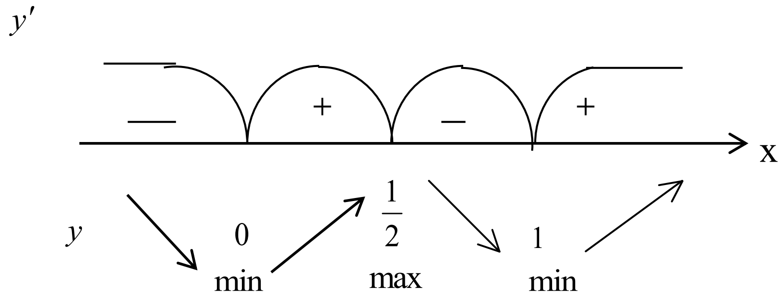
**<u>Задача 3.</u>** Исследовать на экстремум функцию $y = x^2(1-x)^2$.

**Решение.** Найдем точки, подозрительные на экстремум. Для этого возьмем производную $y'$ и приравняем ее нулю.

$$y' = \left(x^2(1-x)^2\right)' = \left(x^2\right)'(1-x)^2 + x^2\left((1-x)^2\right)' = 2x(1-x)^2 + x^2 \cdot 2(1-x)(-1) = 2x(1-x)^2 - 2x^2(1-x)$$
$$= 2x(1-x)[1-x-x] = 2x(1-x)(1-2x) = 2x(x-1)(2x-1)$$




На тех интервалах, где $y' < 0$, функция убывает; где $y' > 0$, функция возрастает. Поэтому интервалы возрастания функции $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ и $(1, \infty)$, интервалы убывания функции $(-\infty, 0)$ и $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$.

По рисунку видно, что в точках $x = 0$ и $x = 1$ функция принимает свои минимальные значения, а при $x = \frac{1}{2}$ - максимальное. Найдем эти значения:

$y_{\min}(0) = 0$, $\quad y_{\min}(1) = 0$,

$$y_{\max}\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{16}.$$

**Ответ:** $y_{\min}(0) = y_{\min}(1) = 0, \quad y_{\max}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{16}$.

## Контрольные варианты к задаче 3.

Исследовать на экстремум:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **1.** | 1) | $y = x^3 - 3x^2 - 9x$; | 2) | $y = x^2 - 2\ln x + 3$. |
| **2.** | 1) | $y = x^3 - 6x^2 + 5$; | 2) | $y = \frac{4}{x} + \frac{x}{16}$. |
| **3.** | 1) | $y = x^3 - 6x^2 + 5$; | 2) | $y = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{x}$. |
| **4.** | 1) | $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x$; | 2) | $y = \frac{1}{x} + x$. |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **5.** | 1) | $y=2x^3+3x^2-36x$; | 2) | $y=x^4-2x^2$. |
| **6.** | 1) | $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2-4x+7$; | 2) | $y=(1+x)\,e^x$. |
| **7.** | 1) | $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{2}x^2-4x+7$; | 2) | $y=\frac{1}{1+x^2}$. |
| **8.** | 1) | $y=2x^3+3x^2-12x$; | 2) | $y=x^2(1-x)$. |
| **9.** | 1) | $y=x^3-3x^2-9x$; | 2) | $y=\frac{x^2-6x+13}{x-3}$. |
| **10.** | 1) | $y=\frac{1}{3}x^3-2x^2+3x+1$; | 2) | $y=\frac{x^2}{x-2}$. |
| **11.** | 1) | $y=\frac{x}{2}+\frac{2}{x}$; | 2) | $y=\frac{3-x^2}{x+2}$. |
| **12.** | 1) | $y=\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{x}$; | 2) | $y=x+\frac{1}{x}$. |
| **13.** | 1) | $y=x^2(x-12)^2$; | 2) | $y=\frac{x^2}{2}+\frac{1}{x}$. |
| **14.** | 1) | $y=17-3x^2+\frac{1}{2}x^4$; | 2) | $y=2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}\right)$. |
| **15.** | 1) | $y=x^2\left(x-2\right)^2$; | 2) | $y=\frac{x^3}{3}+x^2$. |
| **16.** | 1) | $y=\left(x+1\right)^2\cdot\left(x-1\right)^2$; | 2) | $y=x^3+6x^2+9x$. |
| **17.** | 1) | $y=80x-x^5-80$; | 2) | $y=x^2-2\ln x+3$. |
| **18.** | 1) | $y=x^4-4x^3+6x^2-4x+1$; | 2) | $y=\frac{4}{x}+\frac{x}{16}$. |
| **19.** | 1) | $y=x^4-4x^3+6x^2-4x+1$; | 2) | $y=\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{x}$. |
| **20.** | 1) | $y=3x^4-16x^3+24x^2-9$; | 2) | $y=\frac{1}{x}+x$. |
| **21.** | 1) | $y=\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{x}$; | 2) | $y=x^4-2x^2$. |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| **22.** | 1) | $y = x^2(x-12)^2$; | 2) | $y = (1+x)\, e^x$. |
| **23.** | 1) | $y = x^4 - 2x^2 + 6$; | 2) | $y = \dfrac{1}{1+x^2}$. |
| **24.** | 1) | $y = \dfrac{x}{2} + \dfrac{2}{x}$; | 2) | $y = x^2(1-x)$. |
| **25.** | 1) | $y = 80x - x^5 - 80$; | 2) | $y = \dfrac{x^2 - 6x + 13}{x-3}$. |
| **26.** | 1) | $y = \dfrac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + 1$; | 2) | $y = \dfrac{x^2}{x-2}$. |
| **27.** | 1) | $y = 3x^4 - 16x^3 + 24x^2 - 9$; | 2) | $y = \dfrac{3-x^2}{x+2}$. |
| **28.** | 1) | $y = 2x^3 + 3x^2 - 36x$; | 2) | $y = x + \dfrac{1}{x}$. |
| **29.** | 1) | $y = x^4 - 2x^2 + 6$; | 2) | $y = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{1}{x}$. |
| **30.** | 1) | $y = 17 - 3x^2 + \dfrac{1}{2}x^4$; | 2) | $y = 2\left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2}\right)$. |

**Задача 4.** Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ на отрезке $[-2{,}0]$.

**Решение.** Так как свои наименьшее и наибольшее значения непрерывная на отрезке функция может принимать либо на концах этого отрезка, либо в точках экстремума, входящих в этот отрезок, то находим значения исследуемой функции во всех этих точках и среди них выбираем наибольшее и наименьшее значения.

$y(-2) = (-2)^3 - 3(-2)^2 - 9(-2) + 5 = -8 - 12 + 18 + 5 = 3;$

$y(0) = 5;$

$y' = (x^3 - 3x^2 - 9x + 5)' = 3x^2 - 6x - 9 = 3(x^2 - 2x - 3).$

$y' = 0$ при $x^2 - 2x - 3 = 0$;

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4(-3)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2}.$$

$x_1 = 3, \quad x_2 = -1.$

Найдем значение функции только при $x = -1$, так как $3 \notin [-2{,}0]$.

$y(-1) = (-1)^3 - 3(-1)^2 - 9(-1) + 5 = -1 - 3 + 9 + 5 = 10$.

Выбираем наибольшее значение функции из найденных трех чисел; это 10. Теперь наименьшее – это 3.

**Ответ:** $y_{наиб}(-1)=10, \quad y_{наим}(-2)=3.$

**Контрольные варианты к задаче 4.**

Найти наибольшее и наименьшее значения функции:

| | |
|---|---|
| **1.** | $y=x^3-6x^2+9x-2$ на отрезке $[0;\ 4]$. |
| **2.** | $y=x^3-7,5x^2+18x+1$ на отрезке $[0;\ 4]$. |
| **3.** | $y=3x-x^3$ на отрезке $[-2;\ 3]$. |
| **4.** | $y=2x^3-3x^2-36x+40$ отрезке $[1;\ 3]$. |
| **5.** | $y=2x^3-3x^2+1$ на отрезке $[0;\ 2]$ |
| **6.** | $y=2x^3-3x^2-36x+40$ на отрезке $[1;\ 3]$ |
| **7.** | $y=4x^3-15x^2+12x-1$ на отрезке $[0;\ 2]$. |
| **8.** | $y=x^3-12x+7$ на отрезке $[0;\ 3]$. |
| **9.** | $y=x^3-12x+7$ на отрезке $[0;\ 3]$. |
| **10.** | $y=x^3-6x^2+9x-2$ на отрезке $[0;\ 4]$. |
| **11.** | $y=\sin 2x-x$ на отрезке $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$. |
| **12.** | $y=\sin x-2x$ на отрезке $[0;\ \pi]$. |
| **13.** | $y=15+4x^2-x^4$ на отрезке $[-1;\ 2]$. |
| **14.** | $y=2-2x^2+x^4$ на отрезке $[0; 3]$. |
| **15.** | $y=3x-x^3$ на отрезке $[0;\ 3]$. |
| **16.** | $y=(x-1)\cdot\sqrt[3]{x^2}$ на отрезке $[0;\ 2]$. |
| **17.** | $y=72x^5-15x^4-20x^3+1$ на отрезке $[0;\ 1]$. |
| **18.** | $y=x^4-2x^2+5$ на отрезке $[-2;\ 2]$. |
| **19.** | $y=2-2x^2+x^4$ на отрезке $[0; 3]$. |

| | |
|---|---|
| **20.** | $y = \sin 2x - x$ на отрезке $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$. |
| **21.** | $y = (x-1)\cdot\sqrt[3]{x^2}$ на отрезке $[0;\ 2]$. |
| **22.** | $y = x - 2\sqrt{x}$ на отрезке $\left[\frac{1}{9};\ 4\right]$. |
| **23.** | $y = x - 2\sqrt{x}$ на отрезке $\left[\frac{1}{9};\ 4\right]$.. |
| **24.** | $y = \sin x - 2x$ на отрезке $[0;\ \pi]$. |
| **25.** | $.\, y = x^4 - 2x^2 + 5$ на отрезке $[-2;\ 2]$. |
| **26.** | $y = x^3 - 7{,}5x^2 + 18x + 1$ на отрезке $[0;\ 4]$. |
| **27.** | $y = 4x^3 - 15x^2 + 12x - 1$ на отрезке $[0;\ 2]$. |
| **28.** | $y = 72x^5 - 15x^4 - 20x^3 + 1$ на отрезке $[0;\ 1]$. |
| **29.** | $y = 15 + 4x^2 - x^4$ на отрезке $[-1;\ 2]$. |
| **30.** | $y = 3x - x^3$ на отрезке $[-2;\ 3]$. |

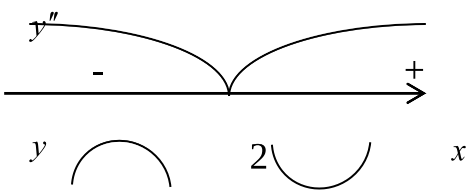
**Задача 5.** Найти точки перегиба функции $y = x \cdot e^{-x}$.

**Решение.** Так как точками перегиба являются те точки из области допустимых значений, где вторая производная $y''$ меняет знак, то сначала найдем $y'$, затем $y''$ и приравняем $y''$ нулю.

$$y' = \left(xe^{-x}\right)' = (x)' e^{-x} + x\left(e^{-x}\right)' = e^{-x} - xe^{-x}$$

$$y'' = (y')' = \left(e^{-x} - xe^{-x}\right)' = -e^{-x} - \left(e^{-x} - xe^{-x}\right) = -2e^{-x} + xe^{-x} = e^{-x}(x-2)$$

$y'' = 0$ при $x = 2$, так как $e^{-x} > 0$ для всех $x$.




Так как в точке $x = 2$ $y''$ изменила знак , то функция сменила выпуклость на вогнутость т.е. $x = 2$ - точка перегиба функции.

**Ответ:** $x = 2$ - точка перегиба.

**Контрольные варианты к задаче 5.**

Найти точки перегиба функции:

| | | |
|---|---|---|
| **1.** $y=\frac{x^3}{6}-x^2.$ | **2.** $y=x^3-6x^2+9x+5.$ | **3.** $y=x^3-6x^2+9x+5.$ |
| **4.** $y=3x^5-5x^4+3x-2.$ | **5.** $y=x^3-6x^2+9x+5.$ | **6.** $y=3x^5-5x^4+3x-2.$ |
| **7.** $y=\frac{x}{x^2-4}.$ | **8.** $y=\frac{1}{x^2+3}.$ | **9.** $y=\frac{x+1}{x^2}.$ |
| **10.** $y=\frac{x}{1+x^2}.$ | **11.** $y=\frac{1}{x}+4x^2.$ | **12.** $y=\frac{4x-12}{(x-2)^2}.$ |
| **13.** $y=\frac{6x}{1+x^2}.$ | **14.** $y=\frac{x^3}{x-1}.$ | **15.** $y=x\,e^x.$ |
| **16.** $y=\frac{x^3}{6}-x^2.$ | **17.** $y=\frac{x}{x^2-1}.$ | **18.** $y=\frac{5x}{2+x^2}.$ |
| **19.** $y=\frac{2x-1}{(x-1)^2}.$ | **20.** $y=\frac{2x-1}{(x-1)^2}.$ | **21.** $y=\frac{x}{x^2-1}.$ |
| **22.** $y=\frac{1}{x}+4x^2.$ | **23.** $y=\frac{1}{x^2+3}.$ | **24.** $y=\frac{x^3}{x-1}.$ |
| **26.** $y=\frac{x}{1+x^2}.$ | **26.** $y=\frac{x}{x^2-4}.$ | **27.** $y=\frac{4x-12}{(x-2)^2}.$ |
| **28.** $y=\frac{6x}{1+x^2}.$ | **29.** $y=\frac{x+1}{x^2}.$ | **30.** $y=\frac{5x}{2+x^2}.$ |

**Задача 6.** Найти асимптоты графика $y=\frac{2x^2}{x+1}$.

Решение: Так как вертикальную асимптоту имеет функция с разрывом 2-го рода в точке $x=x_0$, то сначала найдем точки разрыва и исследуем поведение функции в их окрестностях.

О.Д.З. $x\neq-1.$

Значит, $x=-1$ - точка разрыва, так как функция в этой точке не определена. Найдем предел слева и предел справа функции $y=\frac{2x^2}{x+1}$ при подходе к точке $x=-1$. И выясним, разрыв какого рода терпит данная функция в этой точке.

$$\lim_{\substack{x\to-1-0\\x<-1}}\frac{2x^2}{x+1}=\left|\begin{matrix}x+1\to-0\\ \dfrac{1}{x+1}\to-\infty\end{matrix}\right|=-\infty.$$ Предел слева равен $-\infty$.

$$\lim_{\substack{x\to-1+0\\x>-1}}\frac{2x^2}{x+1}=\left|\begin{matrix}x+1\to+0\\ \dfrac{1}{x+1}\to+\infty\end{matrix}\right|=+\infty.$$ Предел слева равен $+\infty$.

Так как односторонние пределы бесконечны, то в точке $x=-1$ разрыв 2-го рода, поэтому уравнение вертикальной асимптоты $x=-1$.

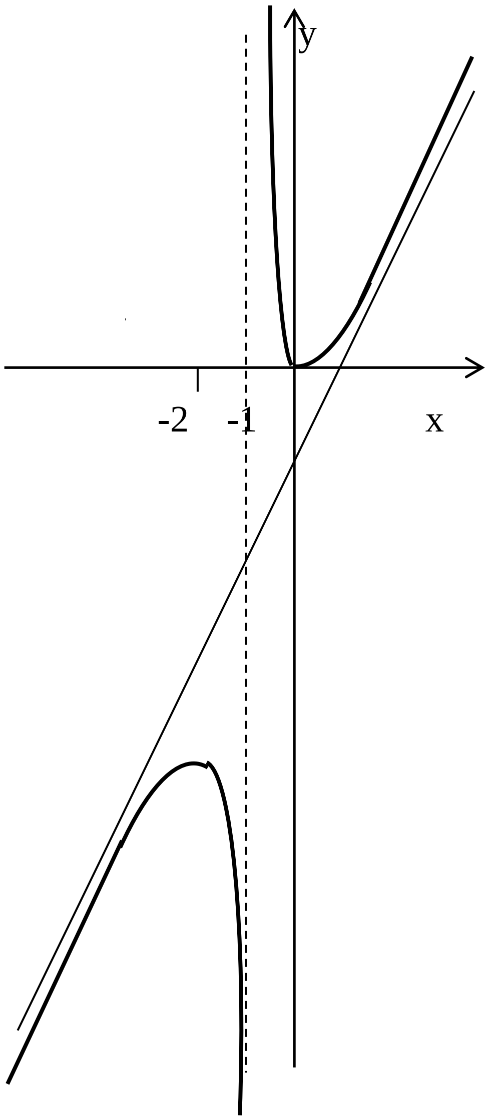
Функция также может иметь или не иметь наклонные асимптоты. Если они есть, то их уравнение $y=kx+b$, где

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x};\quad \mathrm{b}=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right).$$

Найдем правую наклонную асимптоту при $x\to+\infty$.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x^2}{x+1}:\mathrm{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{x+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\left|\begin{matrix}\text{применяем}\\ \text{правило Лопиталя}\end{matrix}\right|=\lim_{x\to\infty}\frac{(2x)'}{(x+1)'}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{1}=$$
$$=2\Rightarrow\quad k=2.$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-kx\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^2}{x+1}-2x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-2x(x+1)}{x+1}=$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2-2x^2-2x}{x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-2x}{x+1}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\left|\begin{matrix}\text{По правилу}\\ \text{Лопиталя}\end{matrix}\right|=\lim_{x\to+\infty}\frac{(-2x)'}{(x+1)'}=-2\Rightarrow\quad b=-2.$$




Подставляем в уравнение асимптоты $y = kx + b$ и получаем уравнение правой асимптоты $y = 2x - 2.$

Найдем левую асимптоту при $x \to -\infty$. Повторяя все предыдущие действия, как и для $x \to +\infty$, получаем уравнение левой асимптоты $y = 2x - 2.$

**Ответ:** Вертикальная асимптота $x = -1$. Наклонная асимптота $y = 2x - 2$.

**Контрольные варианты к задаче 6.**

Найти асимптоты графика функции:

| | | |
|---|---|---|
| **1.** $y = \dfrac{x^2 + 1}{x}.$ | **2.** $y = \dfrac{x^3}{1 - x^2}.$ | **3.** $y = \dfrac{2x^2 - 3x + 5}{5x}.$ |
| **4.** $y = \dfrac{x^2}{x + 4}.$ | **5.** $y = \dfrac{x^4}{x^3 - 1}.$ | **6.** $y = \dfrac{3x^4 + 1}{x^3}.$ |

| | | |
|---|---|---|
| **7.** $y=\frac{x^3}{1-x^2}$. | **8.** $y=\frac{x^2+1}{x}$. | **9.** $y=\frac{x^2-2x+2}{x-1}$. |
| **10.** $y=\frac{2x^2-3x+5}{5x}$. | **11.** $y=\frac{2x-1}{(x-1)^2}$. | **12.** $y=\frac{(x-1)^2}{(x+1)^3}$. |
| **13.** $y=\frac{x^3+2x^2+7x-3}{2x^2}$. | **14.** $y=\frac{16}{x^2(x-4)}$. | **15.** $y=\frac{1}{1-x^2}$. |
| **16.** $y=\frac{x^2}{x^2-1}$. | | |
| **17.** $y=\frac{1}{x^2-4x+5}$. | **18.** $y=\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$. | **19.** $y=\frac{x^3}{2(x+1)^2}$. |
| **20.** $y=\frac{x^2}{x+4}$. | **21.** $y=\frac{1}{x^2-4x+5}$. | **22.** $y=\frac{1}{1-x^2}$. |
| **23.** $y=\frac{1}{(x-1)(x-2)(x-3)}$. | **24.** $y=\frac{2x-1}{(x-1)^2}$. | **25.** $y=\frac{x^2}{x^2-1}$. |
| **26.** $y=\frac{x^3}{2(x+1)^2}$. | **27.** $y=\frac{x^4}{x^3-1}$. | **28.** $y=\frac{(x-1)^2}{(x+1)^3}$. |
| **29.** $y=\frac{x^3+2x^2+7x-3}{2x^2}$. | **30.** $y=\frac{16}{x^2(x-4)}$. | |

**Задача 7.** Исследовать функцию и построить ее график $y=\frac{x^3}{2(x^2+1)}$.

**Решение.**

Исследование функции будем проводить по плану.

1. Найдем О.Д.З. и, если есть асимптоты О.Д.З. , $x-$ любое. Следовательно, нет

точек разрыва, поэтому вертикальных асимптот нет.

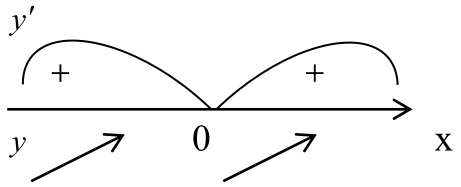
2. Найдем точки пересечения графика функции с осями координат, исследуем функцию на четность, тригонометрические функции - на периодичность. Пусть $x=0$, тогда $y=0$. Точка (0,0). Проверим четность функции.

$y(-x)=\dfrac{(-x)^3}{2\left((-x)^2+1\right)}=\dfrac{-x^3}{2(x^2+1)}=-y(x)$. Значит, наша функция нечетная, и ее график симметричен относительно начала координат.

3. Исследуем монотонность функции с помощью $y'$.

$$y'=\left(\frac{x^3}{2(x^2+1)}\right)'=\frac{1}{2}\cdot\frac{3x^2(x^2+1)-2x\cdot x^3}{(x^2+1)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3x^4+3x^2-2x^4}{(x^2+1)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2(x^2+3)}{(x^2+1)^2}$$

$y'=0$ при $x=0$




Получаем, что функция $y=\dfrac{x^3}{2(x^2+1)}$ всюду возрастающая, не имеющая точек экстремума, так как нет ни одной точки, в $y'$ равен нулю или бесконечности.

4. С помощью $y''$ находим точки перегиба

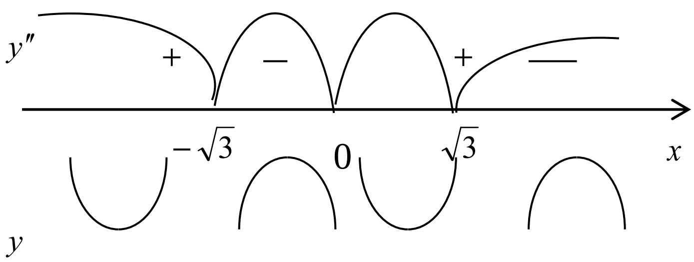
$$y''=(y')'=\frac{1}{2}\left(\frac{x^4+3x^2}{(x^2+1)^2}\right)'=\frac{1}{2}\frac{(4x^3+6x)(x^2+1)^2-2(x^2+1)2x(x^4+3x^2)}{(x^2+1)^4}=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{2x(2x^2+3)(x^2+1)^2-2x(x^2+1)(2x^4+6x^2)}{(x^2+1)^4}=$$

$$=\frac{2x(x^2+1)}{2}\frac{(2x^2+3)(x^2+1)-(2x^4+6x^2)}{(x^2+1)^4}=$$

$$=x\frac{2x^4+3x^2+2x^2+3-2x^4-6x^2}{(x^2+1)^3}=x\frac{3-x^2}{(x^2+1)^3}.$$

$y''=0$ при $x=0$ и $3-x^2=0\Rightarrow x^2=3\Rightarrow x=\pm\sqrt{3}$.




Все точки, в которых $y''=0$, являются точками перегиба, так как в них $y''$ меняет знак на противоположный.

Найдем значения функции в этих точках :

$$y\left(-\sqrt{3}\right)=\frac{\left(-\sqrt{3}\right)^3}{2\left((-\sqrt{3})^2+1\right)}=\frac{-3\sqrt{3}}{2\cdot 4}\approx -0{,}65,\; y(0)=0,\; y\left(\sqrt{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{8}\approx +0{,}65\ .$$

5. Найдем наклонные асимптоты, если они есть $y = kx + b$.

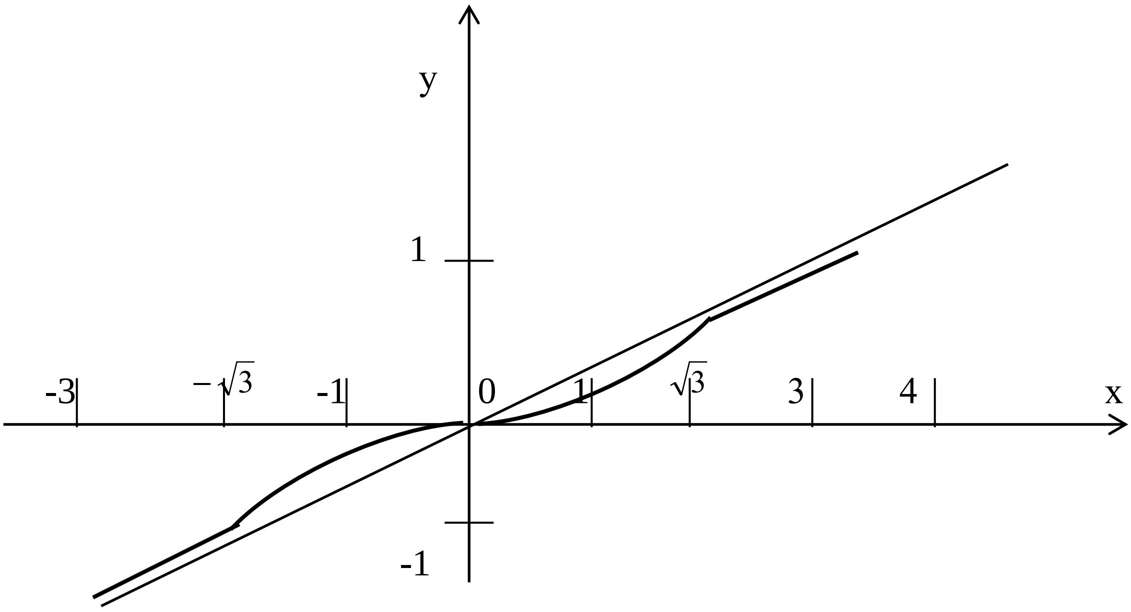
Сначала $x \to +\infty$, тогда $k = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2}{2(x^2+1)} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \left|\begin{matrix}\text{по правилу}\\ \text{Лопиталя}\end{matrix}\right| =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(x^2)'}{2(x^2+1)'} = \frac{1}{2}\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2x}{2x} = \frac{1}{2} \Rightarrow k = \frac{1}{2}$. Теперь найдем $b = \lim\limits_{x\to\infty}\big(f(x) - k(x)\big) =$

$= \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{2(x^2+1)} - \frac{{}^{x^2+1}x}{2}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^3 - x^3 - x}{2(x^2+1)} = -\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(x)'}{(x^2+1)'} = -\frac{1}{2}\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{2x} = 0 \Rightarrow \mathrm{b} = 0.$

Получаем $y = \frac{x}{2}$ - уравнение правой асимптоты. Повторяя прежние рассуждения, уже при $x \to -\infty$ получим уравнение левой асимптоты $y = \frac{x}{2}$.

6. Теперь строим график функции, начертив сначала все асимптоты, отметив точки экстремума, точки перегиба и точки пересечения с осями координат.




**Контрольные варианты к задаче 7.**

Исследовать функцию и построить ее график:

| | | | |
|---|---|---|---|
| **1.** $y = \frac{x^3}{x^2 - 3}$. | **2.** $y = x^3 - 3x$. | **3.** $y = \frac{3x}{4 + x^2}$. | **4.** $y = \frac{1}{1 - x^2}$. |
| **5.** $y = \frac{x}{x^2 - 1}$. | **6.** $y = \frac{x^3}{2(x+1)^2}$. | **7.** $y = \frac{x^2}{x^2 - 1}$. | **8.** $y = \frac{3x^4 + 1}{x^3}$. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **9.** $y=\dfrac{3x^4+1}{x^3}.$ | **10.** $y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}.$ | **11.** $y=\dfrac{1}{x^2+3}.$ | **12.** $y=\dfrac{x}{x^2-4}.$ |
| **13.** $y=\dfrac{x^3}{3-x^2}.$ | **14.** $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}.$ | **15.** $y=\dfrac{8}{x^2-4}.$ | **16.** $y=\dfrac{4x-12}{(x-2)^2}.$ |
| **17.** $y=\dfrac{x^3}{x^2-3}.$ | **18.** $y=x^3-3x.$ | **19.** $y=\dfrac{3x}{4+x^2}.$ | **20.** $y=\dfrac{1}{1-x^2}.$ |
| **21.** $y=\dfrac{x}{x^2-1}.$ | **22.** $y=x\,e^{-x}.$ | **23.** $y=\dfrac{x^2}{x^2-1}.$ | **24.** $y=\dfrac{x^3}{x-1}.$ |
| **25.** $y=\dfrac{x^3}{3-x^2}.$ | **26.** $y=x\,e^{-x}.$ | **27.** $y=\dfrac{1}{x^2+3}.$ | **28.** $y=\dfrac{x}{x^2-4}.$ |
| **29.** $y=\dfrac{x^3}{x-1}.$ | **30.** $y=\dfrac{x^2-2x+2}{x-1}.$ | | |