 7)$, $C(5;3;\ 1)$, $D(2;\ 3;\ 7)$.

30. $A(8;\ 6;\ 4)$, $B(10;\ 5;\ 5)$, $C(5;\ 6;\ 8)$, $D(8;\ 10;\ 7)$.