# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ. ПОНЯТИЕ ПРОИЗВОДНОЙ ФУНКЦИИ, ЕЕ ФИЗИЧЕСКИЙ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ

К понятию производной приводят различные задачи из физики, механики, геометрии и других областей знания. Рассмотрим две такие задачи.

**ЗАДАЧА О ВЫЧИСЛЕНИИ МГНОВЕННОЙ СКОРОСТИ**. Пусть тело движется с переменной скоростью и $s(t)$ – путь, пройденный за время $t$. Определить мгновенную скорость в любой момент времени $t$.

Если к моменту времени $t=t_0$ пройдено расстояние $s(t_0)$, а к моменту $t=t_1, t_1>t_0$ – расстояние $s(t_1)$, то $\dfrac{s(t_1)-s(t_0)}{t_1-t_0}=v_{ср.}$ – средняя скорость движения. Если $t_1-t_0=\Delta t$ – достаточно мало, то $\dfrac{s(t_1)-s(t_0)}{t_1-t_0}\approx v(t_0)$, причем это приближенное равенство тем точнее, чем меньше промежуток времени $\Delta t$, и если $t_1\to t_0$, то есть $\Delta t\to 0$, то можно утверждать, что

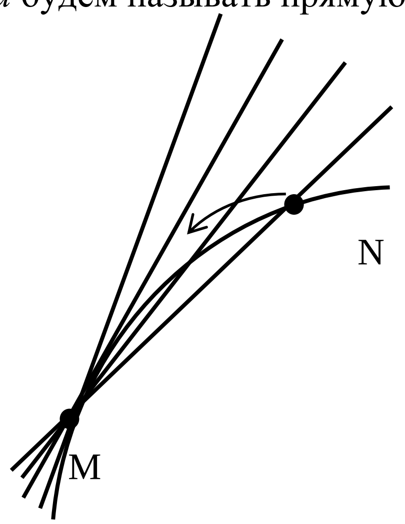
$$v(t_0)=\lim_{t_1\to t_0}\frac{s(t_1)-s(t_0)}{t_1-t_0}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t_0+\Delta t)-s(t_0)}{\Delta t}$$

– мгновенная скорость в момент $t=t_0$.

## ЗАДАЧА О ПРОВЕДЕНИИ КАСАТЕЛЬНОЙ К ГРАФИКУ ФУНКЦИИ

Вначале дадим определение касательной к произвольной кривой в некоторой ее точке (известное определение касательной к окружности для произвольной кривой не подходит, например: ось $OY$ имеет с параболой $y=x^2$ одну общую точку, однако касательной к ней не является).

*Секущей* будем называть прямую, проходящую через две точки, лежащие на кривой.




$MN$ – секущая.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ**. Касательной к кривой в точке $M$ называется предельное положение ее секущей $MN$, когда точка $N$, оставаясь на кривой, стремится к $M$ (если такое положение существует) (рис. 1).

Рассмотрим функцию $y=y(x)$.

Напишем уравнение касательной к ее графику в точке $M(x_0, y(x_0))$.

Рис. 1

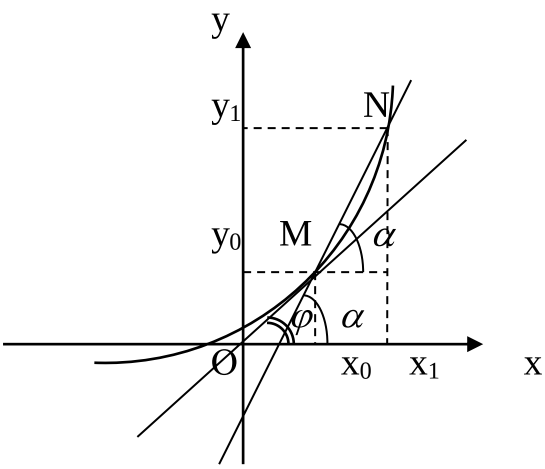



Рис. 2

$y_0 = y(x_0)$, $y_1 = y(x_1)$.

$\alpha$ – угол между MN и OX, $\varphi$ – угол между касательной и OX (рис. 2). Будем искать уравнение касательной в виде $y - y_0 = k\left(x - x_0\right)$, где $k = tg\,\varphi$ – угловой коэффициент прямой.

$$k_c = tg\,\alpha = \frac{y(x_1) - y\left(x_0\right)}{x_1 - x_0}$$

– угловой коэффициент секущей.

Если $N \to M$, то $x_1 \to x_0$, то есть $x_1 - x_0 = \Delta x \to 0$. Если $\Delta x$ достаточно мало, то угловой коэффициент секущей $tg\,\alpha \approx tg\,\varphi$, и равенство тем точнее, чем меньше $\Delta x$. Можно утверждать, что

$$k = tg\,\varphi = \lim_{x \to x_0} \frac{y\left(x_1\right) - y\left(x_0\right)}{x_1 - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y\left(x_0 + \Delta x\right) - y\left(x_0\right)}{\Delta x}$$

– угловой коэффициент касательной.

Так как при решении обеих задач (и не только их) пришлось выполнять одни и те же действия, то для обозначения этих действий введем новое понятие.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ**. Производной функции $y = y\left(x\right)$ в точке $x = x_0$ называется предел отношения ее приращения в этой точке к вызвавшему его приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю:

$$y'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{y\left(x\right) - y\left(x_0\right)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y\left(x_0 + \Delta x\right) - y\left(x_0\right)}{\Delta x}$$

или

$$y'\left(x_0\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Отсюда $k = y'\left(x_0\right)$ – угловой коэффициент касательной к графику функции $y = y\left(x\right)$ в точке $M\left(x_0, y\left(x_0\right)\right)$. Уравнение касательной

$$y - y\left(x_0\right) = y'\left(x_0\right)\left(x - x_0\right).$$

*Геометрический смысл производной*: производная функции в точке равна угловому коэффициенту касательной к графику функции в этой точке.

*Физический смысл производной*: производная функции в точке характеризует скорость ее изменения в окрестности этой точки. Отсюда следует, что если $y(x)=C=const,$ то $y'(x)=0.$

Так как из определения следует, что производная в разных точках, вообще говоря, различна, то она сама является функцией.

**ЗАМЕЧАНИЕ**. Очевидно, для того чтобы функция имела производную, необходимо, чтобы она была непрерывной. Тогда $\Delta y \xrightarrow[\Delta x\to 0]{} 0$ (определение 2 непрерывности), поэтому при вычислении производной по определению необходимо раскрыть неопределенность $\left(\frac{0}{0}\right)$.

**ПРИМЕР**. Вывести формулу вычисления производной функции $y=\sqrt{x}.$

$y(x)=\sqrt{x} \Rightarrow y(x+\Delta x)=\sqrt{x+\Delta x}.$

По определению

$$\left(\sqrt{x}\right)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{x+\Delta x}-\sqrt{x}}{\Delta x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x+\Delta x-x}{\Delta x\left(\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}\right)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+\Delta x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

**ТЕОРЕМА** (о связи непрерывности и дифференцируемости). Пусть функция $y=y(x)$ дифференцируема в точке $x$, тогда она непрерывна в этой точке.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО**. По определению дифференцируемости приращение функции $y=y(x)$ представимо в виде $\Delta y=A\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x,\ A=const$. Тогда $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=\lim\limits_{\Delta x\to 0}(A\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x)=0$, что по определению означает непрерывность $y=y(x)$ в точке $x$.

**ЗАМЕЧАНИЕ**. Обратное утверждение неверно, то есть *не всякая непрерывная функция дифференцируема* (график непрерывной функции может иметь касательную не во всех точках).

## ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СЛОЖНОЙ ФУНКЦИИ

**ТЕОРЕМА** (о производной сложной функции). Пусть функция $u=u(x)$ дифференцируема в некоторой точке $x$, а функция $y=y(u)$ дифференцируема в соответствующей точке $u=u(x)$, тогда сложная функция $y=y(u(x))$ дифференцируема в точке $x$ и $y'=y'(u)u'(x)$.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО**. Зададим $\Delta x\neq 0.$ Тогда функция $u=u(x)$ получит приращение $\Delta u$ (быть может $\Delta u=0$), а функция $y=y(u)$ – приращение $\Delta y.$ Так как функция $y=y(u)$ дифференцируема в точке $u=u(x)$, то по определению

$\Delta y = y'(u)\Delta u + \alpha(\Delta u)\Delta u,$ где $\lim\limits_{\Delta u \to 0} \alpha(\Delta u) = 0$. Разделим $\Delta y$ на $\Delta x \neq 0$:

$\frac{\Delta y}{\Delta x} = y'(u)\frac{\Delta u}{\Delta x} + \alpha(\Delta u)\frac{\Delta u}{\Delta x}$. По условию $u = u(x)$ дифференцируема, значит, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = u'(x)$ и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta u = 0$ по теореме о связи непрерывности и дифференцируемости. Таким образом, если $\Delta x \to 0$, то $\Delta u \to 0$. Отсюда имеем:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} y'(u)\frac{\Delta u}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \to 0} \alpha(\Delta u)\frac{\Delta u}{\Delta x} = y'(u)u'(x) + \lim_{\Delta u \to 0} \alpha(\Delta u)\frac{\Delta u}{\Delta x} = y'(u)u'(x).$$

Итак, $y' = y'(u)u'(x)$, что и требовалось доказать.

**ПРИМЕР**. Найти производную функции $y = \sqrt{7x+8}$.

Это сложная функция: $y = \sqrt{u},\ u = 7x+8.$

Поэтому $y' = y'(u)u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{u}}(7x+8)' = \frac{1}{2\sqrt{7x+8}} \cdot 7.$

## ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ОБРАТНОЙ ФУНКЦИИ

**ТЕОРЕМА** (о производной обратной функции). Пусть функция $y = y(x)$ удовлетворяет условиям теоремы о непрерывности обратной функции в некоторой окрестности точки $x$, дифференцируема в этой точке и $y'(x) \neq 0$. Тогда обратная функция $x = x(y)$ дифференцируема в соответствующей точке $y = y(x)$ и $x'(y) = \frac{1}{y'(x)}$.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО**. Зададим приращение $\Delta y \neq 0$. Так как по условию теоремы о непрерывности обратной функции $x = x(y)$ и $y = y(x)$ строго монотонны, то $\Delta x \neq 0$. Тогда $\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$. По условию функция $y = y(x)$ дифференцируема, значит, непрерывна, поэтому $x = x(y)$ также непрерывна по теореме о непрерывности обратной функции. Отсюда $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \Delta x = 0$ (определение 2).

$x'(y) = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{y'(x)}$, так как по условию $y = y(x)$ дифференцируема и $y'(x) \neq 0$. Что и требовалось доказать.

## ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ СУММЫ, РАЗНОСТИ, ПРОИЗВЕДЕНИЯ И ЧАСТНОГО

**ТЕОРЕМА**. Пусть $u=u(x), v=v(x)$ дифференцируемы в некоторой точке $x$. Тогда их сумма, разность, произведение и частное (при $v(x)\neq 0$) также дифференцируемы в этой точке и

$$(u\pm v)'=u'\pm v',\ (u\cdot v)'=u'v+v'u,\ \left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-v'u}{v^2}.$$

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО**. Формулу $(u\pm v')=u'\pm v'$ вывести самостоятельно. Рассмотрим функцию $y=u(x)v(x)$.Зададим приращение $\Delta x\neq 0$, тогда

$$\Delta u=u(x+\Delta x)-u(x),\Delta v=v(x+\Delta x)-v(x)\ \Rightarrow$$
$$u(x+\Delta x)=u(x)+\Delta u,\ v(x+\Delta x)=v(x)+\Delta v.$$

$$(uv)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)v(x+\Delta x)-u(x)v(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(u+\Delta u)(v+\Delta v)-uv}{\Delta x}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u\Delta v+v\Delta u+\Delta u\Delta v}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(u\frac{\Delta v}{\Delta x}+v\frac{\Delta u}{\Delta x}+\Delta u\frac{\Delta v}{\Delta x}\right)=uv'+vu',$$

так как $u=u(x)$ дифференцируема по условию, значит, непрерывна, а потому $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta u=0.$

Пусть $y=\dfrac{u(x)}{v(x)},\ v(x)\neq 0.$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}-\frac{u(x)}{v(x)}\right)\cdot\frac{1}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{u+\Delta u}{v+\Delta v}-\frac{u}{v}\right)\cdot\frac{1}{\Delta x}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v\Delta u-u\Delta v}{v(v+\Delta v)\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v\dfrac{\Delta u}{\Delta x}-u\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2+\Delta v}=\frac{vu'-uv'}{v^2},$$

так как $v(x)$ по условию дифференцируема, значит, непрерывна, а потому $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v=0.$Что и требовалось доказать.

## ТАБЛИЦА ПРОИЗВОДНЫХ

| | | |
|---|---|---|
| 1. $(C)'=0$ | 2.$(u^{\alpha})'=\alpha u^{\alpha-1}\cdot u'$ | 3. $(a^u)'=a^u\cdot u'$ |
| 4. $(e^u)'=e^u\cdot u'$ | 5. $(\log_a u)'=\dfrac{u'}{u\ln a}$ | 6. $(\ln u)'=\dfrac{u'}{u}$ |

| | | |
|---|---|---|
| 7. $\left(\sin u\right)' = \cos u \cdot u'$ | 8. $\left(\cos u\right)' = -\sin u \cdot u'$ | 9. $\left(tg\, u\right)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u}$ |
| 10. $\left(ctg\, u\right)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u}$ | 11. $\left(\arcsin u\right)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ | 12. $\left(\arccos u\right)' = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$ |
| 13. $\left(arctg\, u\right)' = \dfrac{u'}{1+u^2}$ | 14. $\left(arcctg\, u\right)' = -\dfrac{u'}{1+u^2}$ | |

Докажем приведенные формулы, используя определение производной и доказанные теоремы.

7. $\left(\sin x\right)' = \cos x.$

По определению производной

$$\left(\sin x\right)' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos(x+\Delta x)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \cos(x+\Delta x) = \cos x,$$

так как $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{\sin t}{t} = 0$ (первый замечательный предел) и функция $y = \cos x$ непрерывна.

8. $(\cos x)' = -\sin x.$

Используем формулы приведения и теорему о производной сложной функции:

$$\left(\cos x\right)' = \left(\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right)' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \left(\frac{\pi}{2} - x\right)' = -\sin x.$$

9. $\left(tg\, x\right)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}.$

Доказать самостоятельно, используя формулы 7, 8 и теорему о производной частного: $tg\, x = \dfrac{\sin x}{\cos x}.$

10. $\left(ctg\, x\right)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}.$

Доказать самостоятельно.

5. $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x \ln a}.$

По определению

$$\left(\log_a x\right)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a\dfrac{x+\Delta x}{x}}{\Delta x} =$$

$$=\frac{1}{x}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x}{\Delta x}\log_a(1+\frac{\Delta x}{x}) = \frac{1}{x}\lim_{\Delta x\to 0}\log_a(1+\frac{\Delta x}{x})^{\frac{x}{\Delta x}} = \frac{1}{x}\lim_{t\to 0}\log_a(1+t)^{\frac{1}{t}} = \frac{1}{x}\log_a e = \frac{1}{x\ln\ a},$$

так как $\lim\limits_{t\to 0}\left(1+t\right)^{\frac{1}{t}} = e$ (второй замечательный предел) и $y=\log_a x$ – непрерывная функция.

**ЗАМЕЧАНИЕ**. Так как $\ln e = 1$, то $\left(\ln x\right)' = \dfrac{1}{x}$.

Найдем производную функции $y=\ln|x|$. По определению модуля

$$|x| = \begin{cases} x, & \textit{если}\ \ x\ge 0 \\ -x, & \textit{если}\ \ x<0 \end{cases},\ \text{поэтому}\ \left(\ln|x|\right)' = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & \textit{если}\ x\ge 0 \\ \dfrac{1}{-x}\cdot\left(-x\right)', & \textit{если}\ x<0 \end{cases},\ \text{то есть}$$

$$\left(\ln|x|\right)' = \frac{1}{x}\quad \forall x\ne 0.$$

3. $\left(a^x\right)' = a^x\ln a.$

Функция $x=\log_a y$ – обратная для функции $y=a^x$. По теореме о производной обратной функции

$$y'\left(x\right) = \left(a^x\right)' = \frac{1}{x'\left(y\right)} = \frac{1}{\left(\log_a y\right)'} = y\ln a,$$

но $$y=a^x \Rightarrow \left(a^x\right)' = a^x\ln a.$$

11. $\left(\arcsin x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

Рассмотрим функцию $y=\arcsin x$: $y\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$, $x\in\left[-1;1\right]$. $x=\sin y$, $y\in\left[-\dfrac{\pi}{2};\dfrac{\pi}{2}\right]$ – обратная функция, поэтому по теореме о производной обратной функции имеем:

$$y'\left(x\right) = \left(\arcsin x\right)' = \frac{1}{x'\left(y\right)} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},$$

так как $$\cos y>0\ \ \forall y\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right).$$

Заметим, что функция $y=\arcsin x$ дифференцируема во всех точках $(-1;1)$, а $y'(1), y'(-1)$ не существуют.

12. $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$

Воспользуемся известным тождеством:

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow(\arcsin x)'+(\arccos x)'=0\Rightarrow(\arccos x)'=-(\arcsin x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

13. $\left(arctg\,x\right)'=\dfrac{1}{1+x^2}.$

Для функции $y=arctg\,x,\ x\in R,\ y\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ $x=tg\,y$ – обратная, поэтому

$$y'(x)=\left(arctg\,x\right)'=\frac{1}{\left(tg\,y\right)'}=\frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}}=\frac{1}{1+tg^2y}=\frac{1}{1+x^2}.$$

14. $\left(arcctg\,x\right)'=-\dfrac{1}{1+x^2}.$

Воспользуемся тождеством:

$$arctg\,x+arcctg\,x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\left(arctg\,x+arcctg\,x\right)'=0\Rightarrow\ (arcctg\,x)'=-\left(arctg\,x\right)'=-\frac{1}{1+x^2}.$$

2. $\left(x^{\alpha}\right)'=\alpha x^{\alpha-1}.$

$\left(x^{\alpha}\right)'=\left(e^{\ln x^{\alpha}}\right)'=\left(e^{\alpha\ln x}\right)'=e^{\alpha\ln x}\cdot\left(\alpha\ln x\right)'=x^{\alpha}\cdot\alpha\cdot\dfrac{1}{x}=\alpha x^{\alpha-1}$ по теореме о производной сложной функции и формулам 4 и 6.

**ПРИМЕРЫ**. Найти производные функций

$$y=\sin^2 2x\qquad\text{и}\qquad y=\log_2\frac{\left(x^2+1\right)\left(2x+3\right)}{\sqrt[3]{4-5x}}.$$

1. $y=\sin^2 2x$ – сложная функция:

$$y=u^2,\ u=\sin v,\ v=2x\ \Rightarrow y'=2\sin 2x\left(\sin 2x\right)'=2\sin 2x\cos 2x\left(2x\right)'=2\sin 4x.$$

2. $\left(\log_2 \dfrac{(x^2+1)(2x+3)}{\sqrt[3]{4-5x}}\right)' = \left(\log_2\left(x^2+1\right)+\log_2|2x+3|-\dfrac{1}{3}\log_2|4-5x|\right)' =$

$$= \frac{2x}{\left(x^2+1\right)\ln 2}+\frac{2}{(2x+3)\ln 2}+\frac{5}{3\left(4-5x\right)\ln 2}.$$

## ДИФФЕРЕНЦИАЛ ФУНКЦИИ

Пусть существует $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=y'(x)$, тогда по теореме о представлении функции, имеющей предел получим $\Rightarrow \Delta y = A\Delta x+\alpha\left(\Delta x\right)\Delta x,\ \lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha\left(\Delta x\right)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x}-y'\left(x\right)\right)=0$.

Т. е. если $y=y\left(x\right)$ дифференцируема в точке $x$, то ее приращение в этой точке $\Delta y = A\Delta x+\alpha\left(\Delta x\right)\Delta x,\ A=const$ состоит из двух частей: $A\Delta x$ – линейная относительно $\Delta x$ и $\alpha\left(\Delta x\right)\Delta x$ – нелинейная относительно $\Delta x$, б.м. более высокого порядка малости, чем $\Delta x$.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ**. *Дифференциалом* функции $y=y\left(x\right)$ в точке $x$ называется главная *линейная часть ее приращения* в этой точке: $dy=y'\left(x\right)\Delta x.$

Если $y\left(x\right)=x,$ то $y'\left(x\right)=1,$ поэтому $dx=1\cdot\Delta x.$ Принято считать, что если $x$ – независимая переменная, то $dx=\Delta x.$ Итак, по определению $dy=y'\left(x\right)dx$.

**ПРИМЕР**. $y=\sqrt{x}$ – найти $dy$.

$$y'=\frac{1}{2\sqrt{x}}\Rightarrow dy\left(x\right)=\frac{1}{2\sqrt{x}}dx.$$

В частности $\quad dy\left(2\right)=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}dx,\quad dy\left(1\right)=\dfrac{1}{2}dx.$

## ИНВАРИАНТНОСТЬ ФОРМЫ ПЕРВОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛА

По определению дифференциал (первый дифференциал) функции $y=y\left(x\right)$ вычисляется по формуле $dy=y'\left(x\right)dx,$ если $x$ – независимая переменная.

**ПРИМЕР**. $dx^2=2xdx,\ d\sin x=\cos xdx,\ d\ln x=\dfrac{dx}{x},\ d\,arctg\,x=\dfrac{1}{1+x^2}dx.$

Покажем, что форма первого дифференциала остается неизменной (является инвариантной) и в том случае, когда аргумент функции $y$ сам является функцией, то есть для сложной функции $y=y\left(u(x)\right)$.

Пусть $u=u\left(x\right),\ y=y\left(u\right)$ дифференцируемы, тогда по определению

$$d\,y\big(u(x)\big)=\big(y\big(u(x)\big)\big)'\,dx=y'(u)u'(x)dx.$$

Кроме того, $d\,u(x)=u'(x)dx \Rightarrow dy=y'(u)du$, что и требовалось доказать.

**ПРИМЕРЫ**.

$d\sin^2 x=2\sin x\,d\sin x=2\sin x\cos x\,dx=\sin 2x\,dx,$

$d\big(\ln\big(x^2+1\big)\big)=\dfrac{d\big(x^2+1\big)}{x^2+1}=\dfrac{2x\,dx}{x^2+1}.$

Доказанная инвариантность формы первого дифференциала позволяет считать, что $y'(x)=\dfrac{dy}{dx}$, то есть *производная равна отношению дифференциала функции к дифференциалу ее аргумента*, независимо от того, является ли аргумент независимой переменной или функцией.

## ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИИ, ЗАДАННОЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКИ

Пусть $x=x(t),\ y=y(t),\ t\in T$. Если функция $x=x(t)$ имеет на множестве $T$ обратную, то $y=y\big(t(x)\big)=y(x)$. Тогда равенства $\begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases},\ t\in T$ определяют на множестве $T$ *функцию, заданную параметрически,* $t$ – параметр (промежуточная переменная).

**ПРИМЕР**. Построить график функции $\begin{cases}x=t-\sin t\\ y=1-\cos t\end{cases},\ t\in R$.

| $t$ | $0$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\pi$ | $\frac{5\pi}{4}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{7\pi}{4}$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | $0$ | $\approx 0{,}1$ | $\approx 0{,}5$ | $\approx 1{,}6$ | $\pi$ | $\approx 4{,}5$ | $\approx 5{,}5$ | $\approx 6$ | $2\pi$ |
| $y$ | $0$ | $\approx 0{,}3$ | $1$ | $\approx 1{,}7$ | $2$ | $\approx 1{,}7$ | $1$ | $\approx 0{,}3$ | $0$ |

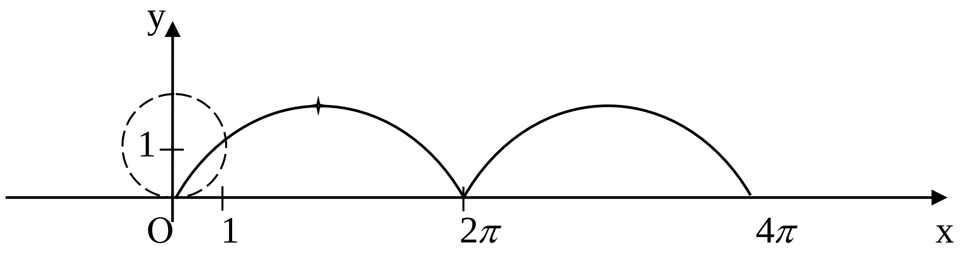



Рис. 25

Построенная кривая называется *циклоидой* (рис. 25) и является траекторией точки на окружности радиуса 1, которая катится без скольжения вдоль оси OX.

**ЗАМЕЧАНИЕ**. Иногда, но не всегда, из параметрических уравнений кривой можно исключить параметр.

**ПРИМЕРЫ**. $\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases}$ – параметрические уравнения окружности, так как, очевидно, $x^2 + y^2 = R^2$.

$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$ – параметрические уравнения эллипса, так как $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

$\begin{cases} x = t \\ y = t^2 \end{cases}$ – параметрические уравнения параболы $y = x^2$.

Найдем производную функции, заданной параметрически:

$$y'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)\,dt}{x'(t)\,dt} \Rightarrow y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

Производная функции, заданной параметрически, – также функция, заданная параметрически: $\begin{cases} x = x(t) \\ y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t} \end{cases}$.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ**. Второй производной функции называется производная от ее первой производной.

Производной $n$-го порядка называется производная от ее производной порядка $(n-1)$.

Обозначают производные второго и $n$-го порядка так:

$$y''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \left(y'(x)\right)' = \frac{d}{dx}y'(x), \quad y^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n} = \left(y^{(n-1)}(x)\right)'.$$

Из определения второй производной и правила дифференцирования параметрически заданной функции следует, что $y''(x) = \dfrac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t}$. Для вычисления третьей производной надо представить вторую производную в виде $\begin{cases} x = x(t) \\ y''_{xx} = \dfrac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t} \end{cases}$ и воспользоваться еще раз полученным правилом. Производные старших порядков вычисляются аналогично.

**ПРИМЕР**. Найти производные первого и второго порядков функции

$$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \end{cases}, \ t \in R.$$

$$y'_x = \frac{(1-\cos t)'}{(t-\sin t)'} = \frac{\sin t}{1-\cos t} \ \Rightarrow \begin{cases} x = t - \sin t \\ y'_x = \dfrac{\sin t}{1-\cos t} \end{cases} \Rightarrow \ y''_{xx} = \frac{\cos t(1-\cos t) - \sin^2 t}{(1-\cos t)^2(1-\cos t)} = -\frac{1}{(1-\cos t)^2}.$$