З а д а ч а 1

Функция $y=f(x)$ непрерывна в точке x_0, если выполнены условия:

1) функция определена в этой точке и ее окрестности;
2) существует предел функции в точке x_0, т. е. $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$;
3) предел функции в точке x_0 равен значению функции в этой точке.

Если в точке x_1 нарушено хотя бы одно из этих условий, то x_1 - точка разрыва.

Точка разрыва x_1 называется точкой разрыва первого рода, если существуют конечные односторонние пределы функции в этой точке. Если при этом они равны между собой, то x_1 называют точкой устранимого разрыва, а если они не равны, то x_1 называют точкой неустранимого разрыва или скачком.

Точка разрыва x_2 называется точкой разрыва второго рода, если хотя бы один (или оба) из односторонних пределов функции в точке x_2 бесконечен или не существует.

Пример 1

Исследовать функцию $y=f(x)$ на непрерывность. В точках разрыва установить характер разрыва. Схематично построить график функции

$$y=\begin{cases} -1, \quad \text{если} \quad x<-\dfrac{\pi}{4}; \\ \operatorname{tg}x, \text{ если } -\dfrac{\pi}{4}\le x<0; \\ \dfrac{1}{x-1}, \text{ если } x\ge 0. \end{cases}$$

Функция задана тремя аналитическими выражениями, представляющими собой элементарные функции, которые непрерывны во всех точках, где они определены.

Функция $y=-1$ всюду определена, функция $y=\operatorname{tg}x$ определена на промежутке $\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\le x<0$, функция $y=\dfrac{1}{x-1}$ не определена в точке $x_0=1$, которая является точкой разрыва. Точками разрыва могут быть также точки $x=-\dfrac{\pi}{4}$ и $x_2=0$, где происходит смена аналитического выражения функции.

Исследуем на непрерывность функцию в точке $x_1=-\dfrac{\pi}{4}$.

1. $f\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = -1.$

2. $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{4}-0} f(x)=\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{4}} (-1) =-1.$

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{4}+0} f(x) = \lim_{x\to-\frac{\pi}{4}+0} \operatorname{tg} x = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -1, \quad \lim_{x\to-\frac{\pi}{4}} f(x) = -1.$$

3. $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{4}} f(x) = f\left(-\frac{\pi}{4}\right)$.

В точке $x_1 = -\frac{\pi}{4}$ функция непрерывна.

Исследуем на непрерывность функцию в точке $x_2 = 0$.

1. $f(0) = \frac{1}{0-1} = -1.$

2. $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \operatorname{tg} x = 0, \quad \lim\limits_{x\to 0+0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x-1} = -1.$

Так как односторонние пределы в точке $x_2 = 0$ не равны между собой, предел функции в точке $x_2 = 0$ не существует. Однако односторонние пределы в этой точке существуют и конечны, поэтому x_2 - точка неустранимого разрыва I рода.

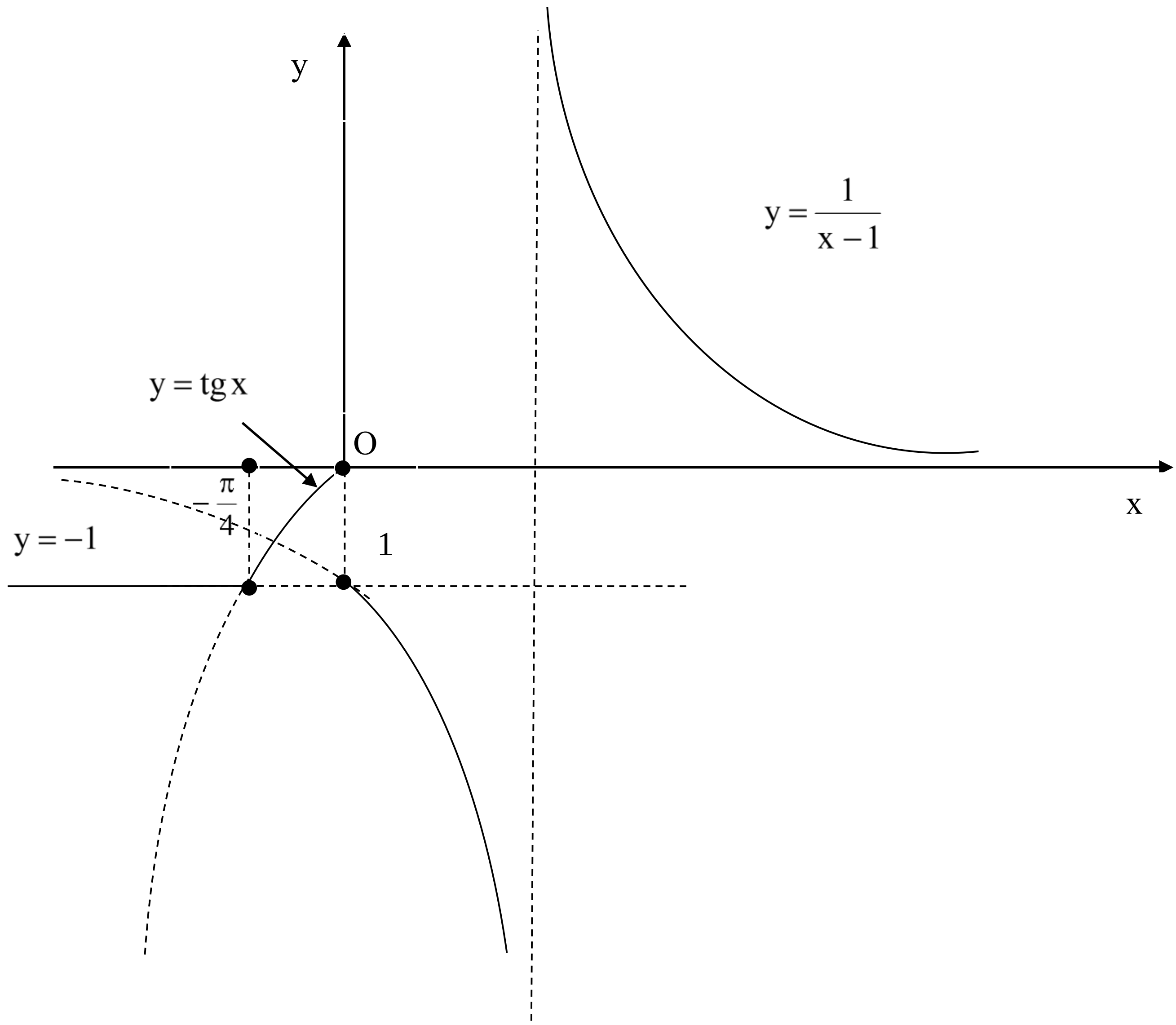
Определим характер разрыва функции в точке $x_3 = 1$.

$$\lim_{x\to 1-0} f(x) = \lim_{x\to 1-0} \frac{1}{x-1} = \left(\frac{1}{-0}\right) = -\infty.$$

$$\lim_{x\to 1+0} f(x) = \lim_{x\to 1+0} \frac{1}{x-1} = \left(\frac{1}{+0}\right) = +\infty.$$

Так как односторонние пределы функции в точке $x_0 = 1$ бесконечны, точка x_0- точка разрыва второго рода.

График функции, имеет следующий вид.



Контрольные варианты задачи 1

Исследовать функцию $y=f(x)$ на непрерывность. В точках разрыва установить характер разрыва. Схематично построить график функции:

1. $y=\begin{cases}2x+1, & \text{если } x<-1\\ x^2, & \text{если } -1\le x\le 2\\ 6-x, & \text{если } x>2\end{cases}$

2. $y=\begin{cases}4+x, & \text{если } x<-1\\ x^2+2, & \text{если } -1\le x<1\\ 2x, & \text{если } x\ge 1\end{cases}$

3. $y=\begin{cases}x+1, & \text{если } x\le 0\\ (x+1)^2, & \text{если } 0<x\le 2\\ -x+4, & \text{если } x>2\end{cases}$

4. $y=\begin{cases}x+2, & \text{если } x\le -1\\ x^2+1, & \text{если } -1<x\le 1\\ -x+3, & \text{если } x>1\end{cases}$

$$5.\ y=\begin{cases}-x, & \text{если } x\le 0\\ -(x-1)^2, & \text{если } 0<x<2\\ x-3, & \text{если } x\ge 2\end{cases}\qquad 6.\ y=\begin{cases}-(x+1), & \text{если } x\le -1\\ (x+3)^3, & \text{если } -1<x<0\\ x, & \text{если } x\ge 0\end{cases}$$

$$7.\ y=\begin{cases}x+1, & \text{если } x\le 0\\ x^2, & \text{если } 0<x\le 2\\ 0{,}5\,x+3, & \text{если } x>2\end{cases}\qquad 8.\ y=\begin{cases}-x, & \text{если } x\le 0\\ \operatorname{tg}x, & \text{если } 0<x<\dfrac{\pi}{4}\\ 2, & \text{если } x\ge\dfrac{\pi}{4}\end{cases}$$

$$9.\ y=\begin{cases}x+1, & \text{если } x<0\\ x^2+1, & \text{если } 0\le x<1\\ 1, & \text{если } x\ge 1\end{cases}\qquad 10.\ y=\begin{cases}x^2+1, & \text{если } x<0\\ 1-x, & \text{если } 0\le x\le 2\\ 2, & \text{если } x>2\end{cases}$$

$$11.\ y=\begin{cases}-2x, & \text{если } x\le 0\\ \sqrt{x}, & \text{если } 0<x<4\\ 3, & \text{если } x\ge 4\end{cases}\qquad 12.\ y=\begin{cases}x^2, & \text{если } x\le 0\\ x, & \text{если } 0<x\le 2\\ 1, & \text{если } x>2\end{cases}$$

$$13.\ y=\begin{cases}3x, & \text{если } x\le 0\\ 2, & \text{если } 0<x\le 2\\ x, & \text{если } x>2\end{cases}\qquad 14.\ y=\begin{cases}-x, & \text{если } x\le 0\\ \sin x, & \text{если } 0<x\le\pi\\ x-2, & \text{если } x>\pi\end{cases}$$

$$15.\ y=\begin{cases}2x, & \text{если } x\le 0\\ x^2+1, & \text{если } 0<x\le 1\\ 2, & \text{если } x>1\end{cases}\qquad 16.\ y=\begin{cases}-x, & \text{если } x\le 0\\ x^2+1, & \text{если } 0<x\le\\ x+1, & \text{если } x>2\end{cases}$$

$$17.\ y=\begin{cases}x^2+1, & \text{если } x\le 1\\ 2x, & \text{если } 1<x\le 3\\ x+2, & \text{если } x>3\end{cases}\qquad 18.\ y=\begin{cases}x^2+1, & \text{если } x\le 2\\ 1+2x, & \text{если } 2<x\le 3\\ 4x+2, & \text{если } x>3\end{cases}$$

$$19.\ y=\begin{cases}x-3, & \text{если } x<0\\ x+1, & \text{если } 0\le x\le 4\\ 3+\sqrt{x}, & \text{если } x>4\end{cases}\qquad 20.\ y=\begin{cases}\sqrt{1-x}, & \text{если } x\le 0\\ 0, & \text{если } 0<x\le 2\\ x-2, & \text{если } x>2\end{cases}$$

21. $y = \begin{cases} 2x^2, & \text{если } x \le 0 \\ x, & \text{если } 0 < x \le 1 \\ 2, & \text{если } x > 1 \end{cases}$ 22. $y = \begin{cases} -x-1, & \text{если } x < 0 \\ 2x, & \text{если } 0 \le x < 2 \\ x^2, & \text{если } x \ge 2 \end{cases}$

23. $y = \begin{cases} x^3+1, & \text{если } x \le 0 \\ x, & \text{если } 0 < x \le 2 \\ 3, & \text{если } x > 2 \end{cases}$ 24. $y = \begin{cases} x-1, & \text{если } x \le 0 \\ x^2, & \text{если } 0 < x < 2 \\ 2x, & \text{если } x \ge 2 \end{cases}$

25. $y = \begin{cases} 3x+1, & \text{если } x < 0 \\ x^2+1, & \text{если } 0 \le x < 1 \\ 0, & \text{если } x \ge 2 \end{cases}$ 26. $y = \begin{cases} \sqrt{-x}, & \text{если } x \le 0 \\ 2, & \text{если } 0 < x \le 2 \\ x, & \text{если } x > 2 \end{cases}$

27. $y = \begin{cases} 5x+1, & \text{если } x < -1 \\ x^2, & \text{если } -1 \le x \le 2 \\ 6-x, & \text{если } x > 2 \end{cases}$ 28. $y = \begin{cases} 3+x, & \text{если } x < -1 \\ x^2+1, & \text{если } -1 \le x < 1 \\ 3x, & \text{если } x \ge 1 \end{cases}$

29. $y = \begin{cases} x+1, & \text{если } x \le 0 \\ (x+1)^2, & \text{если } 0 < x \le 2 \\ -x+2, & \text{если } x > 2 \end{cases}$ 30. $y = \begin{cases} x+3, & \text{если } x \le -1 \\ x^2+2, & \text{если } -1 < x \le 1 \\ -x+4, & \text{если } x > 1 \end{cases}$

З а д а ч а 2

Известно, если $a > 1$, то $\lim\limits_{x\to\infty} a^x = +\infty$ или $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$.

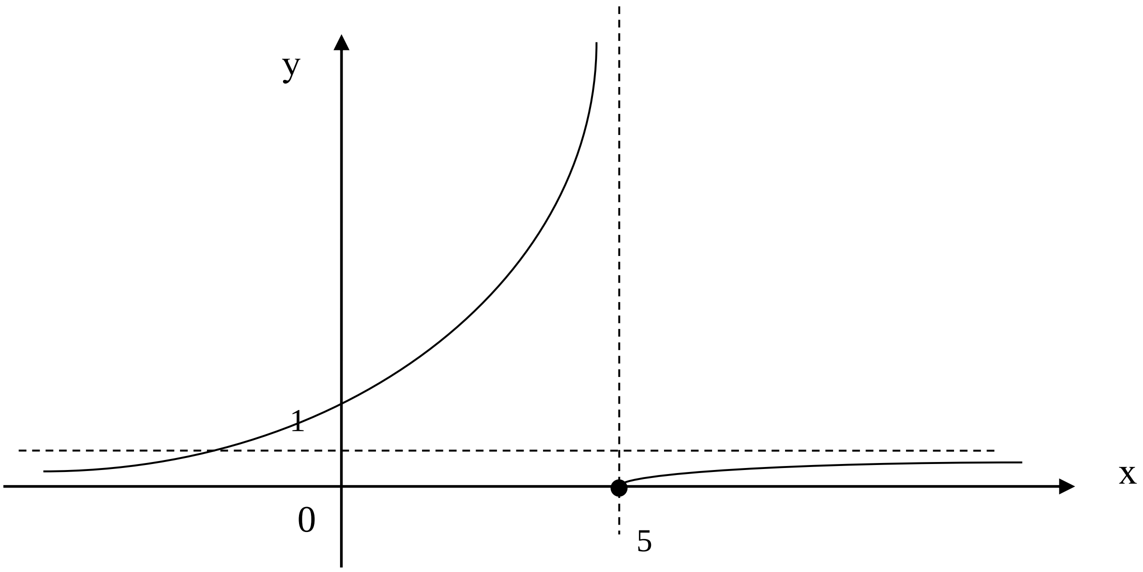
Пример 2

Исследовать функцию $y = 9^{\frac{4}{5-x}}$ на непрерывность. Установить характер точек разрыва. Схематично построить график функции .

Функция $y = 9^{\frac{4}{5-x}}$ элементарная, поэтому она непрерывна во всех точках, кроме точки $x_0 = 5$, где она не определена.

$$\lim_{x\to5-0} \frac{4}{5-x} = \left(\frac{4}{+0}\right) = +\infty, \quad \lim_{x\to5+0} \frac{4}{5-x} = \left(\frac{4}{-0}\right) = -\infty.$$

Поэтому $\lim\limits_{x\to5-0} 9^{\frac{4}{5-x}} = 9^{\lim\limits_{x\to5-0}\frac{4}{5-x}} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to5+0} 9^{\frac{4}{5-x}} = 9^{\lim\limits_{x\to5+0}\frac{4}{5-x}} = 0$. В точке $x_0 = 5$- разрыв II рода, т. к. левосторонний предел бесконечен.



Контрольные варианты задачи 2

Исследовать функцию $y = f(x)$ на непрерывность. В точках разрыва установить характер разрыва. Схематично построить график функции:

1. $y = 5^{\frac{1}{x-3}}$	2. $y = 3^{\frac{1}{x-4}}$	3. $y = 2^{\frac{1}{1-x}}$	4. $y = 4^{\frac{6}{3-x}}$	5. $y = 9^{\frac{1}{x-2}}$
6. $y = 7^{\frac{1}{x+1}}$	7. $y = 6^{\frac{2}{x-3}}$	8. $y = 5^{\frac{4}{2-x}}$	9. $y = 7^{\frac{6}{2+x}}$	10. $y = 3^{\frac{2}{x+4}}$
11. $y = 4^{\frac{2}{x-3}}$	12. $y = 7^{\frac{3}{x-1}}$	13. $y = 6^{\frac{5}{x+4}}$	14. $y = 8^{\frac{7}{x-4}}$	15. $y = 2^{\frac{3}{x+5}}$
16. $y = 9^{\frac{1}{x+2}}$	17. $y = 7^{\frac{1}{x+3}}$	18. $y = 3^{\frac{1}{x+5}}$	19. $y = 3^{\frac{5}{x-6}}$	20. $y = 8^{\frac{1}{x-7}}$
21. $y = 6^{\frac{1}{x-5}}$	22. $y = 5^{\frac{3}{2x-4}}$	23. $y = 2^{\frac{3}{x-5}}$	24. $y = 3^{\frac{4}{x-2}}$	25. $y = 5^{\frac{3}{1-x}}$
26. $y = 5^{\frac{7}{2-x}}$	27. $y = 2^{\frac{3}{7-x}}$	28. $y = 5^{\frac{7}{3-x}}$	29. $y = 5^{\frac{4}{7-x}}$	30. $y = 7^{\frac{4}{5-2x}}$