1. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

Прежде чем дать общее определение предела функции, рассмотрим примеры.

Пример 1. Пусть $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3}$. Рассмотрим таблицу значений этой функции вблизи точки $x = 3$.

x	2,94	2,96	3	3,02	3,04	3,06
$\frac{x^2-9}{x-3}$	5,94	5,96	функция не определена	6,02	6,04	6,06

При $x = 3$ функция не определена. Если же значения x выбрать достаточно близкими к трём, то значения $f(x)$ оказываются, как видно из таблицы, достаточно близкими к 6. Докажем это строго математически, а именно: покажем, что для любого $\varepsilon > 0$, как бы мало оно ни было, можно указать такую окрестность точки $x = 3$, что всюду внутри неё, за исключением самой точки, будет выполняться неравенство $|f(x)-6| < \varepsilon$.

Действительно, если $x \neq 3$, то $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x-3} = x+3$, поэтому $|f(x)-6| = |x+3-6| = |x-3| < \varepsilon$ при $3-\varepsilon < x < 3+\varepsilon$. Таким образом, неравенство $|f(x)-6| < \varepsilon$ выполняется при всех $x \in (3-\varepsilon;\ 3+\varepsilon)$, кроме $x = 3$.

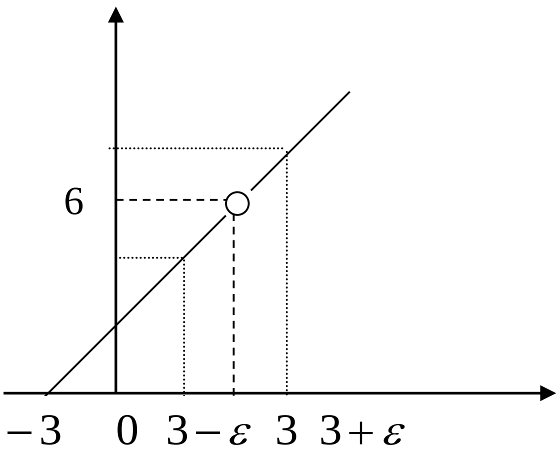

Рис.1

Если, например, мы хотим, чтобы значения f(x) отличались от 6 менее чем на $\varepsilon = 0{,}01$, то должны рассматривать $x \in (2{,}99;\ 3{,}01)$. Аналогично при $\varepsilon = 0{,}001$ получим интервал (2,999 ; 3,001) и т.д. Интервал $(3-\varepsilon;\ 3+\varepsilon)$ можно построить геометрически (рис. 1). Итак, если значения аргумента x выбрать **достаточно близкими** к 3, но не равными 3, то значения функции будут **сколь угодно мало** отличаться от 6. Несмотря на то что рассматриваемая функция не определена при $x = 3$, естественно считать, что её **предел** при $x \to 3$ (x **стремящемся** к 3) существует и равен 6:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} = 6.$$

Рассмотрим ещё один пример.

Пример 2. Пусть $f(x) = x^2$. Не рассуждая столь подробно, как в примере 1, отметим очевидный факт: чем ближе значения аргумента x к 2, тем ближе значения $f(x)$ к 4, то есть, тем меньше абсолютная величина разности $x^2 - 4$. Действительно, какое бы малое число $\varepsilon > 0$ мы ни взяли, всегда можно указать такой интервал, содержащий точку $x = 2$, что для всех для точек из этого интервала будет выполняться неравенство $|x^2 - 4| < \varepsilon$. На рис. 2 $|f(x) - 4| = |x^2 - 4| < \varepsilon$ при всех $x \in (2 - \delta_1; 2 + \delta_2)$. Так как $\delta_1 > \delta_2$, то полагая $\delta = \delta_2$, можем утверждать, что если $|x - 2| < \delta$, то $|f(x) - 4| < \varepsilon$.

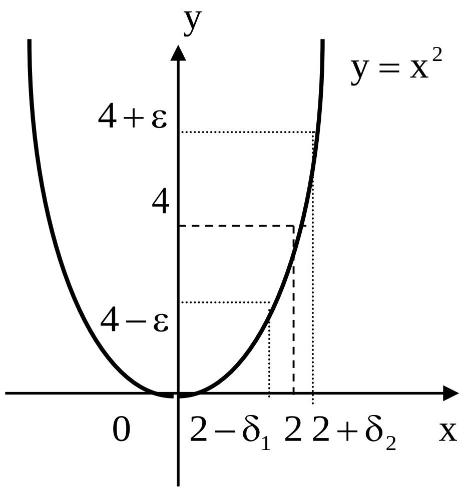

Рис. 2

Таким образом, так же, как и в примере 1, если значения x выбрать **достаточно близкими** к 2, то значения функции $f(x) = x^2$ будут **как угодно мало отличаться** от 4, и число 4 естественно назвать пределом функции при x, стремящемся к 2:

$$\lim_{x\to 2} x^2 = 4.$$

Перейдём к определению предела функции в точке.

Определение 1. Число **b** называется **пределом функции** $f(x)$ при $x \to a$, если для любого положительного ε можно указать такой интервал, содержащий точку $x = a$, что всюду внутри него, за исключением, быть может, самой точки $x = a$, будет выполняться неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Другими словами, $\lim_{x\to a} f(x) = b$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся зависящее от ε $\delta > 0$ такое, что для всех x, удовлетворяющих неравенству $0 < |x - a| < \delta$, справедливо следующее: $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Пример 3. Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{x - 1}{x}$, которая определена при всех $x \neq 0$. Составим таблицу её значений и построим график.

x	1	2	3	4	10	100	...	-1	-2	-3	-4	-10	-100
$\frac{x-1}{x}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{99}{100}$	...	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{11}{10}$	$\frac{101}{100}$

Исследуя таблицу и график (рис. 3), можно предположить, что с возрастанием $|x|$ значения $f(x)$ неограниченно приближаются к 1.

Чтобы доказать это, вычислим $|f(x)-1|$ - расстояние от точки A $(x, f(x))$ на графике функции до прямой $y = 1$:

$$|f(x)-1| = \left|\frac{x-1}{x} - 1\right| = \frac{1}{|x|}.$$

Очевидно, если значение $|x|$ достаточно велико, найденное расстояние может быть меньше любого наперёд заданного числа. Действительно, $\frac{1}{|x|} < \frac{1}{100}$ при $|x| > 100$, $\frac{1}{|x|} < \frac{1}{1000}$ при $|x| > 1000$ и т.д.

Вообще, для произвольно заданного $\varepsilon > 0$ $|f(x)-1| = \frac{1}{|x|} < \varepsilon$, если $|x| > \frac{1}{\varepsilon}$ (при всех $x > \frac{1}{\varepsilon}$ или $x < -\frac{1}{\varepsilon}$).

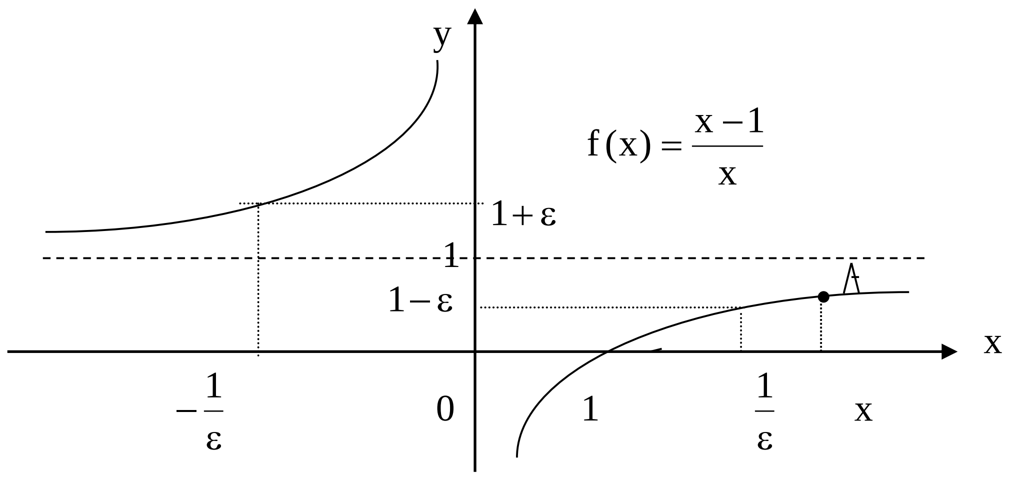

Рис. 3

Дадим определение предела функции на бесконечности.

Определение 2. Число **b** называется **пределом функции** $f(x)$ при $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$, если для любого положительного числа ε найдётся отвечающее ему положительное число A такое, что для всех $x > A$ (или $x < -A$) справедливо неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

В рассмотренном примере 3 $A = \frac{1}{\varepsilon}$ и $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x-1}{x} = 1$. Кроме того, ясно, что $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Заметим, что не для всякой функции $y = f(x)$ существует $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ или $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$. Например, при $x \to \frac{\pi}{2}$ значения функции $y = tgx$ (рис. 4) или неограниченно растут при ($x < \frac{\pi}{2}$), или неограниченно убывают (при $x > \frac{\pi}{2}$).

Поэтому нельзя указать никакого числа b, к которому стремились бы значения $f(x)$ этой функции при $x \to \frac{\pi}{2}$.

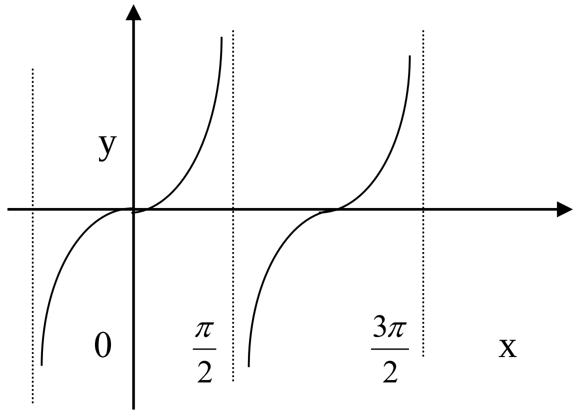

Рис. 4

Другой пример. Рассмотрим функцию, определённую следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ 1 - x^2, & x > 0. \end{cases}$$

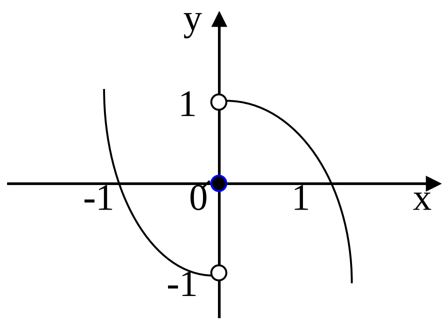

Рис. 5

График этой функции дан на рис. 5. Когда значения аргумента x стремятся к 0, оставаясь отрицательными, соответствующие значения функции $f(x)$ приближаются к (-1). Когда же значения аргумента x приближаются к 0, оставаясь положительными, соответствующие значения функции $f(x)$ стремятся к 1. При этом $f(0) = 0$. Очевидно, что указать какое-либо число, к которому стремились бы все значения $f(x)$ при $x \to 0$, нельзя. Поэтому для данной функции $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ не существует. Хотя предел этой функции в любой другой точке вычислить можно: к примеру $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \lim\limits_{x\to 1}(1 - x^2) = 0$ или $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = \lim\limits_{x\to -2}(x^2 - 1) = 3$.

Точно так же нельзя указать такое число b, к которому бы стремились все значения функции $y = \sin x$ (рис. 6) при неограниченном возрастании $|x|$ (при $x \to \pm\infty$), так как величина $f(x)$ совершает гармонические колебания с постоянной амплитудой, всё время изменяясь от (-1) до (+1). Поэтому $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \sin x$ не существует.

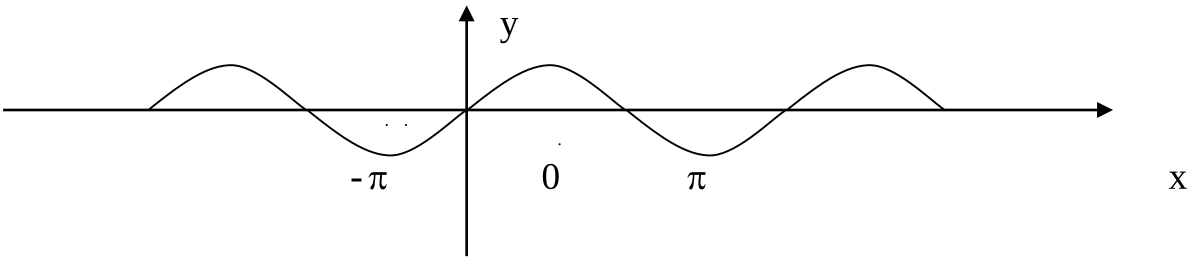

Рис. 6

Пример 4. Исходя из определения предела, доказать, что $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{x^2-x-6}{x+2} = -5$

.

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$ и найдём, при каких значениях x выполняется

неравенство $\left|f(x)+5\right| = \left|\dfrac{x^2-x-6}{x+2}+5\right| < \varepsilon.$

$\left|\dfrac{x^2-x-6}{x+2}+5\right| = \left|\dfrac{x^2+4x+4}{x+2}\right| = \left|x+2\right|$ при всех $x \neq -2$. Таким образом, если $\left|x+2\right| < \varepsilon$ или $x \in (-2-\varepsilon; -2+\varepsilon)$, то $\left|f(x)+5\right| < \varepsilon$, а это означает по определению 1, что $\lim\limits_{x\to-2} \dfrac{x^2-x-6}{x+2} = -5$.

Пример 5. Исходя из определения предела, доказать, что $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x-3}{x+1} = 2$.

Зададим произвольное $\varepsilon > 0$. $\left|f(x)-2\right| = \left|\dfrac{2x+3}{x+1}-2\right| = \dfrac{1}{\left|x+1\right|}$. Отсюда следует, что если $\left|x+1\right| > \dfrac{1}{\varepsilon}$ или $x > -1+\dfrac{1}{\varepsilon}$, то $\left|f(x)-2\right| < \varepsilon$. Таким образом, действительно, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2x+3}{x-1} = 2$ по определению 2.

2. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ О ПРЕДЕЛАХ ФУНКЦИЙ

Приведём без доказательства основные теоремы о пределах функций, полагая, что $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ существуют.

Теорема 1. Предел константы равен самой этой константе: $\lim\limits_{x\to a} c = c$.

Теорема 2. Постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim_{x\to a}(k\cdot f(x)) = k\cdot\lim_{x\to a} f(x).$$

Теорема 3. Предел суммы (разности) функций равен сумме (разности) пределов этих функций: $\lim_{x\to a}(f(x)\pm g(x)) = \lim_{x\to a} f(x)\pm\lim_{x\to a} g(x)$.

Теорема 4. Предел произведения двух функций равен произведению пределов этих функций: $\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x)$.

Теорема 5. Предел частного двух функций равен частному пределов этих функций, если предел знаменателя не равен 0 :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}, \qquad \lim_{x\to a} g(x)\neq 0.$$

Сформулированные теоремы справедливы и в случае, когда $x\to\pm\infty$. Рассмотрим несколько типичных примеров нахождения пределов функций.

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3-2x}{x^2+4}$.

Применяя теоремы 1-5, находим

$$\lim_{x\to 4}\frac{3-2x}{x^2+4} = \frac{\lim\limits_{x\to 4}(3-2x)}{\lim\limits_{x\to 4}(x^2+4)} = \frac{\lim\limits_{x\to 4}3-2\lim\limits_{x\to 4}x}{\lim\limits_{x\to 4}x^2+\lim\limits_{x\to 4}4} = \frac{3-2\cdot 4}{16+4} = \frac{-5}{20} = -\frac{1}{4}.$$

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x^2+2x+3}$.

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2+2x+3} = \frac{\lim\limits_{x\to 1}(x^2-1)}{\lim\limits_{x\to 1}(x^2+2x+3)} = \frac{\lim\limits_{x\to 1}x^2-\lim\limits_{x\to 1}1}{\lim\limits_{x\to 1}x^2+2\lim\limits_{x\to 1}x+\lim\limits_{x\to 1}3} = 0.$$

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{7x+8}{1-x^2}$.

Так как $\lim\limits_{x\to -1}(1-x^2)=0$, то мы не можем воспользоваться теоремой 5. Заметим, однако, что знаменатель данной дроби при $x\to -1$ не равен нулю, а стремится к нему, то есть неограниченно уменьшается по абсолютной величине, оставаясь отличным от нуля. При этом $\lim\limits_{x\to -1}(7x+8)=1$. Таким образом, чем ближе значение x к (-1), тем большей становится абсолютная величина дроби $\dfrac{7x+8}{1-x^2}$, поэтому $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{7x+8}{1-x^2}=\infty$.

Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$. В данном случае о пределе частного $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ничего определённого сразу сказать нельзя. Этот предел зависит от закона изменения функций $f(x)$ и $g(x)$. Если, например, $f(x)=x^4$, $g(x)=x^2$, $a=0$, то $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0} x^2=0$.

Если же $f(x)=2x$, $g(x)=x$, то $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{x}=2$.

Или при $f(x)=x$, $g(x)=x^2$, получаем $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}=\infty$.

Таким образом, знание пределов функций $f(x)$ и $g(x)$ не позволяет судить о поведении их отношения: необходимо знать сами функции и непосредственно исследовать отношение. Поэтому говорят, что когда $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$, выражение $\lim\limits_{x\to a}\big(f(x)/g(x)\big)$ представляет **неопределён-ность вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$.**

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-25}{x^2-6x+5}$.

Так как

$$\lim_{x\to 5}(x^2-25)=\lim_{x\to 5}(x^2-6x+5)=0,$$

то данный предел является неопределённостью вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, и мы не можем воспользоваться теоремой 5.

Однако при $x\neq 5$ данную дробь можно сократить:

$$\frac{x^2-25}{x^2-6x+5}=\frac{(x-5)(x+5)}{(x-1)(x-5)}=\frac{x+5}{x-1}.$$

Поэтому

$$\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{x^2-6x+5}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 5}\frac{x+5}{x-1}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}.$$

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{3+x}-2}{x-1}$.

Этот предел, как и в примере 4, является неопределённостью вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Но, в отличие от примера 4, данную дробь нельзя сразу сократить на $(x-1)$. Поэтому предварительно преобразуем функцию, умножив числитель и знаменатель на ($\sqrt{3+x}+2$) - выражение, сопряжённое числителю. Получим

$$\frac{(\sqrt{3+x}-2)(\sqrt{3+x}+2)}{(x-1)(\sqrt{3+x}+2)}=\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{3+x}+2)}.$$

Так как при рассмотрении данного предела $x \neq 1$, то

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{3+x}-2}{x-1}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{3+x}+2}=\frac{1}{4}.$$

Пример 6. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2}{x^2+4x+5}$.

При $x\to\infty$ значение $|x|$ неограниченно возрастает, поэтому и числитель, и знаменатель дроби неограниченно увеличиваются, т. е.

$$\lim_{x\to\infty}(3x^2+2)=\lim_{x\to\infty}(x^2+4x+5)=\infty.$$

В этом случае говорят, что предел является **неопределённостью вида** $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

.

Так же, как и в рассмотренных выше примерах, ничего определённого о пределе частного $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ сразу сказать нельзя, если $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty} g(x)=\infty$

.

Чтобы вычислить данный предел (или, как говорят, **раскрыть неопределённость),** разделим числитель и знаменатель дроби на x^2- старшую степень аргумента:

$$\frac{3x^2+2}{x^2+4x+5}=\frac{3+\frac{2}{x^2}}{1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2}}.$$

Так как $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$, то, используя теоремы 1,2,3,5, получаем

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+2}{x^2+4x+5}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}(3+\frac{2}{x^2})}{\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{4}{x}+\frac{5}{x^2})}=\frac{3}{1}=3.$$

Пример 7. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{100x^2+195}{x^3+1}$.

Этот предел также является неопределённостью вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Чтобы раскрыть её, разделим числитель и знаменатель дроби на x^3 - старшую степень аргумента:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{100x^2+195}{x^3+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{100}{x}+\frac{195}{x^3}}{1+\frac{1}{x^3}}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}(\frac{100}{x}+\frac{195}{x^3})}{\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x^3})}=\frac{0}{1}=0.$$

Пример 8. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4+4x^2+x}{2x^2-5x+7}$.

x^4 - старшая степень аргумента, поэтому

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+4x^2+x}{2x^2-5x+7}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{\frac{2}{x^2}-\frac{5}{x^3}+\frac{7}{x^4}}.$$

Так как

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^\alpha}=0 \text{ при всех } \alpha>0,$$

то

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^3})=1,\quad \lim_{x\to\infty}(\frac{2}{x^2}-\frac{5}{x^3}+\frac{7}{x^4})=0.$$

Однако подчеркнём, что знаменатель не равен нулю, а лишь стремится к нему, неограниченно уменьшаясь по абсолютной величине с ростом $|x|$. Поэтому

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+4x^2+x}{2x^2-5x+7}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{4}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{\frac{2}{x^2}-\frac{5}{x^3}+\frac{7}{x^4}}=\infty.$$

Примеры 6-8 позволяют сформулировать общее правило вычисления пределов
вида $\lim\limits_{x\to\infty}R(x)$,
где

$$R(x)=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\ldots+b_m}. \qquad \lim_{x\to\infty}R(x)=\begin{cases}\infty\ , & n>m,\\ \frac{a_0}{b_0}, & n=m,\\ 0\ , & n<m.\end{cases}$$

$a_0\neq 0, b_0\neq 0$.

Это правило верно не только для рационального выражения $R(x)$, но и для отношения иррациональных функций.

Пример 9. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2x^2+3}}{\sqrt{3x^2+x+5}}$.

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2x^2+3})=\lim_{x\to\infty}\sqrt{3x^2+x+5}=\infty.$$

Предел является неопределённостью вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. x - старшая степень аргумента данной функции, поэтому $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{2x^2+3}}{\sqrt{3x^2+x+5}}=$

$$=\frac{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}+\frac{\sqrt{2x^2+3}}{x}\right)}{\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{3x^2+x+5}}{x}}=\frac{\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\sqrt{2+\frac{3}{x^2}}\right)}{\lim_{x\to\infty}\sqrt{3+\frac{1}{x}+\frac{5}{x^2}}}=\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}.$$

3. БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ ФУНКЦИИ. ПРИНЦИП ЗАМЕНЫ БЕСКОНЕЧНО МАЛЫХ

Определение 1. Функция $f(x)$ называется **бесконечно малой функцией** (или просто бесконечно малой) в точке $x=a$ (или при $x\to a$), если $\lim_{x\to a}f(x)=0$.

Пример 1. Функция $y=(x-2)^2(x-1)$ - бесконечно мала (б.м.) в точках $x_1=2$ и $x_2=1$, так как $\lim_{x\to 2}(x-2)^2(x-1)=0$ и $\lim_{x\to 1}(x-2)^2(x-1)=0$.

Функция $y=\frac{1}{x^2+1}$ б.м. при $x\to\infty$, так как $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2+1}=0$.

Пусть $\lim_{x\to a}\alpha(x)=\lim_{x\to a}\beta(x)=0$, то есть функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ - б.м. в точке $x=a$.

Определение 2. Бесконечно малые в точке $x=a$ **функции** $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются **эквивалентными**, если $\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1$.

Эквивалентность обозначается так:

$$\alpha(x)\sim\beta(x).$$

Пример 2. Функции $\alpha(x)=(x-2)^2(x-1)$ и $\beta(x)=(x-2)^2$ б.м. при $x\to 2$, кроме того, $\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)^2(x-1)}{(x-2)^2}=1$. Значит, $\alpha(x)\sim\beta(x)$ в точке $x=2$.

Пример 3. Функции $\alpha(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$, $\beta(x)=\dfrac{3x^2+4}{x^4+3x^2+5}$, $\gamma(x)=\dfrac{1}{x^2}$ - б.м. при $x\to\infty$, так как $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+4}{x^4+3x^2+5}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x^2}=0$.

При этом $\alpha(x)\sim\ \gamma(x)$, так как $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\alpha(x)}{\gamma(x)}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2}{x^2+1}=1$. Однако бесконечно малые $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ эквивалентными не являются:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^4+3x^2+5}{(x^2+1)(3x^2+4)}=\frac{1}{3}.$$

Раскрытие неопределённости вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ во многих случаях упрощает следующее утверждение:

Если $\alpha(x)\sim\alpha_1(x)$ и $\beta(x)\sim\ \beta_1(x)$ при $x\to a$ (при $x\to\infty$) и существует $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}$, то существует и $\lim\limits_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}\dfrac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}$,

причём

$$\lim_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}=\lim_{\substack{x\to a\\(x\to\infty)}}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}.$$

Это утверждение называется **принципом замены бесконечно малых**.

Можно показать, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=1$,

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=1$,

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=1$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt[m]{1+x}-1\right)\ m}{x}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=1$.

Поэтом~~у при t~~ $\Rightarrow 0$

$$\boxed{\begin{array}{llll}\sin t\sim t\,, & \operatorname{tg} t\sim t\,, & \arcsin t\sim t\,, & \operatorname{arctg} t\sim t\\ e^t-1\sim t\,, & \ln(1+t)\sim t\,, & \sqrt[m]{1+t}-1\sim\dfrac{t}{m}. & \end{array}}$$

Замечание. Равенство $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ называется **первым замечательным пределом**.

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} 3x}{\sin 4x}$.

Заменим числитель и знаменатель дроби эквивалентными б.м.: $\operatorname{tg} 3x \sim 3x$, $\sin 4x \sim 4x$.

Тогда получим

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg}3x}{\sin 4x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{4x}=\frac{3}{4}.$$

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\ln(1-4x)}$.

Так как

$$(e^{2x}-1)\sim 2x, \quad \ln(1-4x)\sim(-4x) \quad \text{при} \quad x\to 0,$$

то

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{\ln(1-4x)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{-4x}=-\frac{1}{2}.$$

Пример 6. Найти $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\arcsin x^2}$.

Заметим, что $\cos x=1-2\sin^2\frac{x}{2}$, поэтому

$$\ln\cos x=\ln\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)\sim\left(-2\sin^2\frac{x}{2}\right)\sim\left(-2\cdot\left(\frac{x}{2}\right)^2\right), \text{ а}$$

$$\arcsin x^2\sim x^2 \quad \text{при } x\to 0.$$

Отсюда

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\arcsin x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{-x^2}{2\cdot x^2}=-\frac{1}{2}.$$

Пример 7. Найти $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{(2x-\pi)^2}{\cos 3x}$.

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\cos 3x=\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(2x-\pi)^2=0$, но, чтобы заменить бесконечно малые на эквивалентные им, введём другую переменную: $t=x-\frac{\pi}{2}$ или

$x = t + \frac{\pi}{2}$. Тогда

$$\cos 3x = \cos 3\left(t + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(3t + \frac{3\pi}{2}\right) = \sin 3t; \qquad 2x - \pi = 2t.$$

Теперь имеем $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \frac{(2x-\pi)^2}{\cos 3x} = \lim\limits_{t \to 0} \frac{4t^2}{\sin 3t} = \lim\limits_{t \to 0} \frac{4t^2}{3t} = 0$.

4. ВТОРОЙ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЙ ПРЕДЕЛ

Можно показать, что функция $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ при $x \to \infty$ имеет предел,

причём $2 < \lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < 3$.

Этот предел обозначают буквой e; то есть $e = 2{,}71828...$ - - иррациональное число, определённое равенством

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Это равенство называется **вторым замечательным пределом**.

Если в этом пределе сделать замену переменной, полагая $\alpha = \frac{1}{x}$, то получим

$$\lim_{\alpha \to 0} (1 + \alpha)^{\frac{1}{\alpha}} = e.$$

Заметим, что $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim\limits_{\alpha \to 0} (1 + \alpha) = 1$, а $\lim\limits_{x \to \infty} x = \lim\limits_{\alpha \to 0} \frac{1}{\alpha} = \infty$, поэтому второй замечательный предел представляет собой неопределённость вида $\left(1^{\infty}\right)$. С его помощью находятся многие другие пределы.

Пример 1. Найти $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^{mx}$.

Сделаем замену переменной: $t = \frac{x}{k}$. Тогда

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^{mx} = \left(1^{\infty}\right) = \lim_{t \to \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{m \cdot kt} = \lim_{t \to \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{t}\right)^t\right)^{mk} = e^{mk}.$$

Пример 2. Найти $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\frac{x+6}{x+3}\right)^{2x}$.

Так как $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x+6}{x+3}=1$, то при $x\to\infty$ функция $f(x)=\left(\frac{x+6}{x+3}\right)^{2x}$ представляет собой степень, основание которой стремится к единице, а показатель – к бесконеч-ности, то есть данный предел является неопределённостью вида $\left(1^{\infty}\right)$, а поэтому при его вычислении можно использовать второй замечательный предел.

Преобразуем функцию следующим образом:

$$\left(\frac{x+6}{x+3}\right)^{2x}=\left(\frac{(x+3)+3}{x+3}\right)^{2x}=\left(1+\frac{3}{x+3}\right)^{\frac{x+3}{3}\cdot\frac{3}{x+3}\cdot 2x}.$$

Теперь

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+6}{x+3}\right)^{2x}=\left(1^{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{3}{x+3}\right)^{\frac{x+3}{3}}\right)^{\frac{6x}{x+3}}=e^{6},$$

так как $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x+3}\right)^{\frac{x+3}{3}}=e$, то $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x}{x+3}=6$.

Пример 3. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-3x-5}{x^2+5x+4}\right)^{x+4}$.

Так как $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-3x-5}{x^2+5x+4}\right)=1$, и $\lim\limits_{x\to\infty}(x+4)=\infty$, то преобразуем функцию так, чтобы использовать второй замечательный предел:

$$\frac{x^2-3x-5}{x^2+5x+4}=1+\left(\frac{x^2-3x-5}{x^2+5x+4}-1\right)=1+\frac{-8x-9}{x^2+5x+4}.$$

Такое преобразование называется **выделением целой части** (она равна единице) **неправильной рациональной дроби**.

После этого имеем

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-3x-5}{x^2+5x+4}\right)^{x+4}=\left(1^{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-8x-9}{x^2+5x+4}\right)^{\frac{x^2+5x+4}{-8x-9}\cdot\left(\frac{(-8x-9)(x+4)}{x^2+5x+4}\right)}=e^{-8},$$

так как

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(-8x-9)(x+4)}{x^2+5x+4}=-8,\quad \text{а}\quad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-8x-9}{x^2+5x+4}\right)^{\frac{x^2+5x+4}{-8x-9}}=e.$$

Пример 4. Найти $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-3x-5}{x^2+5x+4}\right)^{\frac{x+4}{2x}}$.

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+4}{2x}=\dfrac{1}{2}$, поэтому данный предел неопределённостью не является и

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-3x-5}{x^2+5x+4}\right)^{\frac{x+4}{2x}}=1^{\frac{1}{2}}=1.$$

Пример 5. Найти $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{x^2-3x-5}{2x^2+5x+4}\right)^{x+4}$.

$\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(\dfrac{x^2-3x-5}{2x^2+5x+4}\right)=\dfrac{1}{2}$, поэтому данный предел также

неопределённостью не является и $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-3x-5}{2x^2+5x+4}\right)^{x+4}=0$, а

$$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2-3x-5}{2x^2+5x+4}\right)^{x+4}=+\infty.$$

(Функция $f(x)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$ стремится к нулю, если $x\to+\infty$, и неограниченно возрастает, если $x\to-\infty$).