ИССЛЕДОВАНИЕ ФУНКЦИИ И ПОСТРОЕНИЕ ЕЕ ГРАФИКА

ТЕОРЕМА 1 (признак монотонности дифференцируемой функции). Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема $\forall x \in (a,b)$. Если $f'(x) \geq 0 \ \forall x(a,b)$, то $f(x)$ не убывает, если же $f'(x) \leq 0 \ \forall x(a,b)$, то $f(x)$ не возрастает на (a,b).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x_1, x_2 \in (a,b)$ – произвольные точки, тогда $y = f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Лагранжа на $[x_1, x_2]$ (непрерывность следует из дифференцируемости). Напишем формулу Лагранжа

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1),$$

где $c \in (x_1,\ x_2)$.

Если $x_2 > x_1$ и $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in (a,\, b)$ то
$f'(c) \geq 0 \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) \geq 0 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1) \Rightarrow f(x)$ не убывает.

Аналогично показывается, что если $f'(x) \leq 0,$ то $y = f(x)$ не возрастает. Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Из доказательства теоремы следует, что если $f'(x) > 0$, то $y = f(x)$ возрастает, а при $f'(x) < 0$ $y = f(x)$ убывает.

Интервалы, на которых функция либо убывает, либо возрастает, называются *интервалами монотонности.*

ПРИМЕР. Найти интервалы монотонности функции

$$y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5.$$

$y' = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3) = 0 \Rightarrow x_1 = 3,\ x_2 = -1.$

Исследуем знак производной (рис. 1).

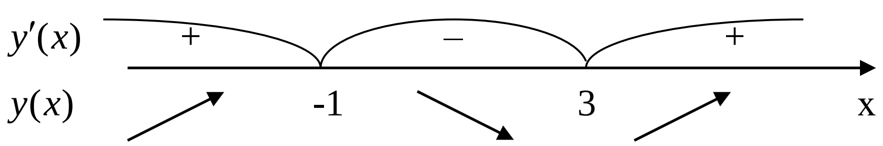


Рис. 1

Функция убывает на $(-1;3)$ и возрастает на $(-\infty;-1) \cup (3;+\infty)$.

ТЕОРЕМА 2 (необходимое условие экстремума дифференцируемой функции) Пусть функция $y=f(x)$ имеет в точке $x=x_0$ экстремум. Если в этой точке существует производная, то $f'(x_0)=0$.
Эта теорема является теоремой Ферма и была доказана ранее.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Необходимое условие экстремума достаточным не является.

ПРИМЕР. $y=x^3 \Rightarrow y'=3x^2=0 \Rightarrow x=0$, но точка $x=0$ точкой экстремума не является (рис. 2).

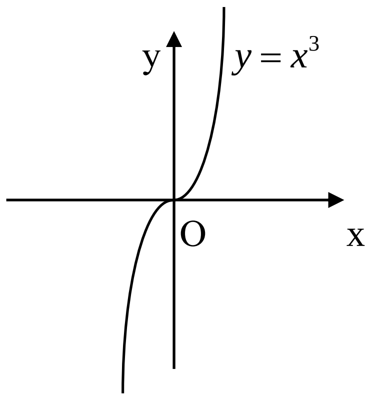


Рис. 2

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Рассмотрим функцию $y=\sqrt[3]{x^2}$ (рис. 3).

Так как $x^2\ge 0$, то $y=\sqrt[3]{x^2}\ge 0$, поэтому $x_0=0$ – точка минимума. Функция непрерывна $\forall x\in R$, и $y'=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x}} \Rightarrow y'(0)$ не существует.

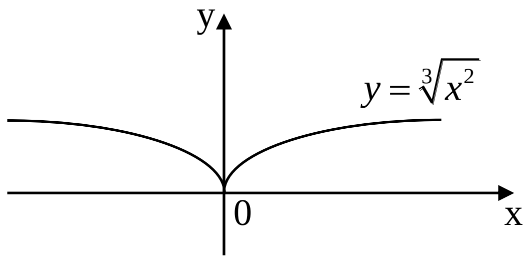


Рис. 3

Таким образом, непрерывная функция может иметь экстремум не только в тех точках, где $f'(x)=0$, но и в тех, где $f'(x)$ не существует.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Критическими* точками функции $y=f(x)$ называются точки, в которых $f'(x)=0$ или $f'(x)$ не существует; при этом точки, в которых $f'(x)=0$, называются *стационарными* точками.
Не всякая критическая точка является точкой экстремума.

ТЕОРЕМА 3 (первое достаточное условие экстремума непрерывной функции). Пусть непрерывная функция $y=f(x)$ дифференцируема всюду на (a,b) за исключением, быть может, критической точки $x=x_0$. Если $f'(x)<0$ при $x<x_0$ и $f'(x)>0$ при $x>x_0$, то $x=x_0$ – точка минимума; если же $f'(x)>0$ при $x<x_0$ и $f'(x)<0$ при $x>x_0$, то $x=x_0$ – точка максимума.

То есть, если при переходе через критическую точку производная меняет знак с «-» на «+», то в критической точке функция имеет минимум; если с «+» на «-» - то максимум; если же при переходе через критическую точку производная не меняет знак, то экстремума в точке $x = x_0$ *нет.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если при $x < x_0$ $f'(x) < 0$, то по теореме 1 $y = f(x)$ убывает. Если при $x > x_0$ $f'(x) > 0$, то $y = f(x)$ возрастает. Значит, $x = x_0$ – точка минимума, так как $f(x_0) \le f(x)$ $\forall x \in (x - \delta; x + \delta)$, $\delta > 0$.
Если при $x < x_0$ $f'(x) > 0$, а при $x > x_0$ $f'(x) < 0$, то $y = f(x)$ слева от $x = x_0$ возрастает, а справа – убывает по теореме 1. Значит, $x = x_0$ – точка максимума по определению.
Если окажется, что $f'(x) > 0$ (или $f'(x) < 0$) при $x < x_0$ и при $x > x_0$, то слева и справа от $x = x_0$ $y = f(x)$ возрастает (убывает), следовательно, $x = x_0$ точкой экстремума не является. Что и требовалось доказать.

ПРИМЕР. Найти экстремумы функции $y = x^4 - 4x^3 + 20$.

$$y' = 4x^2 - 12x = 4x^2(x-3) = 0 \Rightarrow x_{1,2} = 0,\ x_3 = 3.$$

Исследуем знак производной (рис. 4).

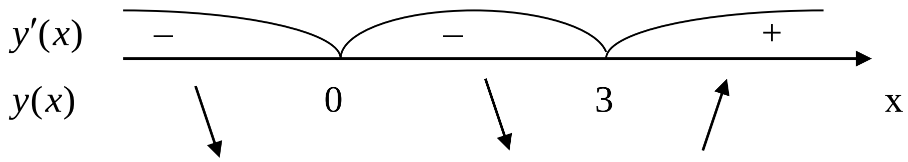
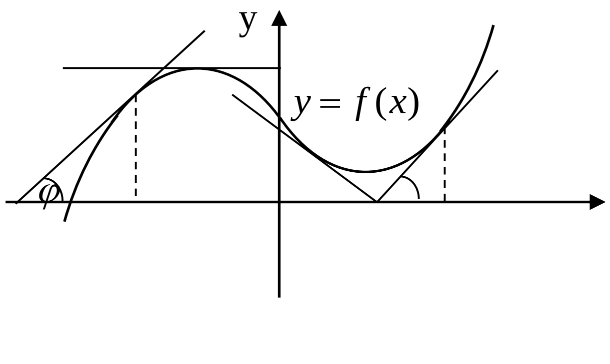


Рис. 4

В критической точке $x = 0$ экстремума нет, в критической точке $x = 3$ – минимум и $y_{\min} = y(3) = -7$.

Пусть график функции $y = f(x)$ имеет касательные во всех точках интервала (a,b).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. График функции $y = f(x)$ называется *выпуклым вверх (вниз)* на (a,b), если во всех точках (a,b) он лежит не выше (не ниже) любой своей касательной.



На (a,O) график $y = f(x)$ выпуклый вверх, на (O,b) – выпуклый вниз (рис. 5).

a O Рис. 5

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Точкой перегиба* графика функции $y = f(x)$ называется точка M, отделяющая участок графика, выпуклый вверх, от участка, выпуклого вниз. В этой точке график, можно сказать «перегибается» через касательную.

ТЕОРЕМА 4. (достаточное условие выпуклости вверх (вниз) графика функции). Пусть функция $y = f(x)$ имеет непрерывную вторую производную $\forall x \in (a,b)$. Тогда, если $f''(x) < 0$, то ее график имеет выпуклость, направленную вверх, если $f''(x) > 0$, то график функции имеет на (a,b) выпуклость, направленную вниз.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из определения производной следует, что $f'(x) = tg\ \varphi$ – угловой коэффициент касательной к графику в точке x. Заметим (рис. 34), что на участке графика, выпуклом вверх, касательная поворачивается по часовой стрелке, то есть угол φ меняется от острого к тупому, поэтому $tg\ \varphi = f'(x)$ убывает. На участке графика, выпуклом вниз, касательная поворачивается против часовой стрелки, то есть φ меняется от тупого к острому и $tg\ \varphi = f'(x)$ возрастает.

Пусть $f''(x) < 0 \Rightarrow \left(f'(x)\right)' < 0 \Rightarrow f'(x)$ убывает по теореме 1, значит, $tg\ \varphi$ убывает, и график имеет выпуклость, направленную вверх.

Пусть $f''(x) > 0 \Rightarrow \left(f'(x)\right)' > 0 \Rightarrow f'(x)$ возрастает по теореме 1, и график имеет выпуклость, направленную вниз.
Что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА 5 (необходимое условие точки перегиба). Пусть функция $y = f(x)$ имеет непрерывную вторую производную в некоторой окрестности точки перегиба $x = x_0$. Тогда $f''(x_0) = 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f''(x_0) \neq 0$. Допустим, $f''(x_0) > 0$. Так как $f''(x)$ по условию непрерывна, то по теореме об устойчивости знака непрерывной в точке функции существует окрестность точки $x = x_0$, в пределах которой $f''(x) > 0$, то есть $f''(x) > 0$ и справа, и слева от точки $x = x_0$. Таким образом, по теореме 4 $y = f(x)$ имеет выпуклость, направленную вниз, и справа, и слева от этой точки. Тогда $x = x_0$ по определению точкой перегиба не является. Также приводится к противоречию предположение о том, что $f''(x_0) < 0$. Так как по условию $f''(x_0)$ существует, то, следовательно, $f''(x_0) = 0$, что и требовалось доказать.

ТЕОРЕМА 6 (первое достаточное условие перегиба). Пусть функция $y = f(x)$ имеет непрерывную вторую производную в некоторой окрестности точки $x = x_0$ и

$f''(x_0)=0$. Тогда, если при переходе через $x=x_0$ $f''(x)$ меняет знак, то $x=x_0$ – точка перегиба; если $f''(x)$ не меняет знак, то $x=x_0$ точкой перегиба не является.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказать самостоятельно, использую теорему 4.

ПРИМЕР. Построить график функции $y=x^4-4x^3+20$.

Ранее были найдены интервалы монотонности этой функции и $y_{\min}=y(3)=-7$.

$y''(x)=\left(4x^3-12x^2\right)'=12x^2-24x=12x(x-2)=0 \Rightarrow x_1=0,\ x_2=2$ – точки перегиба (рис. 6), $y(0)=20,\ y(2)=4$.

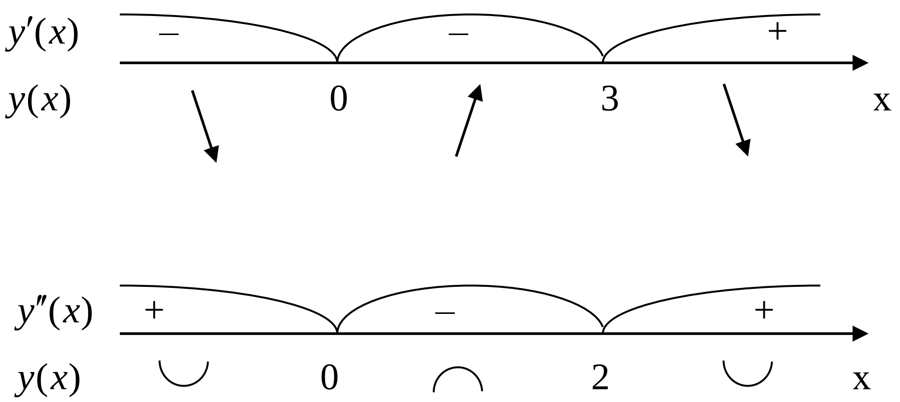


Рис. 6

Строим график с учетом информации о знаках $y'(x)$ и $y''(x)$ (рис. 7):

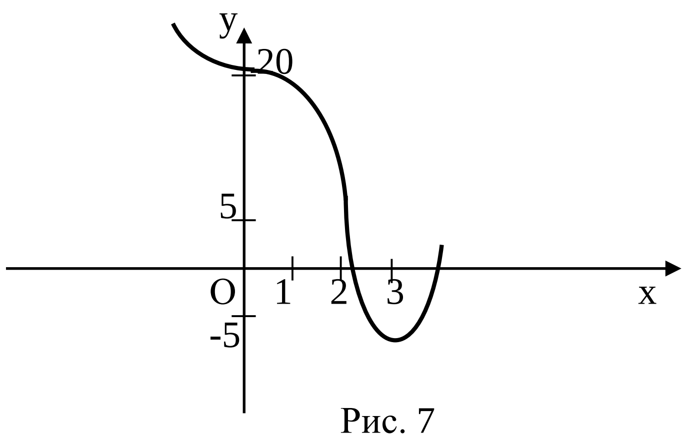


Рис. 7

АСИМПТОТЫ ГРАФИКА ФУНКЦИИ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Прямая линия называется *асимптотой* кривой, если расстояние от точки M, лежащей на этой кривой, до прямой стремится к нулю при удалении точки M вдоль одной из ветвей кривой в бесконечность.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой кривой $y = f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов в точке $x = a$ бесконечен. В этом случае в точке $x = a$ функция имеет разрыв второго рода.

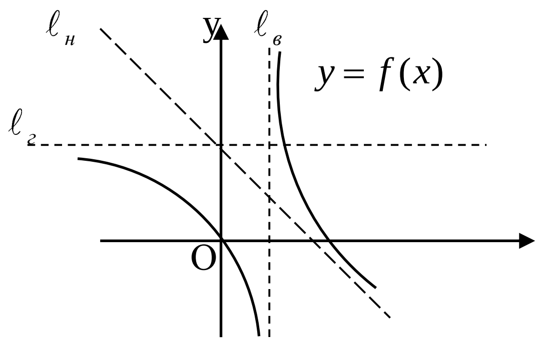


Рис. 8

Асимптоты бывают трех видов: горизонтальные, вертикальные, наклонные (рис. 8).

$\ell_г$ – горизонтальная асимптота

$\ell_в$ – вертикальная асимптота

$\ell_н$ – наклонная асимптота

ПРИМЕР. Функция $y = tg\,x$ определена при всех $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n$, причем $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2} + \pi n} tg\,x = \infty$, поэтому график этой функции имеет бесконечное множество вертикальных асимптот.

График функции $y = \dfrac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$ имеет, очевидно, три вертикальные асимптоты: $x = 1,\quad x = 2,\quad x = 3$.

ПРИМЕР. Функция $y = 2^{\frac{1}{x+1}}$ определена при всех $x \neq -1$, причем $\lim\limits_{x \to -1+} 2^{\frac{1}{x+1}} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to -1-} 2^{\frac{1}{x+1}} = 0$. По определению прямая $x = -1$ – вертикальная асимптота графика (справа).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Прямая $y = kx + b$ называется наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$, если $f(x)$ представима в виде: $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \alpha(x) = 0 \left(\lim\limits_{x \to -\infty} \alpha(x) = 0 \right)$.

ТЕОРЕМА. Для того, чтобы прямая $y = kx + b$ была наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$, необходимо и достаточно, чтобы существовали два конечных предела:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k,\ \lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - kx \right) = b \ \left(\lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = k,\ \lim_{x \to -\infty} \left(f(x) - kx \right) = b \right).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть функция $y = f(x)$ определена при всех достаточно больших положительных значениях x.

1. Необходимость: $y=kx+b$ – асимптота при $x\to+\infty$ $\Rightarrow$ существуют конечные пределы

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k,\ \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx\right)=b.$$

По определению $f(x)=kx+b+\alpha(x),\ \lim\limits_{x\to+\infty}\alpha(x)=0.$

Поэтому $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(k+\dfrac{b}{x}+\dfrac{\alpha(x)}{x}\right)=k,\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(b+\alpha(x)\right)=b.$

2. Достаточность: существуют конечные

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k,\ \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx\right)=b\ \Rightarrow\ y=kx+b$$

– асимптота при $x\to+\infty$.

По условию $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx\right)=b.$

Обозначим $f(x)-kx-b=\alpha(x).$

Тогда $\lim\limits_{x\to+\infty}\alpha(x)=0,$ то есть $f(x)=kx+b+\alpha(x),$ где $\alpha(x)$ – б.м. при $x\to+\infty$. По определению $y=kx+b$ – асимптота , что и требовалось доказать.

Если $x\to-\infty$, доказательство аналогично.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если при отыскании наклонной асимптоты графика оказалось, что $k=0,$ то график имеет горизонтальную асимптоту $y=b$ (если b существует). Если хотя бы один из пределов бесконечен или не существует, то график не имеет ни наклонной, ни горизонтальной асимптот.

ПРИМЕР. Найти асимптоты графика функции $y=x-2arctg\ x.$
Функция определена $\forall x\in R$, значит, вертикальных асимптот нет. Найдем наклонные асимптоты.

$$k_+=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2arctg\,x}{x}\right)=1,\ b_+=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(x-2arctg\,x-x\right)=-\pi.$$

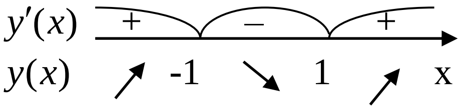
Таким образом, при $x\to+\infty$ $y=x-\pi$ – наклонная асимптота.

$$k_- = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\left(1-\frac{2arctg\,x}{x}\right)=1,\;\; b_- = \lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(x-2arctg\,x-x\right)=\pi\,,$$

откуда $y = x+\pi$ – асимптота графика при $x\to-\infty$.

Исследуем первую производную этой функции и построим эскиз графика (рис. 9).

$$y' = 1-\frac{2}{1+x^2}=\frac{x^2-1}{x^2+1}=0 \;\Rightarrow\; x_{1,2}=\pm1.$$



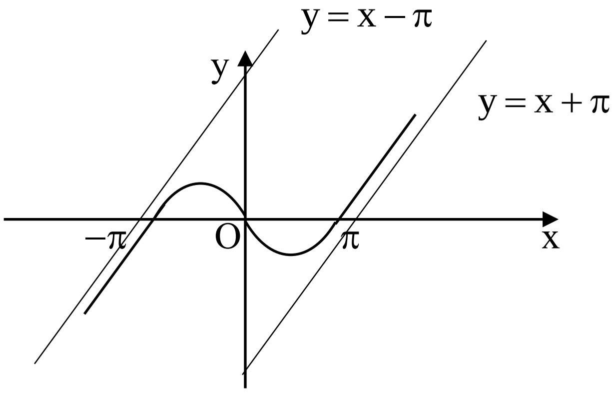


Рис. 9

ПРИМЕР. Найти асимптоты графика функции $y=\sqrt{4x^2-x}$.

ОДЗ: $4x^2-x\ge0 \Rightarrow x(4x-1)\ge0 \;\Rightarrow x\le0, x\ge\frac{1}{4}.$

$x(0)=x\left(\frac{1}{4}\right)=0$ – вертикальных асимптот нет.

$$k_+ = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{4x^2-x}}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=2,\;\; b_+ = \lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{4x^2-x}-2x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{-x}{\sqrt{4x^2-x}+2x}\right)=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=-\frac{1}{4},$$

то есть при $x\to+\infty$ $y=2x-\frac{1}{4}$ – асимптота.

$$k_- = \lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{4x^2-x}}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=-2,$$

$$b_- = \lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{4x^2-x}+2x\right)=\left(\infty-\infty\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{-x}{\sqrt{4x^2-x}-2x}\right)=\frac{1}{4},$$

ПРИМЕР. Найти асимптоты графика функции $y = \sqrt[3]{4x^2 - x}$.

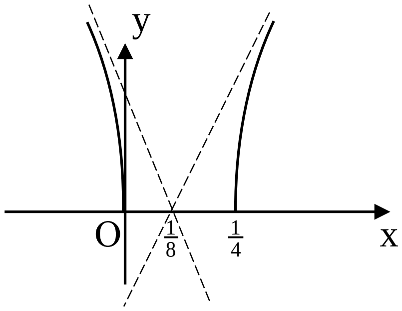


Рис. 10

и $y = -2x + \frac{1}{4}$ – асимптота графика при $x \to -\infty$.

Эскиз графика этой функции имеет вид (рис.10):

Функция определена $\forall x \in R$, поэтому вертикальных асимптот нет.

$$k_{\pm} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\sqrt[3]{4x^2 - x}}{x} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = 0, \; b_{\pm} = \lim_{x \to \pm\infty} \sqrt[3]{4x^2 - x} = +\infty,$$

значит, график асимптот не имеет.

ОБЩАЯ СХЕМА ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИИ И ПОСТРОЕНИЕ ЕЕ ГРАФИКА

1. Найти ОДЗ.
2. Определить свойства четности, нечетности, периодичности.
3. Найти точки разрыва и определить их характер.
4. Найти асимптоты графика.
5. Найти интервалы монотонности и экстремумы.
6. Определить направление выпуклости графика и точки перегиба.
7. Найти точки пересечения графика с осями координат.
8. Построить график: а) построить асимптоты
   б) отметить контрольные точки из пп.5,6,7
   в) построить график слева направо, используя информацию из п.п.5, 6.

ЗАМЕЧАНИЕ. Если $f(x)$ – четная функция, то ее график симметричен относительно оси OY; если нечетная, то симметричен относительно начала координат. График периодической функции достаточно построить на отрезке длиной в период, а потом периодически продолжить.

ПРИМЕР. Исследовать функцию $y=\dfrac{x^3}{x^2-4}$, построить ее график и эскизы первой и второй производных .

1. ОДЗ: $x^2-4\neq 0 \Rightarrow x\neq \pm 2.$

2. Функция нечетная, то есть график симметричен относительно начала координат.

3. $\lim\limits_{x\to -2-}\dfrac{x^3}{x^2-4}=-\infty,\ \lim\limits_{x\to -2+}\dfrac{x^3}{x^2-4}=+\infty \Rightarrow x=-2$ по определению точка разрыва второго рода. Точку $x=2$ можно не исследовать вследствие нечетности функции и симметрии графика.

4. $x=\pm 2$ – вертикальные асимптоты. Наклонные асимптоты:

$$k_{\pm}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3}{x\left(x^2-4\right)}=1,\ b_{\pm}=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3}{x^2-4}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4x}{x^2-4}=0 \Rightarrow y=x$$

– наклонная асимптота при $x\to\pm\infty$.

5. $y'=\dfrac{x^4-12x^2}{\left(x^2-4\right)^2}=\dfrac{x^2(x^2-12)}{\left(x^2-4\right)^2}=0 \Rightarrow x_{1,2}=0,\ x_{3,4}=\pm 2\sqrt{3}.$

Исследуем функцию на монотонность и экстремумы (рис. 11).

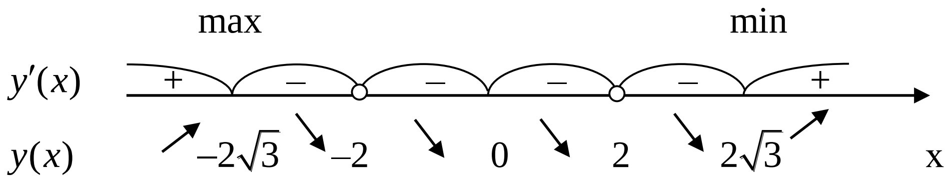


Рис. 11

$$y_{\max}=y\left(-2\sqrt{3}\right)=-3\sqrt{3}\approx -5{,}1,\ \ y_{\min}=y\left(2\sqrt{3}\right)\approx 5{,}1.$$

6. $y'' = \dfrac{8x\left(x^2+12\right)}{\left(x^2-4\right)^3} = 0 \Rightarrow x = 0.$

Определим направление выпуклости графика и точки перегиба (рис. 12).

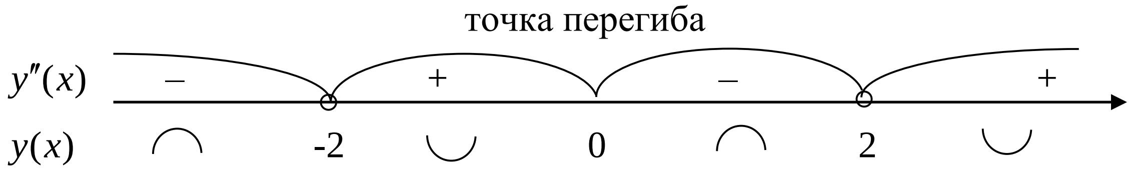


Рис. 12

$x = 0$ – точка перегиба.

7. $y(0) = 0.$

8. Построим график, а по нему – эскизы $y'(x)$ и $y''(x)$ (рис. 13):

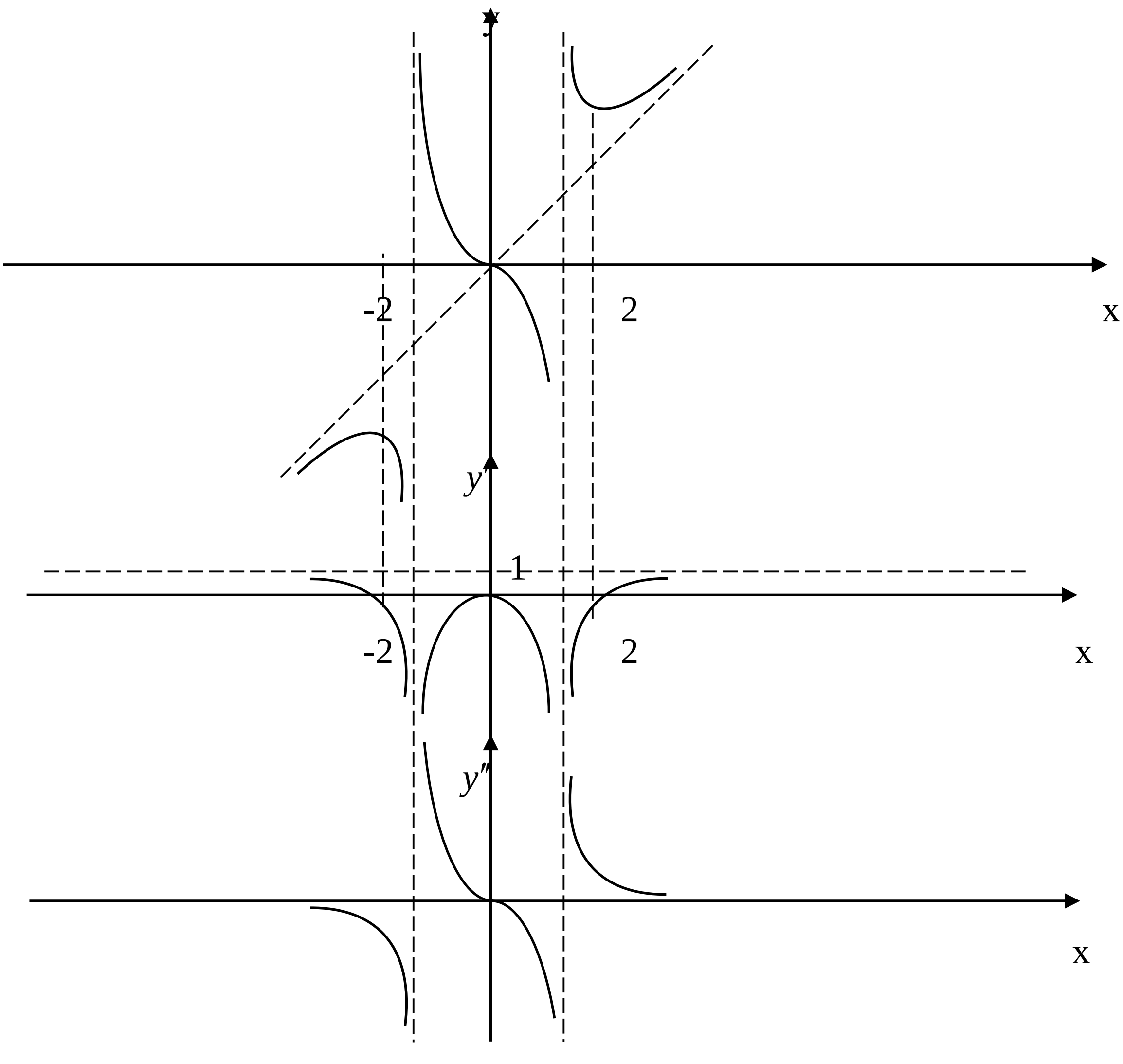


Рис. 13