# АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ НА ПЛОСКОСТИ

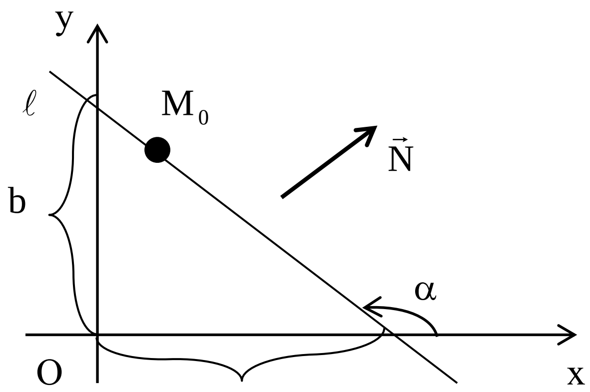
Всякой линии L на плоскости XOY соответствует некоторое уравнение F(x,y)=0 с двумя переменными x и y . Это <u>уравнение линии</u> L.

## Прямая линия на плоскости

Прямая линия $\ell$ задается уравнением первой степени относительно x и y.

$$\ell: Ax + By + C = 0. \qquad (6)$$

Это <u>общее уравнение</u> прямой $\ell$. Здесь коэффициенты A и B есть координаты нормального вектора $\vec{N} = (A, B)$ (рис. 21).




$\vec{a}$ Рис. 21

Существуют другие виды уравнения прямой $\ell$. Так, решив уравнения (6) относительно y , получим (если $B \neq 0$):

$$\ell: y = kx + b, \quad k = -\frac{A}{B}, \quad b = -\frac{C}{B}.$$

Это уравнение прямой с <u>угловым</u>

Здесь $k = tg\alpha$- угловой коэффициент прямой, b – величина отрезка, отсекаемого прямой на оси OY (рис. 21).Если $C \neq 0$, то уравнение (6) можно записать в форме

$\ell: \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$. Здесь a и b - величины отрезков, которые прямая $\ell$ отсекает на осях OX и OY (рис. 21).

Если прямая проходит через две заданные точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, то ее уравнение имеет вид $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1}$.

**Пример.** Прямая $\ell$ проходит через точки $M_1(-1,4)$ и $M_2(5,2)$. Написать ее уравнение, найти угловой коэффициент и отрезки, которые она отсекает на осях координат.

**Решение.**

$\dfrac{x+1}{5+1} = \dfrac{y-4}{2-4}$, $\dfrac{x+1}{6} = \dfrac{y-4}{-2}$, $-2x - 2 = 6y - 24$, $x + 3y - 11 = 0$ - общее уравнение прямой. Отсюда следует, что $3y = -x + 11$ или $y = -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{11}{3}$ - уравнение прямой с угловым коэффициентом. Здесь $k = -\dfrac{1}{3}$. Из уравнения

$x + 3y - 11 = 0 \Rightarrow x + 3y = 11$, $\dfrac{x}{11} + \dfrac{3y}{11} = 1$, $\dfrac{x}{11} + \dfrac{y}{11/3} = 1$. Итак, a=11, b=$\dfrac{11}{3}$.

Если прямые $\ell_1: y = k_1x + b_1$ и $\ell_2: y = k_2x + b_2$ пересекаются в точке M (рис. 22), то угол поворота от $\ell_1$ и $\ell_2$ определяется по формуле

$$tg\Theta = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 \cdot k_2}. \qquad (7)$$

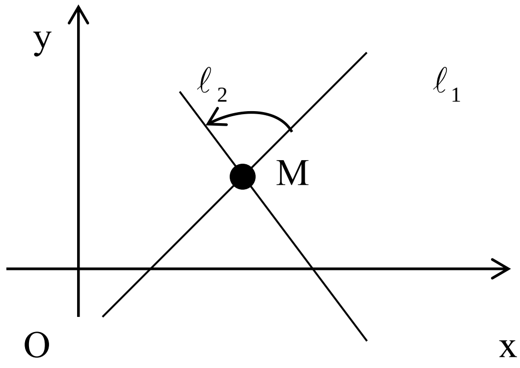


Рис. 22

В частности, если $\ell_1 \parallel \ell_2$, то $\Theta = 0$, $tg\Theta = 0$ и $k_1 = k_2$. Если же $\ell_1 \perp \ell_2$, то $\Theta = 90$, $tg\Theta = \infty$. Из формулы (7) следует, что $1 + k_1 \cdot k_2 = 0$ или $k_2 = -1/k_1$.

**Пример.** Найти угол между прямыми $\ell_1: x + 2y + 6 = 0$ и $\ell_2: 3x + y - 2 = 0$.

**Решение.** Так как $\ell_1: y = -1/2x - 3$, то $k_1 = -1/2$.

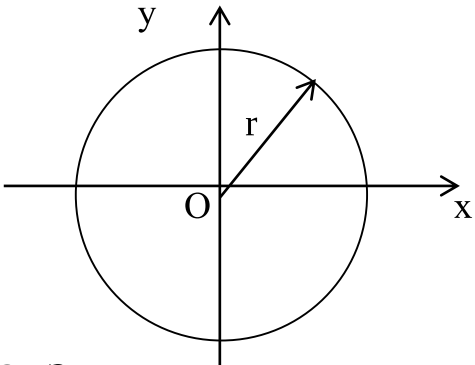
Так как $\ell_1: y = -3x + 2$, то $k_2 = -3$.

$$tg\Theta = \frac{-3 + 1/2}{1 + (-3) \cdot (-1/2)} = -1, \quad \Theta = 135^0.$$

## Кривые второго порядка

Так называются линии, которые описываются уравнениями второй степени относительно x и y. К ним относятся окружность, эллипс, гипербола и парабола.

1. Окружность



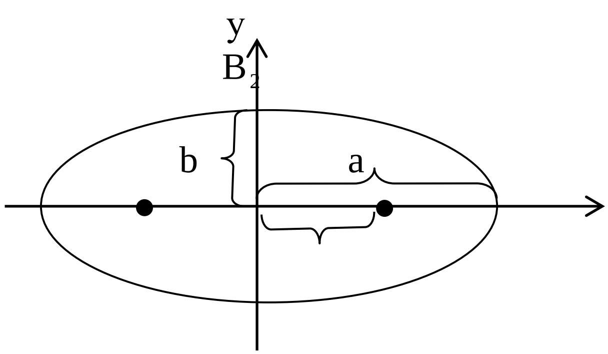

$x^2 + y^2 = r^2$ - каноническое уравнение,

x, y – текущие координаты окружности,

O – центр окружности,

r – радиус окружности.

2. Эллипс

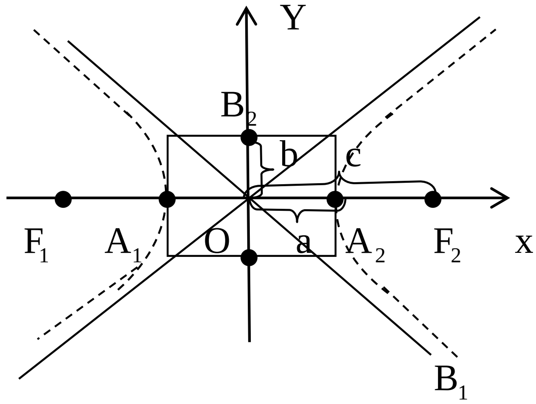



$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ - каноническое уравнение, a – большая полуось эллипса, b – малая полуось. $F_1(-c,0)$, $F_2(c,0)$ - фокусы эллипса. Величины a, b, c связаны формулой $b^2 = a^2 - c^2$.

$A_1$ $F_1$ O c $F_2$ $A_2$ x

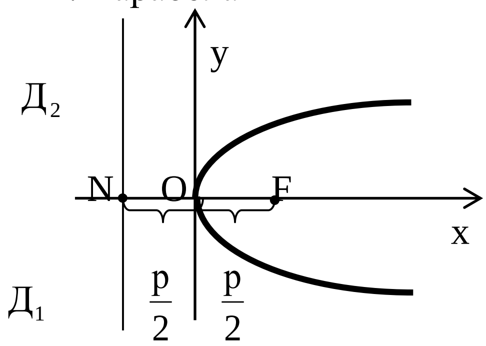
$B_1$

3. Гипербола




$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$-каноническое уравнение, a – действительная полуось, b - мнимая полуось, $F_1(-C,0)$, $F_2(C,0)$ - фокусы гиперболы, $y=\pm\frac{b}{a}x$ - уравнения асимптот; величины $a, b, c$ связаны формулой $b^2=c^2-a^2$.

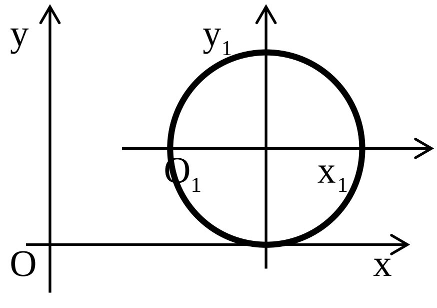
4. Парабола



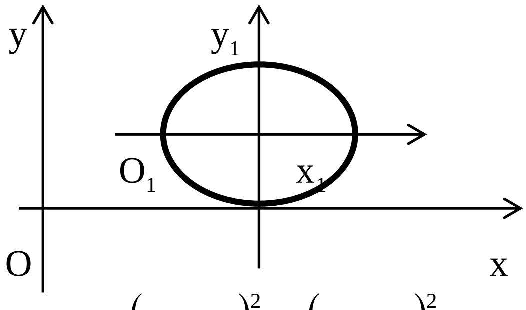

$y^2=2px$ - каноническое уравнение, $|NF|=p$ - параметр параболы, O – вершина параболы, $F(p/2,0)$- фокус параболы. Прямая $Д_1Д_2$- директриса. Уравнение $Д_1Д_2$ : $x=-p/2$.

Если изменить расположение кривой относите-льно системы координат, то изменится и урав-нение кривой, которое уже не будет каноническим. При этом возможны следующие случаи:

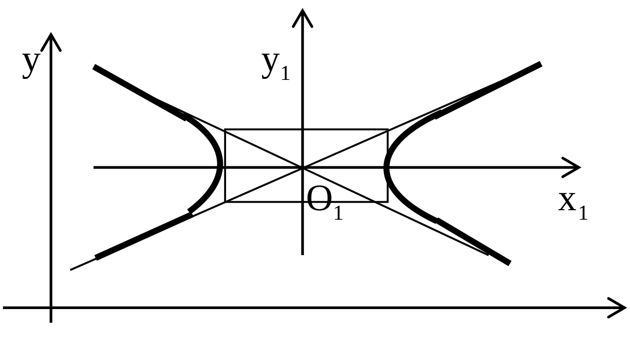
Центр кривой перенесен в точку $O_1(x_0,y_0)$ без изменения направления осей симметрии. Уравнения полученных кривых называют нормальными.

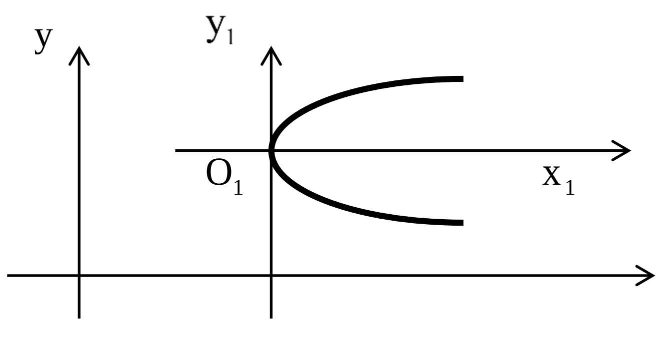



$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$$




$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$



O x O x

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1 \qquad\qquad (y-y_0)^2=2p(x-x_0)$$

**Полярная система координат**

Она задается полярной осью $\rho$,на которой указаны начало отсчета O и единица
масштаба (рис.23).

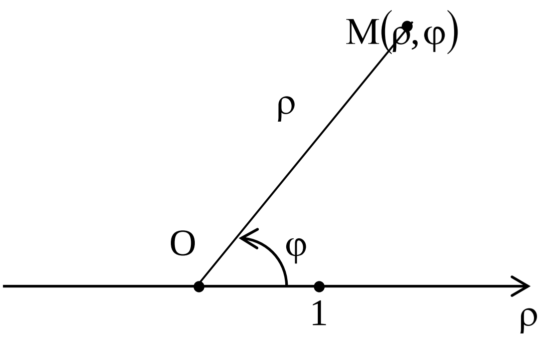



Рис. 23

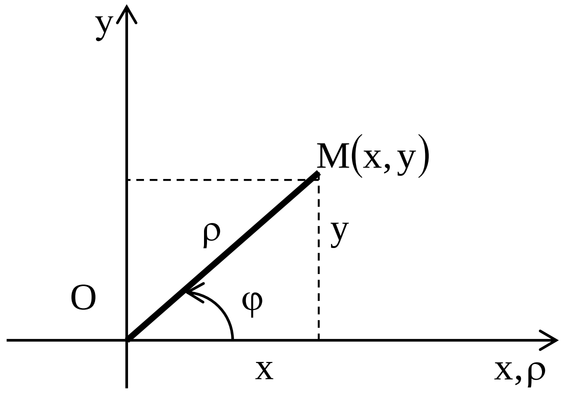



Рис. 24

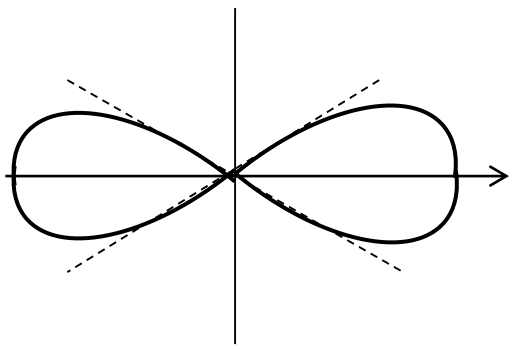
В полярной системе всякая точка M имеет две координаты: расстояние $\rho$ от полюса O до точки M, то есть $\rho=\left|\overrightarrow{OM}\right|$, и угол $\varphi$, который образует радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$ с осью $\rho$. Числа $\rho$ и $\varphi$ называются <u>полярными координатами</u> точки M. Они изменяются в границах $0\le\rho<+\infty,\ -\infty<\varphi<+\infty$.

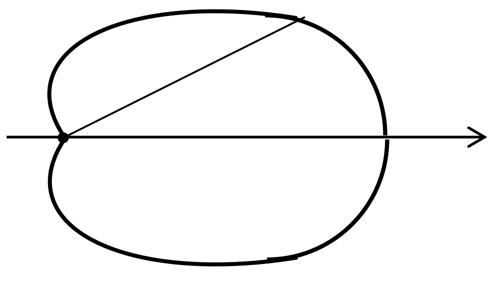
Если полярную систему координат естественным образом совместить с декар-
товой системой XOY (рис. 24), то $x=\rho\cdot\cos\varphi$, $y=\rho\cdot\sin\varphi$. Это формулы, с помощью которых можно перейти от декартовых координат к полярным. Из этих формул следует, что $x^2+y^2=\rho^2$. Таким образом, полярные координаты выгодны в тех случаях, когда уравнение линии $L:F(x,y)=0$ содержит выражение $x^2+y^2$.

**Пример.** Уравнение кривой $L:(x^2+y^2)=a^2(x^2-y^2)$ записать в полярных координатах.

Здесь $\left(x^2+y^2\right)^2=\rho^4$, $x^2-y^2=\rho^2\left(\cos^2\varphi-\sin^2\varphi\right)=\rho^2\cos2\varphi$.

Поэтому $\rho^4=a^2\cdot\rho^2\cdot\cos2\varphi$, или $\rho^2=a^2\cdot\cos2\varphi$. Эта кривая называется лемнискатой Бернулли (рис. 25).





O ρ O ρ

Рис. 25 Рис. 26

**Пример.** Построить кривую $\rho = a(1+\cos\varphi)$. Эта кривая называется кардиоидой (рис. 26). Строим таблицу значений, придавая аргументу $\varphi$ значения $0 \ldots 2\pi$ с постоянным шагом $h = \pi/4$.

| $\varphi$ | 0 | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{3}{4}\pi$ | $\pi$ | … | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\rho$ | 2a | 1,7a | a | 0,3a | 0 | … | 2a |

В обобщенной полярной системе координат допускаются отрицательные значения полярного радиуса $\rho$ . В этой системе $-\infty < \rho < +\infty$, $-\infty < \varphi < +\infty$. При этом точки $M_1(\rho, \varphi)$ и $M_2(-\rho, \varphi)$ строятся симметрично относительно полюса О. Например, из уравнения лемнискаты $\rho^2 = a^2\cos 2\varphi$ следует, что $\rho = \pm a\sqrt{\cos 2\varphi}$, $a > 0$.

Здесь $\cos 2\varphi \geq 0$, $-\frac{\pi}{2} \leq 2\varphi \leq \frac{\pi}{2}$ и $-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$. Строим таблицу значений.

| $\varphi$ | $-\frac{\pi}{4}$ | $-\frac{\pi}{8}$ | $-\frac{\pi}{12}$ | 0 | $\frac{\pi}{12}$ | $\frac{\pi}{8}$ | $\frac{\pi}{4}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\rho$ | 0 | $\pm$ 0,8a | $\pm$ 0,9a | $\pm$ a | $\pm$ 0,9a | $\pm$ 0,8a | 0 |

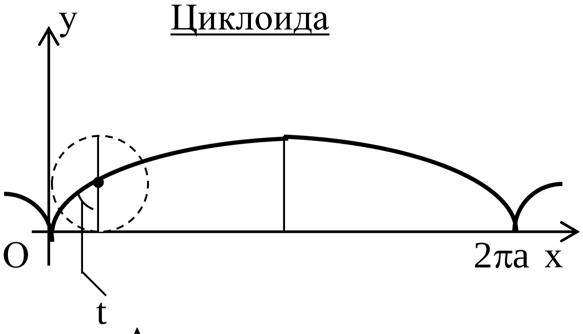
Уравнению $\rho = a\sqrt{\cos 2\varphi}$ соответствует та часть лемнискаты, которая расположе-на в первой и четвертой четвертях, а уравнению $\rho = -a\sqrt{\cos 2\varphi}$ - во второй и треть-ей четвертях.

## Кривые, заданные параметрически

Линию L на плоскости XOY можно рассматривать как траекторию движущейся точки M (x,y) . При этом ее координаты x и y изменяются в зависимости от некоторого параметра t. Обычно в качестве параметра t выступает либо время движения, либо угол поворота. Таким образом, параметрические уравнение линии L имеют вид $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, где $\alpha \leq t \leq \beta$.

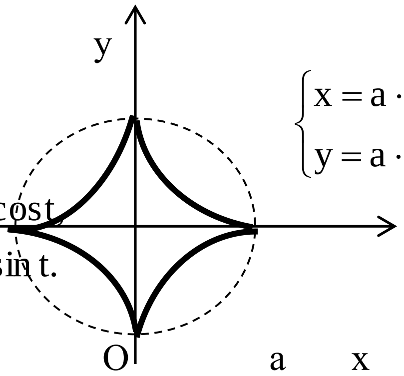
## Примеры некоторых кривых, заданных параметрически

Циклоида



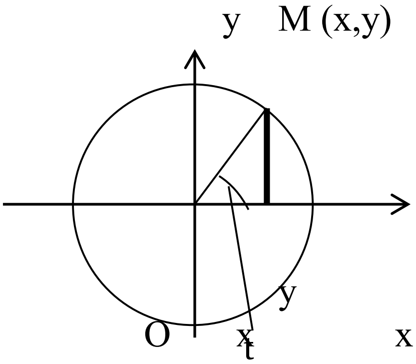

$$\begin{cases} x = a(t - \sin t), \\ y = a(1 - \cos t). \end{cases}$$

Астроида




$$\begin{cases} x = a \cdot \cos^3 t, \\ y = a \cdot \sin^3 t. \end{cases}$$

Окружность




$$\begin{cases} x = a \cdot \cos t \\ y = a \cdot \sin t. \end{cases}$$

Здесь $t$ – угол поворота радиуса-вектора движущейся точки. Циклоиду описывает точка М, лежащая на окружности радиусом $a$, когда окружность движется по оси ОХ и описывает полный оборот. Астроиду описывает также точка, лежащая на окружности радиусом $a/2$, при ее движении внутри окружности радиусом $a$.

## АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

В пространстве XYZ всякой поверхности P соответствует уравнение F(x,y,z)=0 с тремя переменными $x, y, z$. Линия L в трехмерном пространстве определяется как результат пересечения двух поверхностей: $L = P_1 x P_2$. Таким образом, аналитически линия L задается системой двух уравнений с тремя переменными $L: \begin{cases} F_1(x,y,z) = 0 \\ F_2(x,y,z) = 0 \end{cases}$.Простейшей из поверхностей является плоскость.

### Плоскость

Плоскость $\pi$ задается уравнением первой степени относительно x,y,z. $\pi: Ax + By + Cz + Д = 0$. Это общее уравнение плоскости. Здесь A, B, C - координа

ты нормального вектора $\vec{N} = (A, B, C)$ (рис. 27).

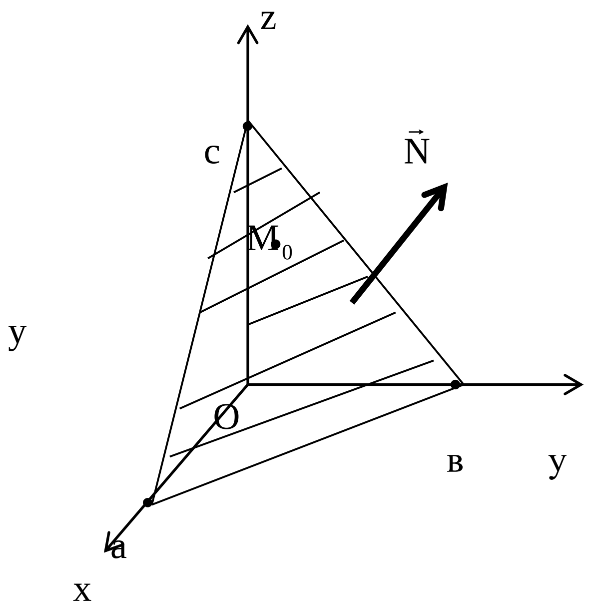



Рис. 27

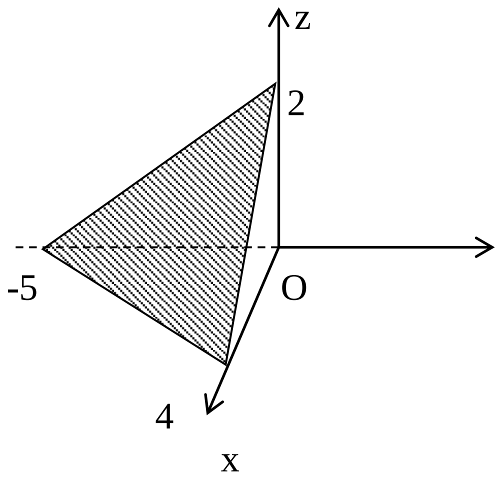



Рис. 28

Если плоскость $\pi$ проходит через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, то ее уравнение имеет вид $\pi: A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$. Чтобы построить плоскость, рекомендуется

ее уравнение записать в «отрезках»: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.

**Пример.** Построить плоскость 5x - 4y + 10z – 20 = 0 (рис. 28).

**Решение.** 5x – 4y + 10z= 20, $\frac{5x}{20}-\frac{4y}{20}+\frac{10z}{20}=1$, $\frac{x}{4}+\frac{y}{-5}+\frac{z}{2}=1$.

Итак, a = 4, b = - 5, c = 2 .

Известно, что если точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ не лежат на одной прямой, то они определяют единственную плоскость. Ее уравнение имеет вид

$$\pi: \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.$$

**Пример.** Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(1,0,-3)$, $M_2(4,-1,2)$, $M_3(2,-2,1)$.

**Решение.** $\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z+3 \\ 4-1 & -1-0 & 2+3 \\ 2-1 & -2-0 & 1+3 \end{vmatrix}=0$, $\begin{vmatrix} x-1 & y & z+3 \\ 3 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix}=0$.

Разложим определитель по элементам первой строки:

$$(x-1)\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}-y\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}+(z+3)\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}=0, \qquad 6(x-1)-7y-5(z+3)=0.$$

$\pi$: $6x-7y-5z-21=0$.

Пусть заданы две плоскости $\pi_1: \quad A_1x+B_1y+C_1z+Д_1=0$, $\vec{N}_1(A_1, B_1, C_1)$,

$\pi_2: \ A_2x+B_2y+C_2z+Д_2=0, \quad \vec{N}_2(A_2,B_2,C_2)$. Угол $\Theta$ между ними численно
равен углу между их нормальными векторами $\vec{N}_1$ и $\vec{N}_2$, поэтому

$$\cos\Theta=\frac{\vec{N}_1\cdot\vec{N}_2}{\left|\vec{N}_1\right|\cdot\left|\vec{N}_2\right|}=\frac{A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2+C_1\cdot C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

В частности, если $\pi_1\|\pi_2$, то $\vec{N}_1\|\vec{N}_2$ и $\dfrac{A_1}{A_2}=\dfrac{B_1}{B_2}=\dfrac{C_1}{C_2}$.Если же $\pi_1\perp\pi_2$, то $\vec{N}_1\perp\vec{N}_2$ ; тогда $\cos\Theta=0,$ т.е. $A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2+C_1\cdot C_2=0$.

**Пример.** Какой угол образуют плоскости $\pi_1: x-2y-z+4=0$, $\pi_2=3x+y-2z-7=0$?

**Решение.** Здесь $\vec{N}_1(1,-2,-1), \quad \vec{N}_2(3,1,-2), \quad \vec{N}_1\cdot\vec{N}_2=3-2+2=3$.
$\left|\vec{N}_1\right|=\sqrt{1+4+1}=\sqrt{6}, \quad \left|\vec{N}_2\right|=\sqrt{9+1+4}=\sqrt{14}$. $\cos\Theta=\dfrac{3}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{14}}=\dfrac{3}{2\sqrt{21}}$.

## Прямая линия в пространстве

Известно, что две плоскости $\pi_1$ и $\pi_2$ пересекаются по прямой $\ell=\pi_1\times\pi_2$. Поэтому уравнения прямой $\ell$ имеют вид

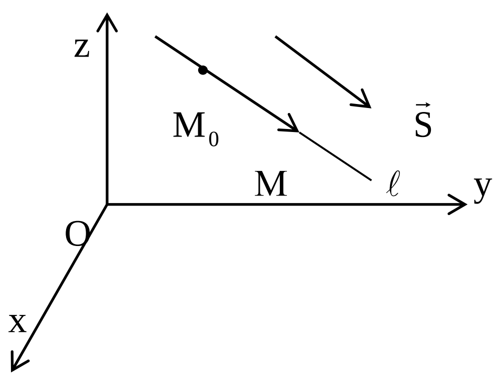
$$\ell:\begin{cases}A_1x+B_1y+C_1z+Д_1=0\\ A_2x+B_2y+C_2z+Д_2=0.\end{cases}$$

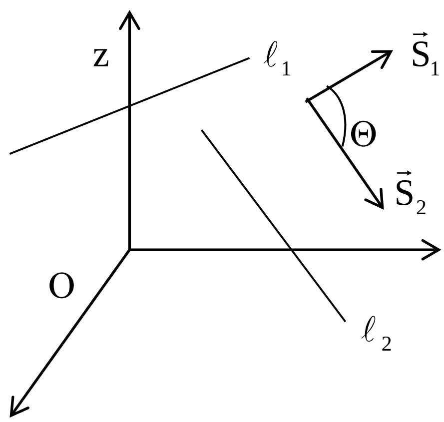
Это <u>общие уравнения</u> прямой $\ell$ в трехмерном пространстве.

Положение прямой $\ell$ будет определено, если известны некоторая точка $M_0=(x_0,y_0,z_0)$ на этой прямой и вектор $\vec{S}=(m,n,p)$, которому прямая $\ell$ параллельна (рис. 29). Если $M=(x,y,z)$- произвольная точка прямой $\ell$, то $\overrightarrow{M_0M}=(x-x_0,y-y_0,z-z_0)$. Так как $\overrightarrow{M_0M}\|\vec{S}$, то

$$\ell:\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}. \tag{8}$$

Здесь $\vec{S}=(m,n,p)$- направляющий вектор прямой $\ell$.



x

Рис. 29 Рис. 30

Уравнеия (8) называются каноническими уравнения прямой $\ell$.

Как и на плоскости, прямую $\ell$ в пространстве можно задать с помощью двух точек $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, через которые она проходит:

$$\ell: \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}.$$

**Пример.** Написать уравнение прямой $\ell$, которая проходит через точки $M_1(1,-3,5)$ и $M_2(0,4,-2)$.

$$\frac{x-1}{0-1} = \frac{y+3}{4+3} = \frac{z-5}{-2-5} \quad \text{или} \quad \frac{x-1}{-1} = \frac{y+3}{7} = \frac{z-5}{-7}.$$

В механике часто используются <u>параметрические уравнения</u> прямой $\ell$: $x = x_0 + mt, \quad y = y_0 + nt, \quad z = z_0 + pt, \quad -\infty < t < +\infty.$

**Пример.** Уравнения полученной прямой записать в параметрической форме. Приравнивая каждое из отношений параметру t, получим $\frac{x-1}{-1} = t, \frac{y+3}{7} = t, \frac{z-5}{-7} = t$. Отсюда следует, что x = - t + 1, y = 7t – 3, z = - 7t + 5.

Угол между двумя прямыми $\ell_1$ и $\ell_2$ - это угол $\Theta$ между их направляющими векторами (рис. 30) $\vec{S}_1 = (m_1, n_1, p_1)$ и $\vec{S}_2 = (m_2, n_2, p_2)$.

Поэтому $$\cos\Theta = \frac{\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2}{\left|\vec{S}_1\right| \cdot \left|\vec{S}_2\right|} = \frac{m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 + p_1 \cdot p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}.$$

Если $\ell_1 \| \ell_2$, то $\vec{S}_1 \| \vec{S}_2$, поэтому $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$. Если $\ell_1 \perp \ell_2$, то $\vec{S}_1 \perp \vec{S}_2$ и $\cos\Theta = 0$, поэтому $m_1 \cdot m_2 + n_1 \cdot n_2 + p_1 \cdot p_2 = 0$.

**Пример.** Написать уравнения прямой $\ell$, которая проходит через точку $M(1,-2,3)$ параллельно прямой $\ell_1$: $\frac{x+2}{1} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{-5}$.

**Решение.** Так как $\ell \| \ell_1$, то $\vec{S} \| \vec{S}_1$. Это значит, что в качестве направляющего вектора прямой $\ell$ можно взять вектор $\vec{S}_1 = (1,3,-5)$. Канонические уравнения искомой прямой имеют вид $\ell$: $\frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{3} = \frac{z-3}{-5}$

.

## Криволинейные поверхности второго порядка

Это поверхности, заданные уравнением второй степени с тремя переменными. К ним относятся сфера, трехосный эллипсоид, однополостный и двуполостный гиперболоиды, эллиптический и гиперболический параболоиды, конусы второго порядка. Их уравнения имеют следующий вид:

$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ - сфера; $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ - эллипсоид;

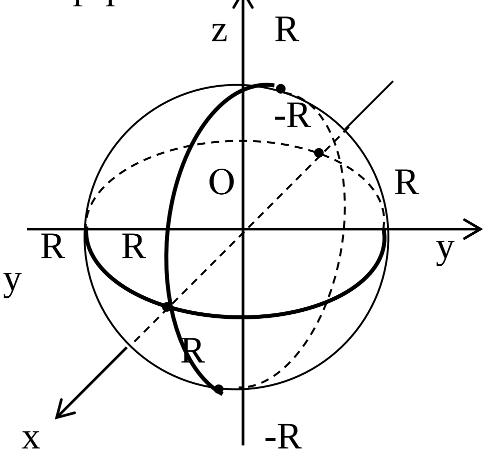
$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ - однополостный гиперболоид;

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$ - двуполостный гиперболоид;

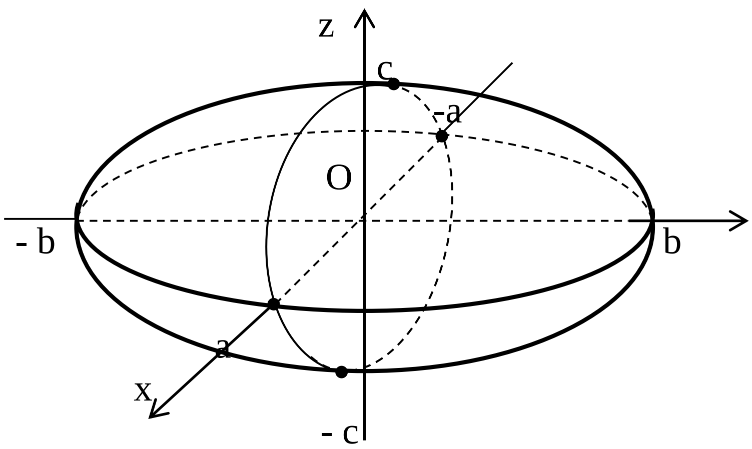
$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$ - эллиптический параболоид;

$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$ - гиперболический параболоид.

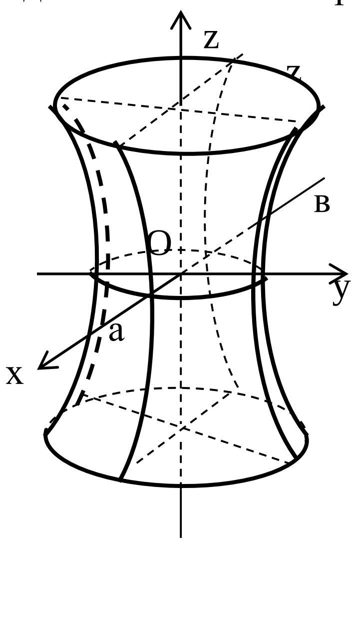
1. Сфера



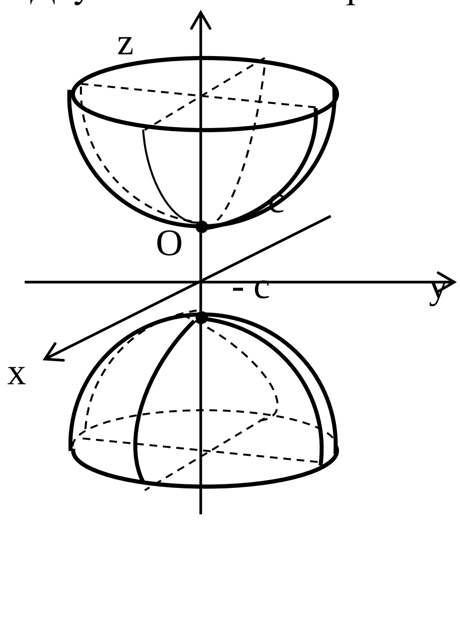

2. Эллипсоид



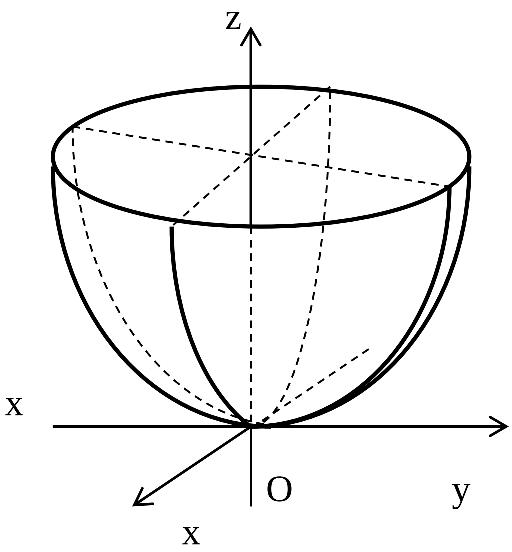

3. Однополостный гиперболоид




4. Двуполостный гиперболоид



5. Эллиптический параболоид




6. Гиперболический параболоид