Типовой расчет по теме ВЫЧИСЛЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ

ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

Пусть в некотором промежутке $[a,b]$ задана непрерывная функция $y=f(x)$. $x_0 \in [a,b]$- заданная точка (рис.33).

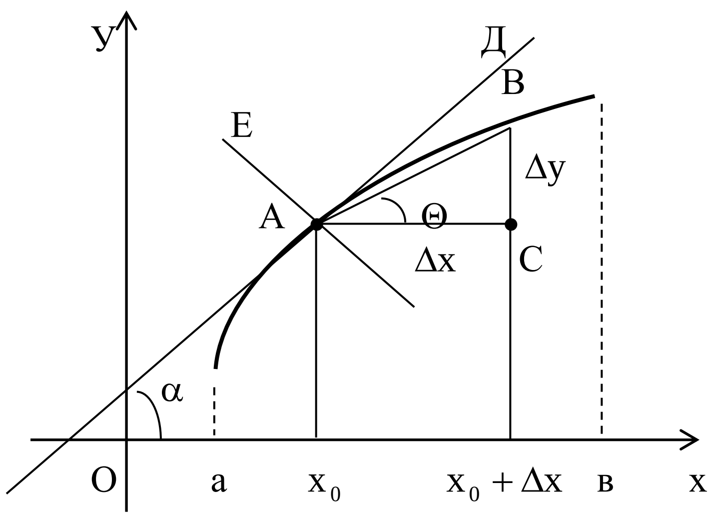

Рис. 1

Дадим аргументу x_0 приращение Δx, тогда функция получит приращение $\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$, это величина отрезка BC (рис.1).

Отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ называется <u>средней</u> скоростью изменения функции $y=f(x)$ в промежутке $[x_0;x_0+\Delta x]$, а предел этого отношения, когда $\Delta x \to 0$, называется <u>производной</u> <u>функции</u> $y=f(x)$ в заданной точке x_0. Таким образом, $f'(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

Замечание. *Если* $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ *не существует, то и производной* $f'(x_0)$ *тоже не существует.*

Производную функции $y=f(x)$ в произвольной точке x принято обозначать $f'(x)$ или $y'(x)$, или $\dfrac{dy}{dx}$. Если же точка x_0 задана, значение производной в этой точке записывают в виде $f'(x_0)$, $y'(x_0)$, $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$.

Производная функции в заданной точке характеризует скорость изменения функции в этой точке. Например, производная от пути по времени есть скорость движения, то есть $V(t)=\dfrac{ds}{dt}$; производная от скорости по времени дает ускорение движения $a(t)=\dfrac{dv}{dt}$. Если функция $Q=Q(t)$ выражает количество электричества, протекающего за время t через сечение проводника, то $\frac{dQ}{dt} = i(t)$ есть сила тока в момент времени t. Видно (рис. 33), что $\frac{\Delta y}{\Delta x} = tgQ$. Переходя к пределу при $\Delta x \to 0$,получаем $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} tgQ = tg\alpha$. Итак, производная функции в заданной точке равна тангенсу угла α, который образует касательная в точке $A(x_0; y_0)$с осью OX: $f'(x_0) = tg\alpha$. Так как $tg\alpha = K_{кас}$, то $K_{кас} = f'(x_0)$. Поскольку уравнение прямой с угловым коэффициентом имеет вид $y - y_0 = k(x - x_0)$, то получим уравнение касательной АД: $y - y_0 = f(x_0)(x - x_0)$(рис. 33).

Так как нормаль $AE \perp AД$, то $K_{н.} = -\frac{1}{K_{кас}} = -\frac{1}{f'(x_0)}$. Поэтому уравнение нормали АЕ имеет вид $y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0)$ (рис. 33).

Пример. Найти производную функции $y = \sin x$ в производной точке x.

Решение. $y(x) = \sin x, y(x + \Delta x) = \sin(x + \Delta x)$, тогда $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) =$ $= \sin(x + \Delta x) - \sin x$. Так как $\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \sin\frac{\alpha - \beta}{2}$, то

$$\Delta y = 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \cdot \sin\frac{\Delta x}{2}. \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \cos(x + \Delta x) \cdot \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}.$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \cos(x + \Delta x) \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x \cdot 1 = \cos x.$$

Замечание. *При нахождении предела следует помнить, что* $x = const$, Δx *- переменная.*

Основные правила дифференцирования

2) $(U(x) \pm V(x))' = U'(x) \pm V'(x)$
3) $(U(x) \cdot V(x))' = U'(x)V(x) + U(x)V'(x)$
4) $\left(\frac{U(x)}{V(x)}\right)' = \frac{U`(x)V(x) - U(x)V`(x)}{(V(x))^2}$
5) $(CU(x))' = C(U(x))'$

1.	$C'=0$	
2.	$x'=1$ $(cx)'=c$	
3.	$(x^n)'=nx^{n-1}$	$(u^n)'=nu^{n-1}u'$
4.	$(\cos x)'=-\sin x$	$(\cos u)'=-\sin u\, u'$
5.	$(\sin x)'=\cos x$	$(\sin u)'=\cos u\, u'$
6.	$(\mathrm{tg}x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$	$(\mathrm{tg}u)'=\frac{1}{\cos^2 u}u'$
7.	$(\mathrm{ctg}x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\mathrm{ctg}u)'=-\frac{1}{\sin^2 u}u'$
8.	$(\mathrm{arctg}x)'=\frac{1}{1+x^2}$	$(\mathrm{arctg}u)'=\frac{1}{1+u^2}u'$
9.	$(\mathrm{arcctg}x)'=-\frac{1}{1+x^2}$	$(\mathrm{arcctg}u)'=-\frac{1}{1+u^2}u'$
10.	$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arcsin u)'=\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'$
11.	$(\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\mathrm{arcos}u)'=-\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}u'$
12.	$(a^x)'=a^x\ln a$	$(a^u)'=a^u\ln a\, u'$
13.	$(e^x)'=e^x$	$(e^u)'=e^u u'$
14.	$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$	$(\log_a u)'=\frac{1}{u\ln a}u'$
15.	$(\ln x)'=\frac{1}{x}$	$(\ln u)'=\frac{1}{u}\ u'$

Пример 2. $y=5x^3,\ y'=5\cdot\left(x^3\right)'=5\cdot 3x^2=15x^2$.

Пример 3. Для $y=x^3\cdot\sin x$ найти y'

Воспользуемся формулой :

$(U(x)\cdot V(x))'=U'(x)V(x)+U(x)V'(x)$, где $U=x^3,\ V=\sin x$.Тогда для $y=x^3\cdot\sin x$,

$$y'=\left(x^3\right)\cdot\sin x+x^3(\sin x)'=3x^2\cdot\sin x+x^3\cos x.$$

Пример 4. Для $y=\frac{\sin x}{2x^3}$ найти y'.

Воспользуемся формулой :

$\left(\frac{U(x)}{V(x)}\right)'=\frac{U`(x)V(x)-U(x)V`(x)}{(V(x))^2}$, где $U=\sin x,\ V=2x^3$.

$$y'=\left(\frac{\sin x}{2x^3}\right)'=\frac{1}{2}\cdot\frac{(\sin x)'\cdot x^3-\sin x\cdot\left(x^3\right)'}{x^6}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos x\cdot x^3-\sin x\cdot 3x^2}{x^6}=\frac{x\cos x-3\sin x}{2x^4}$$

Пример 5. Для $y=\sin x^3$ найти y'.

Это сложная функция. Можно представить данную функцию как $y=\sin u$, где $u=x^3$. Зная, что $(\sin u)'=\cos u\cdot u'$, получим:

$$y'=\left(\sin x^3\right)'=\cos x^3\cdot\left(x^3\right)'=3x^2\cdot\cos x^3.$$

Пример 6. Для $y=(5+3x)^7$ **найти** y'.

Это сложная функция. Можно представить данную функцию как $y=u^7$, где $u=5+3x$. Зная, что $\left(u^7\right)'=7\cdot u^6\cdot u'$, получим:

$$y'=7\cdot(5+3x)^6\cdot(5+3x)'=21(5+3x)^6.$$

Пример 7. Для $y=\cos^2(x^2)$ **найти** y'.

Это сложная функция. Можно представить данную функцию как $y=u^2$, где $u=\cos x^2$. Зная, что $\left(u^2\right)'=2\cdot u\ \ \cdot u'$, получим:

$$y'=2\cos\left(x^2\right)\cdot\left(\cos\left(x^2\right)\right)'=2\cos\left(x^2\right)\cdot\left(-\sin\left(x^2\right)\right)\cdot\left(x^2\right)'=2\cos\left(x^2\right)\cdot\left(-\sin\left(x^2\right)\right)\cdot 2x=$$
$$=-2x\cdot\sin\left(2x^2\right)$$

Пример 8. Для $y=\arcsin\sqrt{x}$ **найти** y'.

Это сложная функция. Можно представить данную функцию как $y=\arcsin u$, где $u=\sqrt{x}=x^{\frac{1}{2}}$. Зная, что $(\arcsin u)'=\frac{1}{\sqrt{1+u^2}}\cdot u'$, получим:

$$y'=\left(\arcsin\sqrt{x}\right)'=\frac{\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'}{\sqrt{1-\left(\sqrt{x}\right)^2}}=\frac{\frac{1}{2}\cdot x^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{1-x}}=\frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-x}}$$

<u>**Задача 1.**</u> Найти производные функций:

1) $y=e^{x^3-5x^2+4x+12}$.

$$y'=(e^{x^3-5x^2+4x+12})'.$$

Можно представить данную функцию как $y=e^u$, где $u=x^3-5x^2+4x+12$. Зная, что $\left(e^u\right)'=e^u\cdot u'$, получим

$$e^{x^3-5x^2+4x+12}\left(x^3-5x^2+4x+12\right)'=e^{x^3-5x^2+4x+12}\left(3x^2-10x+4\right).$$

Ответ: $y' = \left(3x^2 - 10x + 4\right) e^{x^3 - 5x^2 + 4x + 12}$.

2) $y = \mathrm{tg}^3 5x$.

$$y' = \left[\left(\mathrm{tg}\ 5x\right)^3\right]'.$$

Можно представить $y = u^3$, где $u = \mathrm{tg}\ 5x$. Причем $\left(u^3\right)' = 3u^2 \cdot u'$, в результате получим

$$y' = \left[\left(\mathrm{tg}\ 5x\right)^3\right]' = 3 \cdot \left(\mathrm{tg}\ 5x\right)^2 \cdot \left(\mathrm{tg}\ 5x\right)' = 3\mathrm{tg}^2\ 5x \frac{1}{\cos^2\ 5x} \cdot \left(5x\right)' = 15\mathrm{tg}^2\ 5x\ \frac{1}{\cos^2\ 5x}$$

Ответ: $y' = 15\ \dfrac{\mathrm{tg}^2\ 5x}{\cos^2\ 5x}$.

3) $y = 3x\ \ln\ x$.

$$y' = 3\left(x \cdot \ln\ x\right)'.$$

После подстановок $\left(u \cdot v\right)' = u'v + v'u$; $\left(c \cdot u\right)' = cu'$ получим

$$y' = 3\left[\left(x\right)' \cdot \ln\ x + x\left(\ln\ x\right)'\right] = 3\left[1 \cdot \ln\ x + x \cdot \frac{1}{x}\right] = 3\left(\ln\ x + 1\right).$$

Ответ: $y' = 3\left(\ln\ x + 1\right)$.

4) $y = \dfrac{x^2 - 3 + 1}{2x}$.

$$y' = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x^2 - 3x + 1}{x}\right)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{\left(x^2 - 3x + 1\right)' x - \left(x\right)' \left(x^2 - 3x + 1\right)}{x^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\ \frac{\left(2x - 3\right)x - \left(x^2 - 3x + 1\right)}{x^2} = \frac{1}{2}\ \frac{2x^2 - 3x - x^2 + 3x - 1}{x^2} = \frac{1}{2}\ \frac{x^2 - 1}{x^2},$$ если

воспользоваться правилом $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - v'u}{v^2}$.

Ответ: $y' = \dfrac{x^2 - 1}{2x^2}$.

Найти производные функций:

1. 1) $y = e^{\sin x} x^5 + \lg(5x+1)$; 2) $y = \dfrac{\cos^2 3x}{2x+3} - \arcsin 2x$; 3) $y = \sqrt{3x^2+1} + 2^{\operatorname{tg} x}$;

4) $y = \operatorname{ctg}^2 8x - 2x^3 + 1$; 5) $y = \operatorname{arctg}^3(\cos x)$; 6) $y = 3^{x^2} \sin 3x$;

7) $y = \dfrac{\arccos 2x}{x} - 8\sqrt{x} + 2x$; 8) $y = \lg(\sin 2x) + \cos 3x$; 9) $y = 3^{\ln x} \operatorname{arcctg} 2x$;

10) $y = \ln^2 \dfrac{1}{x}$.

2. 1) $y = e^{\cos x} x^3 + \lg(2x^2 + 3x)$; 2) $y = \dfrac{\sin^2 5x}{x+3} - \arccos 8x$; 3) $y = \sqrt{7x^2+5} + 3^{\operatorname{ctg} x}$;

4) $y = \operatorname{tg}^2 7x + 3x^2 + 8$; 5) $y = \operatorname{arcctg}^2(\sin x)$; 6) $y = 5^{x^3} \cos 8x$;

7) $y = \dfrac{\arcsin 3x}{x^2} + \sqrt[3]{x} - 1$; 8) $y = \ln\cos 3x - \sin 2x$; 9) $y = 2^{\ln x} \operatorname{arctg} 3x$;

10) $y = \ln^3 \dfrac{1}{x}$.

3. 1) $y = e^{\operatorname{tg} x} \cdot x^4 - \lg(3x^3 + 5)$; 2) $y = \dfrac{\sin^3 3x}{2x+5} - \arcsin(3x+1)$; 3) $y = \sqrt{2x+3} - 4^{\operatorname{tg} x}$;

4) $y = \operatorname{ctg}^3 2x + 4x^2 + 5$; 5) $y = \operatorname{arctg}^2(\sin x)$; 6) $y = 4^{x^5} \cos 2x$;

7) $y = \dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{x} - \sqrt{x} + 2$; 8) $y = \ln\sin 3x + \operatorname{tg} 8x$; 9) $y = 2^{\lg x} \arccos 3x$;

10) $y = \ln^5 \dfrac{1}{x}$.

4. 1) $y = e^{\operatorname{ctg} x} x^7 - \lg(2x^2 + 8x)$; 2) $y = \dfrac{\cos^3 2x}{5x+1} + \arcsin(2x+5)$; 3) $y = \sqrt{2x^2+1} + 2^{\operatorname{ctg} x}$;

4) $y = \operatorname{tg}^2 3x - 3x - 4$; 5) $y = \operatorname{arcctg}^2(\cos x)$; 6) $y = 2^{x^2} \sin 3x$;

7) $y=\dfrac{\arcsin 2x}{x}-\sqrt{x}+5$; 8) $y=\lg\cos 2x-\operatorname{ctg} 3x$; 9) $y=4^{\ln x}\arcsin 2x$;

10) $y=\ln^4\dfrac{1}{x}$.

5. 1) $y=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\cos 2x}+2^x$; 2) $y=\arcsin^2(e^x)+x^3$; 3) $y=\operatorname{tg}^3 x\cdot\dfrac{1}{x}$;

4) $y=\operatorname{arctg}^2 3x+2x^4+1$; 5) $y=\ln^2\dfrac{\sin 3x}{x}$; 6) $y=\operatorname{ctg} 3x\cdot\ln x$;

7) $y=\sqrt[3]{3x^5+7}+\arccos 2x$; 8) $y=\dfrac{\sin e^x}{x^2}+2x^2+5x$; 9) $y=\arcsin(5x+3)\cdot e^{2x}$;

10) $y=\sin(\ln x)$.

6. 1) $y=\dfrac{\sqrt{x+3}}{\sin 3x}+3^x$; 2) $y=\arccos^2 5x+e^{x^2}$; 3) $y=\operatorname{ctg}^3 x\cdot\dfrac{2}{x}$;

4) $y=\operatorname{arctg}^2 5x+3x^3+8x$; 5) $y=\ln^2\dfrac{\cos 2x}{x}$; 6) $y=\operatorname{tg} 2x\cdot\ln 2x$;

7) $y=\sqrt{2x+5}+\arcsin 3x$; 8) $y=\dfrac{\cos e^x}{x^3}+5x^3+4$; 9) $y=\arccos(3x+5)\cdot e^x$;

10) $y=\cos(\ln x)$.

7. 1) $y=\arcsin^2 5^x+\sqrt{x+2}$; 2) $y=\operatorname{tg}^3(\sin 2x)+2^x$; 3) $y=\dfrac{\cos 8x}{x^5}-\arccos 3x$;

4) $y=\ln^3(\sin 8x)+\operatorname{ctg} 2x$; 5) $y=\sin 3x\cdot\lg 7x^2$; 6) $y=\operatorname{arctg}^2 3x$;

7) $y=2^{\sin x}+x^2+4$; 8) $y=\sin^3 7x^2$; 9) $y=\dfrac{x^2}{\ln x}+8x$;

10) $y=\dfrac{\cos 3x}{4}-\arccos 7x$.

8. 1) $y=\arccos^2 7^x+\sqrt{3x+1}$; 2) $y=\operatorname{ctg}^2(\cos 2x)+7^x$; 3) $y=\dfrac{\sin 3x}{x^2}-\arcsin 4x$;

4) $y=\ln^2(\cos 2x)+\operatorname{tg} 3x$; 5) $y=\cos 3x\cdot\lg 8x$; 6) $y=\operatorname{arcctg}^2 8x$;

7) $y = 3^{\cos x} + x^3 + 8x - 1;$ 8) $y = \cos^2 8x^3;$ 9) $y = \dfrac{x^3}{\sin x} + \ln 5x;$

10) $y = \dfrac{\sin 2x}{3} - \arcsin 5x^2.$

9. 1) $y = \ln^3 \sqrt{\sin x};$ 2) $y = \dfrac{\operatorname{tg} 2x}{3x} + \arcsin x^2;$ 3) $y = \cos^2 \lg 5x;$

4) $y = \sin 3x \cdot \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x};$ 5) $y = \operatorname{arctg} 5^x - 8x + 5;$ 6) $y = 2^{x^2 + \sin x};$

7) $y = \arccos^2 5x + \ln 3x;$ 8) $y = \cos^2 \left(\ln \dfrac{1}{x} \right);$ 9) $y = \operatorname{arctg} (\sin 8x);$

10) $y = \operatorname{ctg} \dfrac{x^2}{4} - \sin x.$

10. 1) $y = \ln^2 \sqrt{\cos x};$ 2) $y = \dfrac{\operatorname{ctg} 3x}{7x^2} + \arccos 2x;$ 3) $y = \sin^2 (\lg 3x);$

4) $y = \cos 2x \cdot \arccos \dfrac{1}{x};$ 5) $y = \operatorname{arctg} 7^{x^2} - 3x + 5;$ 6) $y = \arcsin (\cos 2x);$

7) $y = 7^{\sin 3x + 5x};$ 8) $y = \sin^3 \left(\ln \dfrac{1}{x} \right);$ 9) $y = \operatorname{arcctg} (\cos 5x);$

10) $y = \operatorname{tg} \dfrac{x^3}{3} - \cos x.$

11. 1) $y = \sqrt{\dfrac{\cos 2x}{x}} + \ln 8x;$ 2) $y = \arcsin 2x \cdot \operatorname{tg} (7x + 3);$ 3) $y = \sin^8 (\sin 3x);$

4) $y = 3^{x^2 + \operatorname{tg} x} - x^3;$ 5) $y = \cos 3x + \sqrt{x^5 + 3};$ 6) $y = \ln^2 \dfrac{1}{x};$

7) $y = \operatorname{arctg} 2^x + x^2 - 7x;$ 8) $y = \dfrac{\sin 2x}{x^4} - x^7 + 2x;$ 9) $y = \operatorname{arctg}^2 3x;$

10) $y = 3^{x^2} \cdot \cos 7x.$

12. 1) $y = \sqrt{\dfrac{\sin 3x}{x}} \cdot \ln 7x;$ 2) $y = \arccos 3x \cdot \operatorname{ctg} (3x + 7);$ 3) $y = \cos^5 (\ln 7x);$

4) $y=2^{x^3+\text{ctg}\,x}-x^5$; 5) $y=\sin 2x+\sqrt{x^3+7}$; 6) $y=\ln^3\frac{1}{x}$;

7) $y=\text{arcctg}\,3^x+7x+5$; 8) $y=\frac{\cos 3x}{x^3}-x^8+5x^3$; 9) $y=\text{arcctg}^3\,2x$;

10) $y=5^{x^3}\sin 3x$.

13. 1) $y=\ln^2(\cos 3x)+x^3$; 2) $y=\sin 4x\cdot 2^{x^2}$; 3) $y=\frac{\sqrt{x+3}}{\text{tg}\,2x}+3x^3$;

4) $y=\text{arctg}^2(\ln x)$; 5) $y=\cos(\arcsin 2x)$; 6) $y=5^{x^3+\text{ctg}\,x}$;

7) $y=x^7\ln\frac{1}{x}$; 8) $y=\cos^2 3x+\frac{x^2}{\sin x}$; 9) $y=\ln^3 2^x+x^3$;

10) $y=\sqrt[3]{\frac{x^2}{\cos x}}$.

14. 1) $y=\ln^2(\sin 3x)+x^8-7$; 2) $y=\cos 3x\cdot 4^{x^3}$; 3) $y=\frac{\sqrt{x^2+1}}{\text{ctg}\,x}+8x^2+5$;

4) $y=\text{arcctg}^3(\ln x)$; 5) $y=\sin(\arccos 2x)$; 6) $y=7^{x^2+\cos 2x}$;

7) $y=x^4\cdot\ln\frac{1}{x}$; 8) $y=\sin^3 2x+\frac{x}{\cos 2x}$; 9) $y=\ln^2(5^x)+x^7$;

10) $y=\sqrt{\frac{x^3}{\sin 5x}}$.

15. 1) $y=5^{x^2+\cos 2x}$; 2) $y=\ln^5\frac{\sin x}{x^4}+8x^2$; 3) $y=\arcsin^2 8x+3$;

4) $y=\text{arctg}\,3x\cdot\cos\frac{1}{x}$; 5) $y=\frac{\sqrt{x+4}}{\sin 8x}+2^x$; 6) $y=\arccos^2 5x$;

7) $y=\text{tg}\,x\cdot\lg 2x$; 8) $y=\ln\frac{\cos x}{x^5}-7x^2$; 9) $y=\sin^2(\ln x)$;

10) $y=\text{ctg}(\sin 2x)-7x+5$.

16. 1) $y=7^{x^3+\sin 7x}$; 2) $y=\ln^2\dfrac{\cos x}{x^2}-7x^2$; 3) $y=\arccos^2 3x$;

4) $y=\operatorname{arcctg} 7x\cdot\sin\dfrac{1}{x}$; 5) $y=\dfrac{\sqrt{x-7}}{\cos 2x}-7^x$; 6) $y=\arcsin^3 3x$;

7) $y=\operatorname{ctg} x\cdot\ln 3x$; 8) $y=\ln\dfrac{\sin x}{x^3}-2x^2+3$; 9) $y=\cos^2(\ln x)$;

10) $y=\operatorname{tg}(\cos 3x)-7x^2+5x$.

17. 1) $y=e^{\sin x}x^5+\lg(5x+1)$; 2) $y=\dfrac{\cos^2 3x}{2x+3}-\arcsin 2x$; 3) $y=\sqrt{3x^2+1}+2^{\operatorname{tg} x}$;

4) $y=\operatorname{ctg}^2 8x-2x^3+1$; 5) $y=\operatorname{arctg}^3(\cos x)$; 6) $y=3^{x^2}\sin 3x$;

7) $y=\dfrac{\arccos 2x}{x}-8\sqrt{x}+2x$; 8) $y=\lg(\sin 2x)+\cos 3x$; 9) $y=3^{\ln x}\operatorname{arcctg} 2x$;

10) $y=\ln^2\dfrac{1}{x}$.

18. 1) $y=e^{\cos x}x^3+\lg(2x^2+3x)$; 2) $y=\dfrac{\sin^2 5x}{x+3}-\arccos 8x$; 3) $y=\sqrt{7x^2+5}+3^{\operatorname{ctg} x}$;

4) $y=\operatorname{tg}^2 7x+3x^2+8$; 5) $y=\operatorname{arcctg}^2(\sin x)$; 6) $y=5^{x^3}\cos 8x$;

7) $y=\dfrac{\arcsin 3x}{x^2}+\sqrt[3]{x}-1$; 8) $y=\ln\cos 3x-\sin 2x$; 9) $y=2^{\ln x}\operatorname{arctg} 3x$;

10) $y=\ln^3\dfrac{1}{x}$.

19. 1) $y=e^{\operatorname{tg} x}\cdot x^4-\lg(3x^3+5)$; 2) $y=\dfrac{\sin^3 3x}{2x+5}-\arcsin(3x+1)$; 3) $y=\sqrt{2x+3}-4^{\operatorname{tg} x}$;

4) $y=\operatorname{ctg}^3 2x+4x^2+5$; 5) $y=\operatorname{arctg}^2(\sin x)$; 6) $y=4^{x^5}\cos 2x$;

7) $y=\dfrac{\operatorname{arctg} 2x}{x}-\sqrt{x}+2$; 8) $y=\ln\sin 3x+\operatorname{tg} 8x$; 9) $y=2^{\lg x}\arccos 3x$;

10) $y=\ln^5\dfrac{1}{x}$.

20. 1) $y = e^{\operatorname{ctg} x} x^7 - \lg(2x^2 + 8x)$; 2) $y = \dfrac{\cos^3 2x}{5x+1} + \arcsin(2x+5)$; 3) $y = \sqrt{2x^2+1} + 2^{\operatorname{ctg} x}$;

4) $y = \operatorname{tg}^2 3x - 3x - 4$; 5) $y = \operatorname{arcctg}^2(\cos x)$; 6) $y = 2^{x^2} \sin 3x$;

7) $y = \dfrac{\arcsin 2x}{x} - \sqrt{x} + 5$; 8) $y = \lg \cos 2x - \operatorname{ctg} 3x$; 9) $y = 4^{\ln x} \arcsin 2x$;

10) $y = \ln^4 \dfrac{1}{x}$.

21. 1) $y = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\cos 2x} + 2^x$; 2) $y = \arcsin^2(e^x) + x^3$; 3) $y = \operatorname{tg}^3 x \cdot \dfrac{1}{x}$;

4) $y = \operatorname{arctg}^2 3x + 2x^4 + 1$; 5) $y = \ln^2 \dfrac{\sin 3x}{x}$; 6) $y = \operatorname{ctg} 3x \cdot \ln x$;

7) $y = \sqrt[3]{3x^5+7} + \arccos 2x$; 8) $y = \dfrac{\sin e^x}{x^2} + 2x^2 + 5x$; 9) $y = \arcsin(5x+3) \cdot e^{2x}$;

10) $y = \sin(\ln x)$.

22. 1) $y = \dfrac{\sqrt{x+3}}{\sin 3x} + 3^x$; 2) $y = \arccos^2 5x + e^{x^2}$; 3) $y = \operatorname{ctg}^3 x \cdot \dfrac{2}{x}$;

4) $y = \operatorname{arctg}^2 5x + 3x^3 + 8x$; 5) $y = \ln^2 \dfrac{\cos 2x}{x}$; 6) $y = \operatorname{tg} 2x \cdot \ln 2x$;

7) $y = \sqrt{2x+5} + \arcsin 3x$; 8) $y = \dfrac{\cos e^x}{x^3} + 5x^3 + 4$; 9) $y = \arccos(3x+5) \cdot e^x$;

10) $y = \cos(\ln x)$.

23. 1) $y = \arcsin^2 5^x + \sqrt{x+2}$; 2) $y = \operatorname{tg}^3(\sin 2x) + 2^x$; 3) $y = \dfrac{\cos 8x}{x^5} - \arccos 3x$;

4) $y = \ln^3(\sin 8x) + \operatorname{ctg} 2x$; 5) $y = \sin 3x \cdot \lg 7x^2$; 6) $y = \operatorname{arctg}^2 3x$;

7) $y = 2^{\sin x} + x^2 + 4$; 8) $y = \sin^3 7x^2$; 9) $y = \dfrac{x^2}{\ln x} + 8x$;

10) $y = \dfrac{\cos 3x}{4} - \arccos 7x$.

24. 1) $y=\arccos^2 7^x+\sqrt{3x+1}$; 2) $y=\mathrm{ctg}^2(\cos 2x)+7^x$; 3) $y=\dfrac{\sin 3x}{x^2}-\arcsin 4x$;

4) $y=\ln^2(\cos 2x)+\mathrm{tg}\,3x$; 5) $y=\cos 3x\cdot\lg 8x$; 6) $y=\mathrm{arcctg}^2 8x$;

7) $y=3^{\cos x}+x^3+8x-1$; 8) $y=\cos^2 8x^3$; 9) $y=\dfrac{x^3}{\sin x}+\ln 5x$;

10) $y=\dfrac{\sin 2x}{3}-\arcsin 5x^2$.

25. 1) $y=\ln^3\sqrt{\sin x}$; 2) $y=\dfrac{\mathrm{tg}\,2x}{3x}+\arcsin x^2$; 3) $y=\cos^2 \lg 5x$;

4) $y=\sin 3x\cdot\mathrm{arctg}\,\dfrac{1}{x}$; 5) $y=\mathrm{arctg}\,5^x-8x+5$; 6) $y=2^{x^2+\sin x}$;

7) $y=\arccos^2 5x+\ln 3x$; 8) $y=\cos^2\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)$; 9) $y=\mathrm{arctg}\,(\sin 8x)$;

10) $y=\mathrm{ctg}\,\dfrac{x^2}{4}-\sin x$.

26. 1) $y=\ln^2\sqrt{\cos x}$; 2) $y=\dfrac{\mathrm{ctg}\,3x}{7x^2}+\arccos 2x$; 3) $y=\sin^2(\lg 3x)$;

4) $y=\cos 2x\cdot\arccos\dfrac{1}{x}$; 5) $y=\mathrm{arctg}\,7^{x^2}-3x+5$; 6) $y=\arcsin(\cos 2x)$;

7) $y=7^{\sin 3x+5x}$; 8) $y=\sin^3\left(\ln\dfrac{1}{x}\right)$; 9) $y=\mathrm{arcctg}\,(\cos 5x)$;

10) $y=\mathrm{tg}\,\dfrac{x^3}{3}-\cos x$.

27. 1) $y=\sqrt{\dfrac{\cos 2x}{x}}+\ln 8x$; 2) $y=\arcsin 2x\cdot\mathrm{tg}\,(7x+3)$; 3) $y=\sin^8(\sin 3x)$;

4) $y=3^{x^2+\mathrm{tg}\,x}-x^3$; 5) $y=\cos 3x+\sqrt{x^5+3}$; 6) $y=\ln^2\dfrac{1}{x}$;

7) $y=\mathrm{arctg}\,2^x+x^2-7x$; 8) $y=\dfrac{\sin 2x}{x^4}-x^7+2x$; 9) $y=\mathrm{arctg}^2 3x$;

10) $y=3^{x^2}\cdot\cos 7x$.

28.	1) $y=\sqrt{\dfrac{\sin 3x}{x}}\cdot\ln 7x$;	2) $y=\arccos 3x\cdot \mathrm{ctg}(3x+7)$;	3) $y=\cos^5(\ln 7x)$;
	4) $y=2^{x^3+\mathrm{ctg}\,x}-x^5$;	5) $y=\sin 2x+\sqrt{x^3+7}$;	6) $y=\ln^3\dfrac{1}{x}$;
	7) $y=\mathrm{arcctg}\,3^x+7x+5$;	8) $y=\dfrac{\cos 3x}{x^3}-x^8+5x^3$;	9) $y=\mathrm{arcctg}^3\,2x$;
	10) $y=5^{x^3}\sin 3x$.		

29.	1) $y=\ln^2(\cos 3x)+x^3$;	2) $y=\sin 4x\cdot 2^{x^2}$;	3) $y=\dfrac{\sqrt{x+3}}{\mathrm{tg}\,2x}+3x^3$;
	4) $y=\mathrm{arctg}^2(\ln x)$;	5) $y=\cos(\arcsin 2x)$;	6) $y=5^{x^3+\mathrm{ctg}\,x}$;
	7) $y=x^7\ln\dfrac{1}{x}$;	8) $y=\cos^2 3x+\dfrac{x^2}{\sin x}$;	9) $y=\ln^3 2^x+x^3$;
	10) $y=\sqrt[3]{\dfrac{x^2}{\cos x}}$.		

30.	1) $y=\ln^2(\sin 3x)+x^8-7$;	2) $y=\cos 3x\cdot 4^{x^3}$;	3) $y=\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{\mathrm{ctg}\,x}+8x^2+5$;
	4) $y=\mathrm{arcctg}^3(\ln x)$;	5) $y=\sin(\arccos 2x)$;	6) $y=7^{x^2+\cos 2x}$;
	7) $y=x^4\cdot\ln\dfrac{1}{x}$;	8) $y=\sin^3 2x+\dfrac{x}{\cos 2x}$;	9) $y=\ln^2(5^x)+x^7$;
	10) $y=\sqrt{\dfrac{x^3}{\sin 5x}}$.		
	10) $y=\mathrm{ctg}(\sin 2x)-7x+5$.		

Дифференцирование функций, заданных параметрически

Производная функции $\begin{cases} x=\varphi(t) \\ y=\psi(t) \end{cases}$, заданной параметрически, находится по

Пример. $\begin{cases} x=a\cos^3 t \\ y=a\sin^3 t \end{cases}$ $\quad \begin{matrix} x'_t=-3a\cos^2 t\cdot\sin t \\ y'_t=3a\sin^2 t\cdot\cos t \end{matrix}$, $\quad y'_x=\dfrac{3a\sin^2 t\cdot\cos t}{-3a\cos^2 t\cdot\sin t}=-\mathrm{tg}t$.

Пример. $\begin{cases} x = \arcsin t \\ y = \ln\left(1 - t^2\right) \end{cases}$, $x_t' = \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$, $y_t' = \dfrac{-2t}{1-t^2}$. $y_x' = \dfrac{(-2t)\sqrt{1-t^2}}{\left(1-t^2\right)\cdot 1} = \dfrac{-2t}{\sqrt{1-t^2}}$.

Примеры для самостоятельного решения.

формуле $y' = \dfrac{y_t'}{x_t'}$.

Контрольные варианты к задаче 2.

Найти производные функций:

1.	$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$.
2.	$\begin{cases} x = \dfrac{1-t}{1+t} \\ y = \dfrac{2t}{1+t} \end{cases}$.
3.	$\begin{cases} x = 2\cos t - \cos 2t \\ y = 2\sin t - \sin 2t \end{cases}$.
4.	$\begin{cases} x = t^3 + 3t + 1 \\ y = 3t^5 + 5t^3 + 1 \end{cases}$.
5.	$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}$.
6.	$\begin{cases} x = \dfrac{1-t}{1+t} \\ y = \dfrac{2t}{1+t} \end{cases}$.
7.	$\begin{cases} x = 2\cos t - \cos 2t \\ y = 2\sin t - \sin 2t \end{cases}$.
8.	$\begin{cases} x = t^3 + 3t + 1 \\ y = 3t^5 + 5t^3 + 1 \end{cases}$.
9.	$\begin{cases} x = 2\cos t - \cos 2t \\ y = 2\sin t - \sin 2t \end{cases}$.

10.	$\begin{cases} x = t^3 + 3t + 1 \\ y = 3t^5 + 5t^3 + 1 \end{cases}.$
11.	$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}.$
12.	$\begin{cases} x = \dfrac{1-t}{1+t} \\ y = \dfrac{2t}{1+t} \end{cases}.$
13.	$\begin{cases} x = 2\cos t - \cos 2t \\ y = 2\sin t - \sin 2t \end{cases}.$
14.	$\begin{cases} x = t^3 + 3t + 1 \\ y = 3t^5 + 5t^3 + 1 \end{cases}.$
15.	$\begin{cases} x = a(t - \sin t) \\ y = a(1 - \cos t) \end{cases}.$
16.	$\begin{cases} x = \dfrac{1-t}{1+t} \\ y = \dfrac{2t}{1+t} \end{cases}.$
17.	$\begin{cases} x = 2\cos t - \cos 2t \\ y = 2\sin t - \sin 2t \end{cases}.$
18.	$\begin{cases} x = t^3 + 3t + 1 \\ y = 3t^5 + 5t^3 + 1 \end{cases}.$
19.	$\begin{cases} x = 2\cos t - \cos 2t \\ y = 2\sin t - \sin 2t \end{cases}.$
20.	$\begin{cases} x = t^3 + 3t + 1 \\ y = 3t^5 + 5t^3 + 1 \end{cases}.$