5. ОДНОСТОРОННИЕ ПРЕДЕЛЫ

Введём понятие одностороннего (правого или левого) предела функции в данной точке a.

Определение 1. Число **b** называется **правым (левым) пределом функции** $y = f(x)$ при $x \to a$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ можно указать такой интервал $(a,\ a + \delta)$ $\left((a - \delta,\ a)\right)$, $\delta > 0$, что всюду внутри этого интервала будет выполняться неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Обозначаются односторонние пределы в точке x=a так:

$\lim\limits_{x \to a+} f(x) = b$ или $f(a+) = b$ - правый предел

$\lim\limits_{x \to a-} f(x) = b$ или $f(a-) = b$ - левый предел.

В качестве примера рассмотрим ещё раз функцию (рис. 7)

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < 0; \\ 0, & x = 0; \\ 1 - x^2, & x > 0. \end{cases}$$

В пункте 1 было отмечено, что $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ не существует, но вместе с тем очевидно, что если x стремится к нулю, оставаясь отрицательным (то есть слева), то $\lim\limits_{x \to 0-} f(x) = -1$. А если x стремится к нулю справа (оставаясь положительным), то $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = 1$.

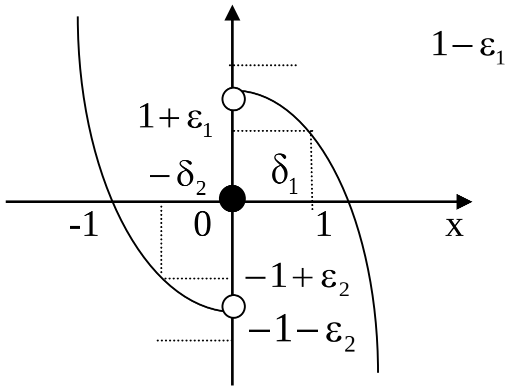


Рис. 7

Геометрическая иллюстрация этих утверждений – на рис. 7. Зададим $\varepsilon_1 > 0$, тогда для всех $x \in (0, \delta_1)$ выполняется неравенство $1 - \varepsilon_1 < f(x) < 1 + \varepsilon_1$, $|f(x) - 1| < \varepsilon_1$. Точно также для произвольного $\varepsilon_2 > 0$ при всех $x \in (-\delta_2, 0)$ имеет место неравенство $-1 - \varepsilon_2 < f(x) < -1 + \varepsilon_2$ или $|f(x) + 1| < \varepsilon_2$.

Пример. Вычислить односторонние пределы функции $y = 3^{\frac{1}{x-1}}$ в точках $x = 1$ и $x = 2$.

Пусть $x \to 1+$ (справа), тогда $x - 1 > 0$ и $\lim\limits_{x \to 1+} \dfrac{1}{x - 1} = +\infty$.

Следовательно, $\lim\limits_{x \to 1+} 3^{\frac{1}{x-1}} = \lim\limits_{z \to +\infty} 3^z = +\infty$, $z = \dfrac{1}{x - 1}$.

Если $x \to 1-$ (слева), то $x - 1 < 0$ и $\lim\limits_{x \to 1-} \dfrac{1}{x - 1} = -\infty$, поэтому

$\lim\limits_{x\to 1-} 3^{\frac{1}{x-1}} = \lim\limits_{z\to -\infty} 3^z = 0$, $z = \dfrac{1}{x-1}$. Очевидно, что $\lim\limits_{x\to 1} 3^{\frac{1}{x-1}}$ не существует. Если

$x \to 2+$, то $\lim\limits_{x\to 2+} 3^{\frac{1}{x-1}} = 3$, но и при $x \to 2-$ $\lim\limits_{x\to 2-} 3^{\frac{1}{x-1}} = 3$.

Поэтому $\lim\limits_{x\to 2+} 3^{\frac{1}{x-1}} = \lim\limits_{x\to 2-} 3^{\frac{1}{x-1}} = 3^1 = 3$. Связь между односторонними пределами и пределом функции в точке устанавливает следующая теорема.

Теорема. Если функция $f(x)$ имеет в точке $x = a$ как правый, так и левый пределы и если эти односторонние пределы равны одному и тому же числу b, то эта функция имеет в точке $x = a$ предел, равный b.

Наоборот, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, то $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \lim\limits_{x\to a-} f(x) = b$

Для односторонних пределов верны все теоремы п. 2.

6. НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ. ТОЧКИ РАЗРЫВА И ИХ КЛАССИФИКАЦИЯ

Предположение о существовании $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ ещё не означает, что этот предел совпадает со значением функции в точке $x = a$. Для примера рассмотрим функцию, график которой представлен на рис. 8. Очевидно, что $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \lim\limits_{x\to o-} f(x) = 1$,

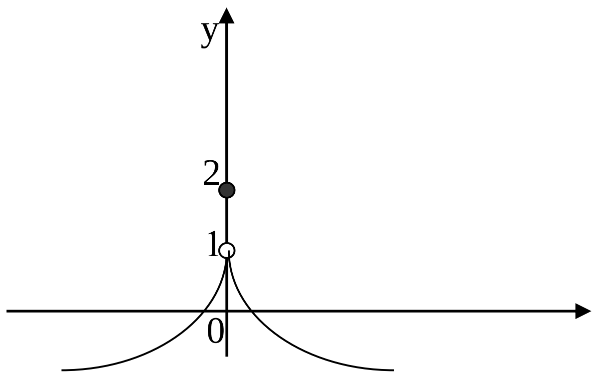
поэтому существует $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 1$, но $f(0) = 2$, то есть в данном примере $\lim\limits_{x\to 0} f(x) \ne f(0)$.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, определённую в некотором интервале, содер-жащем точку $x = a$.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется **непрерывной в точке** $x = a$, если 1) $f(x)$ определена при $x = a$;

2) существует конечный $\lim\limits_{x\to a} f(x)$

(это равносильно существованию равных односторонних пределов: $\lim\limits_{x\to a+} f(x) = \lim\limits_{x\to a-} f(x)$);



x

3) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Если какое– либо из трёх перечислен - Рис. 8
ных условий не выполнено, то функция
$y = f(x)$ называется **разрывной в точке** $x = a$.

Будем говорить, что функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, если она непрерывна в каждой точке интервала (a, b) и непрерывна слева в точке $x = b$ и справа - в точке $x = a$. Очевидно, график функции непрерывной на некотором промежутке представляет собой непрерывную линию, то есть линию, которую можно провести, не отрывая карандаш от бумаги.

Используя теоремы 1 – 5 о пределах функций и определение непрерывности
функции в точке, нетрудно доказать теорему об арифметических действиях над непрерывными функциями.

Теорема. Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ непрерывны в точке $x = a$. Тогда функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$ и $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ непрерывны в этой точке (последняя при $g(a) \neq 0$).

Все элементарные функции, то есть такие, которые можно задать одним анали-
тическим выражением, полученным из простейших элементарных функций с помощью четырёх арифметических действий и операции составления сложной функции, последовательно применённых конечное число раз, непрерывны на области определения, то есть в каждой точке, в которой определены. К простей-шим элементарным функциям относятся степенная, показательная, логарифми-ческая, тригонометрические и обратные тригонометрические функции.

Функции $y = \cos^2 4x$, $y = \log_2 \dfrac{x+1}{x-1}$, $y = \sqrt{x} \cdot \arcsin x$, $y = \dfrac{\operatorname{tg} 2x}{1 + \operatorname{tg}^2 2x}$ и т.д. - элементарные. Каждая из них непрерывна всюду, где определена.

Как было сказано выше, точка $x = a$ называется **точкой разрыва**
функции $y = f(x)$, если $f(x)$ в этой точке не является непрерывной.

Разрывы классифицируются следующим образом:

1) точка $x = a$ называется **точкой устранимого разрыва**, если существует $\lim_{x \to a} f(x) = b$, но либо $f(x)$ не определена в этой точке, либо $f(a)$ $\neq b$. Если положить $f(a) = b$, то функция $y = f(x)$ станет непрерывной в точке $x = a$, т. е. разрыв будет устранён.

Пример 1. Исследовать на непрерывность функцию $y = \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}$.

Функция $y=\dfrac{x^2-9}{x-3}$ - элементарная, значит, непрерывна всюду, где определена, именно во всех точках действительной оси, кроме $x = 3$. Заметим, что при $x \neq 3$ $y = x+3$, поэтому $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}(x+3)=6$ (см.п.1), т. е. существует $\lim\limits_{x\to 3} f(x)=6$, но $f(x)$ не определена при $x=3$. Это означает, что функция $y=\dfrac{x^2-9}{x-3}$ имеет в точке $x=3$ устранимый разрыв.

Функция, определённая таким образом: $y=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x-3}, & x\neq 3\\ 6\quad , & x=3\end{cases}$ - является непрерывной для всех $x \in R$.

Пример 2. Исследовать на непрерывность функцию $y=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & ,x\neq 0,\\ 0 & ,x=0.\end{cases}$

Функция $y=\dfrac{\sin x}{x}$ определена, а значит, непрерывна всюду, за исключением точки $x=0$. В п. 3 было отмечено, что $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$, но $f(0)=0$, поэтому точка $x=0$- точка устранимого разрыва. Доопределив функцию $y=\dfrac{\sin x}{x}$ при $x=0$ другим образом, полагая $f(x)=1$, устраним разрыв и получим функцию, непрерывную при всех $x \in R$.

2) точка $x=a$ называется **точкой разрыва I рода** функции $f(x)$, если в этой точке функция имеет конечные, но не равные друг другу односторонние пределы: $\lim\limits_{x\to a+} f(x)\neq \lim\limits_{x\to a-} f(x)$. Величина $\left|\lim\limits_{x\to a+} f(x)-\lim\limits_{x\to a-} f(x)\right|$ называется **скачком функции в точке** $x=a$.

Пример 3. Исследовать на непрерывность функцию (рис. 5)

$$y=\begin{cases}x^2-1, & x<0;\\ 0, & x=0;\\ 1-x^2, & x>0.\end{cases}$$

Так как $\lim\limits_{x\to a-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0-}\left(x^2-1\right)=-1$, а $\lim\limits_{x\to a+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0+}\left(1-x^2\right)=1$, то точка $x=0$ является для данной функции точкой разрыва I рода.

Пример 4. Исследовать на непрерывность функцию $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-1}$.

Данная функция определена, а значит, непрерывна при всех $x \neq 1$. Вычислим односторонние пределы $f(x)$ в этой точке. Вначале отметим, что $\lim\limits_{x\to 1+}\frac{1}{x-1}=+\infty$, а $\lim\limits_{x\to 1-}\frac{1}{x-1}=-\infty$. Следовательно,

$$\lim_{x\to 1+}\operatorname{arctg}\frac{1}{x-1}=\lim_{z\to+\infty}\operatorname{arctg}z=\frac{\pi}{2}\quad\left(z=\frac{1}{x-1}\right).$$

$$\lim_{x\to 1-}\operatorname{arctg}\frac{1}{x-1}=\lim_{z\to-\infty}\operatorname{arctg}z=-\frac{\pi}{2}.$$

Это означает, что точка $x=1$ является точкой разрыва I рода для функции $y=\operatorname{arctg}\frac{1}{x-1}$ (рис. 9).

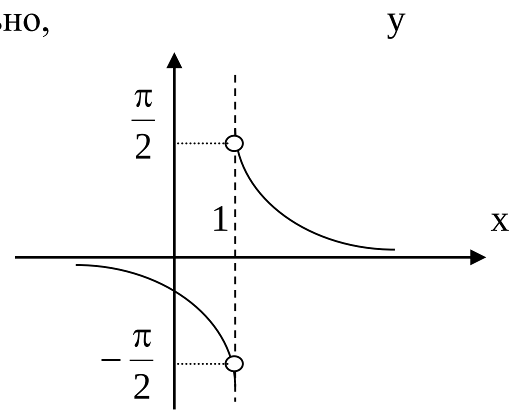


Рис. 9

3) точка $x=a$ называется **точкой разрыва II рода** функции $f(x)$, если в этой точке функция $f(x)$ не имеет, по крайней мере, одного из односторонних пределов или хотя бы один из односторонних пределов бесконечен.

Пример 5. Исследовать на непрерывность функцию $y=\frac{x}{x^2-4}$.

В точках $x=\pm 2$ данная функция не определена. Чтобы исследовать характер разрыва функции в этих точках, вычислим односторонние пределы. Пусть $x\to 2+$, тогда разность x^2-4 стремится к 0, оставаясь положительной, поэтому $\lim\limits_{x\to 2+}\frac{x}{x^2-4}=+\infty$. Аналогично $\lim\limits_{x\to 2-}\frac{x}{x^2-4}=-\infty$. Следовательно, точка $x=2$ - точка разрыва II рода. Пусть $x\to -2+$. Тогда $\lim\limits_{x\to -2+}\left(x^2-4\right)=0$, и $x^2-4<0$, следовательно, $\lim\limits_{x\to -2+}\frac{x}{x^2-4}=+\infty$, а $\lim\limits_{x\to -2-}\frac{x}{x^2-4}=-\infty$, то есть точка $x=-2$ - также точка разрыва II рода функции $y=\frac{x}{x^2-4}$.

Пример 6. Исследовать на непрерывность функцию $y=2^{-\frac{1}{x-9}}$.

Эта функция непрерывна в любой точке $x\neq 9$. Прежде чем вычислить $\lim\limits_{x\to 9+}f(x)$ и $\lim\limits_{x\to 9-}f(x)$, заметим, что $\lim\limits_{x\to 9+}\left(\frac{-1}{x-9}\right)=-\infty$, а $\lim\limits_{x\to 9-}\left(\frac{-1}{x-9}\right)=+\infty$.

Тогда получим $\lim\limits_{x\to 9+}2^{-\frac{1}{x-9}}=\lim\limits_{z\to-\infty}2^z=0$; $\lim\limits_{x\to 9-}2^{-\frac{1}{x-9}}=\lim\limits_{z\to+\infty}2^z=+\infty$. Таким образом, левый предел $f(x)$ в точке $x=9$ бесконечен и, значит, $x=9$ является точкой разрыва II рода слева.

Пример 7. Исследовать на непрерывность функцию $y = \sin\frac{1}{x}$.

Функция не определена при $x = 0$. Обозначим $z = \frac{1}{x}$, тогда $\lim\limits_{x\to 0\pm}\sin\frac{1}{x} = \lim\limits_{z\to\pm\infty}\sin z$. Этот предел, как было отмечено в п.1, не существует, поэтому точка $x = 0$ является для функции $y = \sin\frac{1}{x}$ точкой разрыва II рода.