ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

ТЕОРЕМА (Ферма). Пусть функция $y = f(x)$ имеет в точке $x = x_0$ экстремум. Если существует $f'(x_0)$, то $f'(x_0) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x = x_0$, например, – точка минимума. По определению точки минимума существует окрестность этой точки $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, в пределах которой $f(x) - f(x_0) \geq 0$, то есть $\Delta y \geq 0$, Δy – приращение $y = f(x)$ в точке $x = x_0$. По определению $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Вычислим односторонние производные в точке $x = x_0$:

$f'(x_0-) = \lim\limits_{\Delta x \to 0-} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \leq 0$ по теореме о предельном переходе в неравенстве,

так как $\Delta y \geq 0$, $\Delta x < 0$;

$f'(x_0+) = \lim\limits_{\Delta x \to 0+} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \geq 0$, так как $\Delta y \geq 0$, $\Delta x > 0$. Но по условию $f'(x_0)$ существует, поэтому левая производная равна правой, а это возможно лишь если $f'(x_0 -) = f'(x_0 +) = f'(x_0) = 0$.

Предположение о том, что $x = x_0$ – точка максимума, приводит к тому же.
Геометрический смысл теоремы:

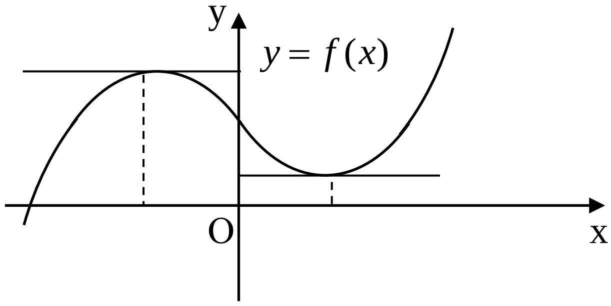

Рис. 26

Если график функции имеет в точке экстремума касательную, то она параллельна оси OX (рис. 26).

ТЕОРЕМА (Ролля). Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна $\forall x \in [a,b]$, дифференцируема $\forall x \in (a,b)$ и $f(a) = f(b)$, тогда существует $c \in (a,b)$ такая, что $f'(c) = 0$.

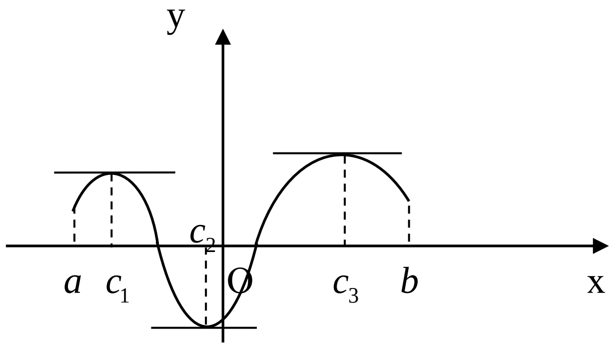

Рис. 1

Геометрический смысл теоремы: если $f(a)=f(b)$, то на графике дифференцируемой функции есть точки, в которых касательная параллельна оси ОХ (рис. 1).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как $y=f(x)$ непрерывна $\forall x\in[a,b]$, то по второй теореме Вейерштрасса она достигает на $[a,b]$ своих наибольшего M и наименьшего m значений либо в точках экстремума, либо на концах отрезка.

1. Пусть $M=m$, тогда $f(x)=const \Rightarrow f'(x)=0\ \forall x\in(a,b)$.

2. Пусть $M>m$. Так как $f(a)=f(b)$, то либо M, либо m достигается в точке экстремума $x=c$, но по теореме Ферма $f'(c)=0$. Что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА (Лагранжа). Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна $\forall x\in[a,b]$ и дифференцируема $\forall x\in(a,b)$, тогда существует $c\in(a,b)$ такая, что $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$.

Геометрический смысл теоремы:

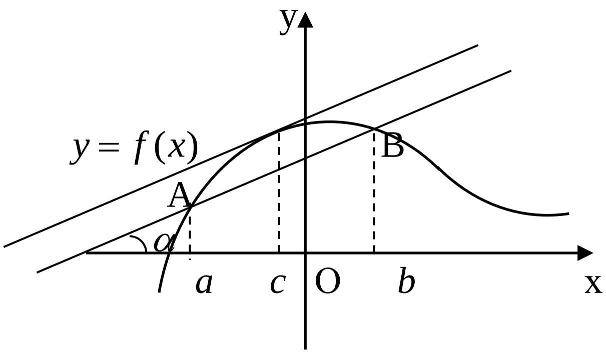

Рис. 3

AB – секущая (рис. 3) и

$tg\,\alpha=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ –угловой ее коэффициент.

$f'(c)=tg\,\varphi$ – угловой коэффициент касательной.

Так как $tg\,\alpha=tg\,\varphi$, то секущая параллельна касательной. Таким образом, теорема утверждает, что существует касательная, параллельная секущей, проходящей через точки А и В.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Через точки $\mathrm{A}\left(a, f\left(a\right)\right)$ и $\mathrm{B}\left(b, f\left(b\right)\right)$ проведем секущую АВ. Ее уравнение $\bar{y} = f(a) + \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$. Рассмотрим функцию

$$F(x) = f(x) - \bar{y}(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a),$$

$|F(x)|$ – расстояние между соответствующими точками на графике и на секущей АВ.

1. $F(x)$ непрерывна $\forall x \in [a,b]$ как разность непрерывных функций.
2. $F(x)$ дифференцируема $\forall x \in (a,b)$ как разность дифференцируемых функций.
3. $F(a) = F(b) = 0$.

Значит, $F(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля, поэтому существует $C \in (a,b)$ такая, что

$$F'(c) = 0;\ F'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Формула $f(b)-f(a) = f'(c)(b-a)$ называется *формулой Лагранжа*.

ТЕОРЕМА (Коши). Пусть функции $y = f(x)$, $y = g(x)$ непрерывны $\forall x \in [a,b]$, дифференцируемы $\forall x \in (a,b)$ и $g'(x) \neq 0$, тогда существует точка $c \in (a,b)$ такая, что $\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что $g(b) \neq g(a)$. Если бы $g(b) = g(a)$, то функция $y = g(x)$ удовлетворяла бы условию теоремы Ролля, поэтому существовала бы точка $c_1 \in (a,b)$ такая, что $g'(c_1) = 0$ – противоречие условию. Значит, $g'(x) \neq 0$, и обе части формулы определены. Рассмотрим вспомогательную функцию $F(x) = f(x) - f(a) - \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}\left(g(x) - g(a)\right)$.

$F(x)$ непрерывна $\forall x \in (a,b)$, дифференцируема $\forall x \in (a,b)$ и $F(b) = F(a) = 0$, то есть $F(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля. Тогда существует точка $c \in (a,b)$, в которой $F'(c) = 0$, но

$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x)\Rightarrow f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(c)\Rightarrow \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)},$$

что и требовалось доказать.

Доказанная формула называется *формулой Коши*.

ПРАВИЛО Лопиталя (теорема Лопиталя-Бернулли). Пусть функции $y=f(x)$, $y=g(x)$ непрерывны $\forall x\in(a,b]$, дифференцируемы $\forall x\in(a,b)$, $g'(x)\neq 0$ и $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$. Кроме того, существует конечный или бесконечный $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Тогда существует $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как по условию $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$, то доопределим $y=f(x)$, $y=g(x)$ в точке $x=a$, полагая $f(a)=g(a)=0$. Тогда $y=f(x)$, $y=g(x)$ станут непрерывными $\forall x\in[a,b]$. Покажем, что $\forall x\in(a,b)$ $g(x)\neq 0$. Предположим, что $g(x)=0$, тогда существует $c_1\in(a,x)$ такая, что $g'(c_1)=0$, так как функция $y=g(x)$ на $[a,x]$ удовлетворяет условиям теоремы Ролля. Но по условию $g'(x)\neq 0$ – противоречие. Поэтому $g(x)\neq 0$ $\forall x\in(a,b)$. Функции $y=f(x)$, $y=g(x)$ удовлетворяют условиям теоремы Коши на любом отрезке $[a,x]$, который содержится в $[a,b]$. Напишем формулу Коши:

$$\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(c)}{g(c)},\qquad c\in(a,x).$$

Отсюда имеем: $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)}=\lim\limits_{c\to a}\frac{f'(c)}{g'(c)}$, так как если $x\to a$, то $c\to a$.

Переобозначая переменную в последнем пределе, получим требуемое:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Правило Лопиталя остается справедливым и в том случае, когда $x\to b$ и $x\to\infty$. Оно позволяет раскрывать не только неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$, но и вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Если после применения правила Лопиталя неопределенность не раскрылась, то его следует применить еще раз.

ПРИМЕР. $\lim\limits_{x\to 1+}\dfrac{\ln(x-1)}{ctg\,\pi x}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to 1+}\dfrac{-\sin^2\pi x}{(x-1)\pi}=\left(\dfrac{0}{0}\right)=-\dfrac{1}{\pi}\lim\limits_{x\to 1+}\dfrac{2\pi\sin\pi x\cos\pi x}{1}=0.$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Правило Лопиталя – универсальный способ раскрытия неопределенностей, но существуют пределы, раскрыть которые можно, применив лишь один из изученных ранее частных приемов.

ПРИМЕР. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}$ и так далее.

Но, очевидно, $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x}=1$, так как степень числителя равна степени знаменателя, и предел равен отношению коэффициентов при старших степенях x.