ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Основные понятия

1. Определение функции двух переменных $z = f(x,\ y)$, или $F(x,\ y,\ z) = 0$.
2. Способы ее задания: аналитический, табличный, явный, неявный.
3. Область определения и область изменения функции $z = f(x, y)$. Классификация областей определения: открытая и замкнутая, ограниченная и неограниченная.
4. Геометрический смысл функции $z = f(x,\ y)$, или $F(x,\ y,\ z) = 0$.

Задача 1. Найти область определения функции $z = \arcsin\frac{x}{2} + \sqrt{x\,y}$.

Решение. Функция **z** представляет собой сумму двух слагаемых функций: $z_1 = \arcsin\frac{x}{2}$ и $z_2 = \sqrt{x\,y}$. Найдем области их определения:

$$z_1 = \arcsin\frac{x}{2}, \qquad z_2 = \sqrt{x\,y},$$

$$D_1: \quad -1 \le \frac{x}{2} \le 1, \qquad -2 \le x \le 2.$$

$$D_2: \quad x \cdot y \ge 0, \qquad 1)\ x \ge 0,\ y \ge 0 \quad \text{или} \quad 2)\ x \le 0,\ y \le 0.$$

Очевидно, область определения функции **z** есть пересечение областей определения z_1 и z_2, т. е. $D = D_1 \cap D_2$ (рис. 1).

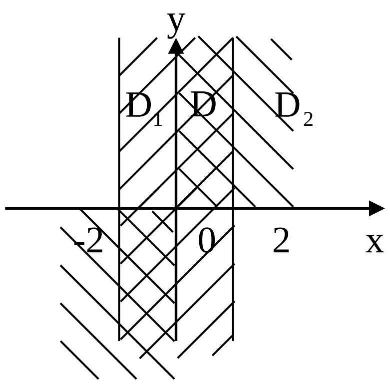


Рис. 1

Ответ: D – область, отмеченная двойной штриховкой, замкнутая и неограниченная.

Задача 2. Найти область определения функции $z = \ln\left(4 + 4x - y^2\right)$.

Решение. **z** – логарифмическая функция, поэтому $4 + 4x - y^2 > 0$, или $4+4x>y^2$.

Уравнение границы области D:

$y^2=4+4x$ (L),

$y^2=4(x+1)$ − парабола с вершиной $C(-1, 0)$. Парабола разбивает всю плоскость на две части: внутреннюю и внешнюю по отношению к параболе. Возьмем для контроля любую точку плоскости, например, O(0, 0), подставим

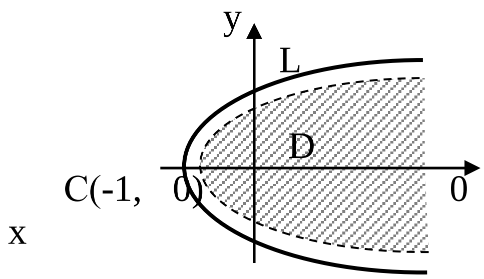


Рис. 2

ее координаты в первое неравенство: $4+4\cdot 0-0>0, \Rightarrow$ $O(0,0)\in D$; где **D** – область определения функции, открытая, неограниченная (рис.2).

Дифференцирование функций нескольких переменных

Частные производные функции $z=f(x, y)$

а) первого порядка: $z'_x=\dfrac{\partial z}{\partial x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}$,

где $\Delta_x z=f(x+\Delta x, y)-f(x, y)$ - частное приращение **z** по **x**.

$$z'_y=\frac{\partial z}{\partial y}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta_y z}{\Delta_y},$$

где $\Delta_y z=f(x, y+\Delta y)-f(x, y)$ - частное приращение **z** по **y**.

б) второго порядка: $z''_{xx}=\left(\dfrac{\partial z}{\partial x}\right)'_x=\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$ - вторая производная функции **z** по переменной **x**, т. е. частная производная по переменной **x**, взятая от частной производной первого порядка по переменной **x**.

$$z''_{xy}=\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)'_y=\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$$ - смешанная производная **z** по **x** и по **y**;

$$z''_{yx}=\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)'_x=\frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$$ - смешанная производная **z** по **y** и по **x**.

Можно показать, что порядок дифференцирования безразличен, т. е. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}=\dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$;

$z''_{yy} = \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)'_y = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ - вторая производная функции **z** по переменной **y**.

Правило. Отыскивая частные производные функции нескольких переменных по одной из переменных, пользуемся правилами и формулами дифференцирования, считая в этот момент все остальные переменные постоянными.

Задача 3. Найти частные производные первого порядка следующих функций:

а) $z = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\left(\frac{x}{y}\right)'_x}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} = \frac{\frac{1}{y}}{1+\frac{x^2}{y^2}} = \frac{y}{x^2+y^2},$$

отыскивая $\frac{\partial z}{\partial x}$, переменную **y** считаем постоянной.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\left(\frac{x}{y}\right)'_y}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} = \frac{-\frac{x}{y^2}}{1+\frac{x^2}{y^2}} = -\frac{x}{x^2+y^2},$$

отыскивая $\frac{\partial z}{\partial y}$, переменную **x** считаем постоянной.

б) $z = x e^{xy} - \ln(xt) + \cos(yt)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{xy} + x \cdot y \cdot e^{xy} - \frac{t}{xt} = e^{xy} + xye^{xy} - \frac{1}{x};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \cdot e^{xy} - t\sin(yt);$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = -\frac{x}{xt} - y\sin(yt) = -\frac{1}{t} - y\sin(yt).$$

Задача 4. Доказать следующие тождества:

а) $\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = 1$, если $z = \ln\left(e^x + e^y\right)$.

Решение. Найдем $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ данной функции и подставим их в равенство, которое надо доказать:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{e^x}{e^x + e^y}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{e^y}{e^x + e^y} \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{e^x}{e^x + e^y} + \frac{e^y}{e^x + e^y} = 1,$$

что и требовалось доказать.

б) $\dfrac{x}{y} \cdot \dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{1}{\ln x} \cdot \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2z$, если $z = x^y$;

$\dfrac{\partial z}{\partial x} = \left(x^y\right)_x' = y \cdot x^{y-1}$ (степенная функция);

$\dfrac{\partial z}{\partial y} = \left(x^y\right)_y' = x^y \ln x$ (показательная функция).

Подставим $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ в равенство:

$$\frac{x}{\cancel{y}} \cdot \cancel{y} \cdot \cancel{x^{y-1}} + \frac{1}{\cancel{\ln x}} \cdot x^y \cdot \cancel{\ln x} = 2 \cdot x^y,$$

$$2x^y \equiv 2x^y, \text{ что и требовалось доказать.}$$

Геометрический смысл частных производных первого порядка

Задача 5. Через точку $M_0(1, e)$ поверхности $z = \left(1 + \log_y x\right)^3$ проведены плоскости, параллельные координатным плоскостям **XOZ** и **YOZ**. Определить углы, которые образуют с осями координат **OX** и **OY** касательные к получившимся сечениям, проведенные в их общей точке $M_0(1, e)$ (рис. 3).

Решение. Геометрический смысл частных производных первого порядка $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ функции $z = f(x, y)$ состоит в том, что частные значения этих частных производных, вычисленные в точке касания, определяют тангенсы углов наклона к соответствующим осям касательных к образовавшимся сечениям, проведенных в точке касания $M_0\left(x_0, y_0\right)$ – это тангенсы углов наклона к соответствующим осям касательных в этой точке к кривым, которые образуются при пересечении поверхности $z = f(x, y)$ плоскостями $x = x_0$ и $y = y_0$, т. е.

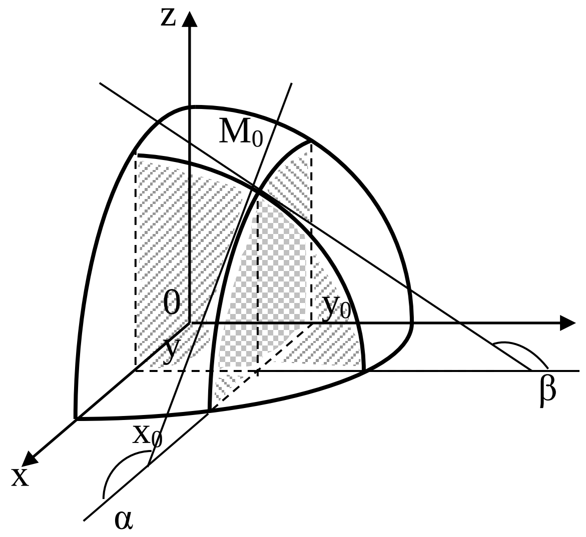


Рис. 3

с осью OX: $\angle\alpha = \operatorname{arctg}\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0}$;

с осью OY: $\angle\beta = \operatorname{arctg}\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0}$;

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0} = \operatorname{tg}\alpha; \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0} = \operatorname{tg}\beta.$$

Для отыскания производных данной функции преобразуем ее, используя формулу:

$$\log_y x = \frac{\ln x}{\ln y}, \text{ т.е. } z = \left(1 + \frac{\ln x}{\ln y}\right)^3.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3\left(1 + \frac{\ln x}{\ln y}\right)^2 \cdot \frac{1}{\ln y} \cdot \frac{1}{x}; \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0(1,e)} = 3\left(1 + \frac{\ln 1}{\ln e}\right)^2 \cdot \frac{1}{\ln e} \cdot \frac{1}{1} = 3;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 3\left(1 + \frac{\ln x}{\ln y}\right)^2 \cdot \ln x \cdot \left(-\frac{1}{y \ln^2 y}\right);$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0(1,e)} = 3\left(1 + \frac{\ln 1}{\ln e}\right)^2 \cdot \ln 1 \cdot \left(-\frac{1}{e \ln^2 e}\right) = 0.$$

Ответ: $\alpha = \operatorname{arctg} 3;\ \beta = \operatorname{arctg} 0 = 0$.

Задача 6. Найти частные производные второго порядка функции $z = x^2 y + y^3$.

Решение. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 2xy$, $\qquad \dfrac{\partial z}{\partial y} = x^2 + 3y^2$,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 2y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = 2x, \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y.$$

Заметим, что $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$.

Задача 7. Найти $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$ и $\frac{\partial^3 u}{\partial y \partial z \partial x}$, если $u = e^{xy} \cdot \sin z$.

Решение. Вначале найдем $\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z}$.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y e^{xy} \sin z; \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial y} = e^{xy} \sin z + y \, x \, e^{xy} \sin z = e^{xy} (1 + x \, y) \sin z;$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = e^{xy} (1 + xy) \cos z.$$

Теперь найдем $\frac{\partial^3 u}{\partial y \partial z \partial x}$.

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x \, e^{xy} \sin z; \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y \, \partial z} = x \, e^{xy} \cos z;$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y \partial z \partial x} = e^{xy} \cos z + y \, x \, e^{xy} \cos z = e^{xy} (1 + x \, y) \cos z.$$

Сравнив ответы, убеждаемся в том, что частные производные смешанного типа не зависят от порядка дифференцирования.

Задача 8. Дана функция $z = x e^y + y e^x$. Доказать, что эта функция удовлетворяет уравнению $\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = x \cdot \frac{\partial^3 z}{\partial x \, \partial y^2} + y \cdot \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \, \partial y}$.

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^y + y e^x \qquad\qquad \frac{\partial z}{\partial y} = x e^y + e^x$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y e^x \qquad\qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x e^y$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3} = y e^x \qquad\qquad \frac{\partial^3 z}{\partial y^3} = x e^y$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \, \partial y} = e^x \qquad\qquad \frac{\partial^3 z}{\partial y^2 \, \partial x} = e^y.$$

Подставим в уравнение найденные значения производных:

$$y \, e^x + x \, e^y \equiv x \, e^y + y \, e^x,$$

что и требовалось доказать.

Производная сложной функции

а) Если $z = f(u, v)$, где $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$, то $z = f\left[u(x, y), v(x, y)\right]$ - сложная функция <u>двух</u> переменных **x** и **y**, тогда

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}; \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}.$$

б) Если $z = f(u, v)$, где $u = u(x)$, $v = v(x)$, то $z = f\left[u(x), v(x)\right]$ - сложная функция <u>одной</u> переменной **x**, тогда

$\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{\partial z}{\partial u} \cdot \dfrac{du}{dx} + \dfrac{\partial z}{\partial v} \cdot \dfrac{dv}{dx}$ - полная производная сложной функции одной независимой переменной **x**.

в) Если $z = f(x, u, v)$, где $u = u(x)$, $v = v(x)$, то $z = f\left[x, u(x), v(x)\right]$ - сложная функция одной переменной **x** и

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dx}.$$

Задача 9. Дана функция $z = u \sin v + v \cos u$, где $u = \dfrac{x}{y}$, $v = x \cdot y$, т. е. $z = f(x, y)$ – сложная функция двух переменных **x** и **y**, где **u** и **v** - промежуточные аргумен-
ты. Найти $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial z}{\partial y}$.

Решение. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\partial z}{\partial u} \cdot \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial v} \cdot \dfrac{\partial v}{\partial x} = (\sin v - v \sin u) \cdot \dfrac{1}{y} + (u \cos v + \cos u) \cdot y;$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = (\sin v - v \sin u) \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) + (u \cos v + \cos u) \cdot x.$$

Задача 10. Дана функция $u = x^2 \cdot y^2 \cdot z$, где $x = t$, $y = t^2$, $z = \sin t$. Найти $\dfrac{du}{dt}$.

Решение. Очевидно, что **u** – сложная функция одной независимой перемен-
ной **t**, а **x**, **y** и **z** – промежуточные аргументы, т. е. существует $\dfrac{du}{dt}$ - полная производная сложной функции одной переменной.

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt} = 2x\cdot y^2\cdot z\cdot 1 + x^2\cdot 2y\cdot z\cdot 2t + x^2\cdot y^2\cdot 1\cdot\cos t =$$

$$= 2x\, y^2\, z + 4x^2\, y\, z\, t + x^2\, y^2 \cos t.$$

Задача 11. Найти $\dfrac{dz}{dx}$, если $z = \arcsin\dfrac{x}{y}$, где $y = \sqrt{x^2+1}$.

Решение. $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{\partial z}{\partial x}\cdot\dfrac{dx}{dx} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y}\cdot\dfrac{dy}{dx} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{y^2}}}\cdot\frac{1}{y} + \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{y^2}}}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{y^2-x^2}} - \frac{x}{\sqrt{y^2-x^2}}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{x^2+1}, \text{ если } y = \sqrt{x^2+1}.$$

Сравните: $\dfrac{dz}{dx} \neq \dfrac{\partial z}{\partial x}$, т.к. $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{x^2}{y^2}}}\cdot\dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{\sqrt{y^2-x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1-x^2}} = 1.$

Производная функции, заданной неявно

а) Если $F(x, y) = 0$, то **y** – функция одной переменной **x**, заданная неявно.

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{F_x'}{F_y'}.$$

б) Если $F(x,y,z)=0$, то **z** – функция двух независимых переменных, заданная неявно.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{F'_x}{F'_z}; \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}=-\frac{F'_y}{F'_z}.$$

Задача 12. Дано: $2\sin(x+2y-3z)=x+2y-3z$. Доказать, что $\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial y}=1$.

Решение. Данное уравнение задает неявно функцию **z**, зависящую от переменных **x** и **y**. Запишем данное уравнение в виде $F(x,y,z)=0$. $2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z=0$. Очевидно, что

$$F(x,y,z)=2\sin(x+2y-3z)-x-2y+3z.$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}=-\frac{2\cos(x+2y-3z)-1}{2\cos(x+2y-3z)(-3)+3}=\frac{-[2\cos(x+2y-3z)-1]}{-3[2\cos(x+2y-3z)-1]}=\frac{1}{3};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_z}=-\frac{2\cos(x+2y-3z)\cdot 2-2}{2\cos(x+2y-3z)(-3)+3}=\frac{-2[2\cos(x+2y-3z)-1]}{-3[2\cos(x+2y-3z)-1]}=\frac{2}{3}.$$

Очевидно: $\frac{1}{3}+\frac{2}{3}=1$, что и требовалось доказать.

Приложения производных функции $z=f(x,y)$

Полный дифференциал функции двух переменных и его приложение в приближенных вычислениях

Если $z=f(x,y)$, то $dz=df(x,y)=\frac{\partial z}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial z}{\partial y}\Delta y$ – полный дифференциал $z=f(x,y)$. Так как полное приращение функции $\Delta z\approx dz$, то

$$f(x+\Delta x,\ y+\Delta y)=f(x,y)+\Delta z\approx f(x,y)+dz.$$

Задача 13. Найти полный дифференциал du функции $u=tg(3x-y)+6^{y+z}$.

Решение. Воспользуемся формулой $du = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z$ или, что то же самое, $du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$.

$$du = \sec^2(3x - y)\cdot 3\cdot dx + \left[\sec^2(3x-y)(-1) + 6^{y+z}\ln 6\right]dy + 6^{y+z}\cdot(\ln 6)\cdot dz =$$

$$= 3\sec^2(3x-y)dx + \left[6^{y+z}\ \ln 6 - \sec^2(3x-y)\right]dy + 6^{y+z}(\ln 6)dz.$$

Задача 14. Высота конуса H=60 см, радиус основания R=20 см. Как изменится объем конуса, если высоту увеличить на 3 мм, а радиус основания уменьшить
на 1 мм?

Решение. Изменение объема конуса, т. е. приращение Δv, можно заменить его полным дифференциалом dv: $\Delta v \approx dv$, $v_{конуса} = \frac{1}{3}\pi R^2 H$.

Дано: R = 20 см, ΔR = -0,1 см, H = 60 см, ΔH = 0,3 см.

$$\Delta v \approx dv = \frac{\partial v}{\partial R}\Delta R + \frac{\partial v}{\partial H}\Delta H = \frac{1}{3}\pi\left[2R\,H\,\Delta R + R^2\,\Delta H\right] = \frac{1}{3}\pi R\left[2H\,\Delta R + R\,\Delta H\right] =$$

$$= \frac{20\pi}{3}\left[2\cdot 60\cdot(-0{,}1) + 20\cdot 0{,}3\right] = \frac{20\pi}{3}\left[-12+6\right] \approx \frac{20\cdot\cancel{3}}{\cancel{3}}\cdot(-6) = -120\ см^3 < 0.$$

Ответ: Объем конуса уменьшится приблизительно на 120 $см^3$.

Задача 15. Вычислить приближенно с помощью полного дифференциала $\sqrt{(4{,}05)^2 + (2{,}93)^2}$.

Решение. Воспользуемся функцией $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ и формулой

$$f(x + \Delta x,\ y + \Delta y) = f(x, y) + \Delta f(x, y) \approx f(x, y) + df(x, y).$$

Положив $x = 4;\ \Delta x = 0{,}05;\ y = 3;\ \Delta y = -0{,}07$, найдем

$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y = \frac{x\cdot\Delta x}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{y\cdot\Delta y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Вычислим $df(x, y)$ в условиях задачи:

$$df(x,\,y)=\frac{4\cdot 0{,}05}{\sqrt{4^2+3^2}}+\frac{3\cdot(-0{,}07)}{\sqrt{4^2+3^2}}=\frac{0{,}2-0{,}21}{5}=-\frac{0{,}01}{5}=-0{,}002\,.$$

Итак,

$$\sqrt{(4{,}05)^2+(2{,}93)^2}=\sqrt{(4+0{,}05)^2+(3-0{,}07)^2}\approx\sqrt{4^2+3^2}-0{,}002=$$
$$5-0{,}002=4{,}998.$$

Экстремумы функции $z=f(x,\,y)$
(максимум и минимум $z=f(x,\,y)$**)**

а) Необходимые условия: если в точке $M_0(x_0,\,y)$ функция имеет экстремум, то $\frac{\partial z}{\partial x}=0;\ \frac{\partial z}{\partial y}=0$ в этой точке. $M_0(x_0,\,y_0)$ – критическая (стационарная) точка.

б) Достаточные условия: если $M_0(x_0,\,y_0)$ – критическая точка и

$\Delta=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\right)^2>0$ в этой точке, то $M_0(x_0,\,y_0)$ – точка экстремума. Причем, если $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}<0$, то $M_0(x_0,\,y_0)$ – точка максимума, если $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}>0$, то $M_0(x_0,\,y_0)$ – точка минимума. Чтобы найти экстремум, надо вычислить $z=f(x_0,\,y_0)$.

Задача 16. Найти минимум и максимум функции $z=x^4+y^4-2x^2+4xy-2y^2$.

Решение. Найдем стационарные точки, в которых $\frac{\partial z}{\partial x}=0$ и $\frac{\partial z}{\partial y}=0$ (необходимые условия экстремума):

$$\begin{cases}\frac{\partial z}{\partial x}=4x^3-4x+4y\\ \frac{\partial z}{\partial y}=4y^3+4x-4y\end{cases}.$$

Решим систему уравнений

$$+\begin{cases} x^3 - x + y = 0 \\ y^3 + x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow x^3 + y^3 = 0 \Rightarrow x = -y.$$

$$x^3 - 2x = 0$$
$$x\left(x^2 - 2\right) = 0$$
$$x_1 = -\sqrt{2};\; x_2 = 0;\quad x_3 = \sqrt{2}.$$

Найдены три стационарные точки: $M_1\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$, $M_2(0, 0)$, $M_3\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$. Исследуем их на экстремум с помощью достаточных условий:

$$\Delta = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}\right)^2 > 0;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 12x^2 - 4, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 12y^2 - 4, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = 4;$$

$$\Delta = \left(12x^2 - 4\right)\left(12y^2 - 4\right) - 4^2.$$

1) $M_1\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$; $\Delta_1\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) = 400 - 16 > 0$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = 4 > 0$,

отсюда следует, что в точке M_1 функция **z** имеет минимум

$$z_{\min}\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right) = \left(-\sqrt{2}\right)^4 + \left(\sqrt{2}\right)^4 - 2\left(-\sqrt{2}\right)^2 + 4\left(-\sqrt{2}\right)\sqrt{2} - 2\left(-\sqrt{2}\right)^2 = -8.$$

2) $M_2(0,0)$; $\Delta_2(0, 0) = 0$ – неизвестно, есть ли экстремум.

3) $M_3\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$; $\Delta_3\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right) > 0$, $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = 4 > 0$,

отсюда следует, что в точке M_3 функция **z** имеет минимум, $z_{\min}\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right) = -8$.

Ответ: Данная функция имеет минимум $\left(z_{\min} = -8\right)$ в двух симметричных точках $M_1\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right)$ и $M_2\left(\sqrt{2}, -\sqrt{2}\right)$, скорее всего в точке $O(0, 0, 0)$ у нее максимум $\left(z_{\max} = 0\right)$.

Наибольшее и наименьшее значения функции $z = f(x, y)$ в замкнутой области D

Правило. Чтобы найти **M** – наибольшее и **m** – наименьшее значения функции $z=f(x,y)$ в замкнутой области **D**, находят критические точки этой функции. Если эти точки принадлежат области **D**, то в них следует вычислить значения $z=f(x,y)$. Затем, используя уравнения границы **L** области **D**, нужно найти критические точки $z=f(x,y)$, принадлежащие **L**, вычислить в них значения $z=f(x,y)$. Вычислить значения $z=f(x,y)$ на концах **L**. Осталось из всех найденных значений данной функции $z=f(x,y)$ выбрать самое большое **M** и самое малое **m**.

Задача 17. Найти наибольшее **M** и наименьшее **m** значения функции $z=x^3+y^3-3xy$ в прямоугольнике $0\le x\le 2,\ -1\le y\le 2$.

Решение. Найдем критические точки функции **z**, которые принадлежат заданной области (рис. 4).

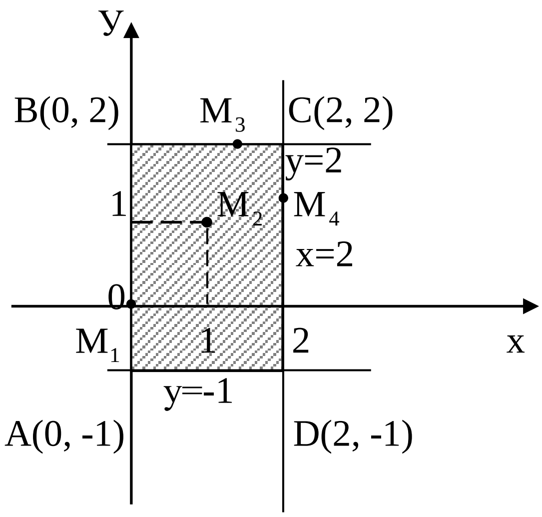


Рис. 4

$$z'_x=3x^2-3y$$
$$z'_y=3y^2-3x$$

Решим систему уравнений

$$\begin{cases} z'_x=0 \\ z'_y=0, \end{cases} \text{ т.е. } \begin{cases} 3x^2-3y=0 \\ 3y^2-3x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2=y \\ y^2=x, \end{cases}$$

подставим $y=x^2$ во второе уравнение: $x^4=x$, т. е. $x^4-x=0,\ x\left(x^3-1\right)=0,$

$x_1=0,\ y_1=0,\ x_2=1,\ y_2=1.$

Таким образом, решений у системы два: $\{0,\ 0\}$ и $\{1,\ 1\}$. Первому решению соответствует точка $M_1(0,\ 0)$, которая принадлежит границе области. Второму решению соответствует критическая точка $M_2(1,\ 1)$, которая принадлежит области, поэтому вычислим значения функции в ней: $z(1,\ 1)=1^3+1^3-3\cdot1\cdot1=-1,\quad \underline{z(1,\ 1)=-1}.$

Исследуем функцию **z** на границе области (прямоугольник ABCD), которая состоит из четырех звеньев:

1. **AB**: $x=0,\ -1\le y\le 2,$ где $z=y^3$. Найдем $z'=3y^2;\ z'=0\ \Rightarrow\ y=0$. Получаем критическую точку $M_1(0,\ 0)$, вычислим функцию в этой точке: $\underline{z(0,\ 0)=0}$.

2. **BC**: $y = 2,\ 0 \le x \le 2$, где $z = x^3 + 2^3 - 3x \cdot 2$ или $z = x^3 + 8 - 6x$. Найдем произ-водную этой функции: $z' = 3x^2 - 6;\ z' = 0 \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2} \in BC$, корень уравнения $x = -\sqrt{2} \notin BC$, поэтому критическая точка $M_3\left(\sqrt{2},\ 2\right) \in BC$. Вычислим значение функции в ней: $z\left(\sqrt{2},\ 2\right) = \left(\sqrt{2}\right)^3 + 2^3 - 3 \cdot \sqrt{2} \cdot 2 = 2\sqrt{2} + 8 - 6\sqrt{2} = 8 - 4\sqrt{2} \approx 2{,}4.$
$\underline{z\left(\sqrt{2},\ 2\right) \approx 2{,}4}.$

3. **CD**: $x = 2,\ -1 \le y \le 2$, где $z = 2^3 + y^3 - 3 \cdot 2 \cdot y = 8 + y^3 - 6y$. Найдем $z' = 3y^2 - 6,\ z' = 0 \Rightarrow y^2 = 2 \Rightarrow y = \sqrt{2} \in CD$, а $y = -\sqrt{2} \notin CD$. Поэтому критическая точка $M_4\left(2,\ \sqrt{2}\right) \in CD$. Вычислим в ней значение функции: $z\left(2, \sqrt{2}\right) = 2^3 + \left(\sqrt{2}\right)^3 - 3 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} = 8 - 4\sqrt{2} \approx 2{,}4.$ $\underline{z\left(2,\ \sqrt{2}\right) \approx 2{,}4}.$

4. **AD**: $y = -1,\ 0 \le x \le 2$, где $z = x^3 + \left(-1\right)^3 - 3x\left(-1\right)$ или $z = x^3 - 1 + 3x$. Найдем производную этой функции:
$z' = 3x^2 + 3,\ z' = 0 \Rightarrow$ уравнение $x^2 = -1$, действительных корней не имеет.

5. Осталось вычислить значения функции $z = x^3 + y^3 - 3xy$ на концах каждого из отрезков, являющихся сторонами прямоугольника: **AB**, **BC**, **CD**, **AD**, т. Е. в вершинах прямоугольника $A(0,\ -1), B(0,\ 2), C(2,\ 2), D(2,\ -1)$.

$z(A) = z(0, -1) = 0^3 + \left(-1\right)^3 - 3 \cdot 0 \cdot \left(-1\right) = -1,$ $\underline{z(A) = -1},$

$z(B) = z(0, 2) = 0^3 + 2^3 - 3 \cdot 0 \cdot 2 = 8,$ $\underline{z(B) = 8},$

$z(C) = z(2, 2) = 2^3 + 2^3 - 3 \cdot 2 \cdot 2 = 4,$ $\underline{z(C) = 4},$

$z(D) = z(2, -1) = 2^3 + (-1)^3 - 3 \cdot 2 \cdot (-1) = 8 - 1 + 6 = 13,$ $\underline{z(D) = 13}.$

Сравнив все подчеркнутые значения функции **z** (только они представляют интерес), делаем вывод: наибольшее значение **z** достигает в вершине прямоугольника **D**, т. Е. $M = z(2, -1) = 13$, а наименьшее – в двух точках: во внутренней точке области $M_2,\ m = z(1,\ 1) = -1$ и в вершине $A,\ m = z(0, -1) = -1.$

Задача 18. В шар, диаметр которого равен **2R**, вписать прямоугольный параллелепипед наибольшего объема (рис. 5).

Решение. Обозначим $\mathbf{x},\ \mathbf{y},\ \mathbf{z}$ – стороны параллелепипеда, тогда $v(x,\ y,\ z) = x \cdot y \cdot z$. Из рис. 5 видно: $a = \sqrt{x^2 + y^2}$, $z = \sqrt{4R^2 - a^2}$, т. е.

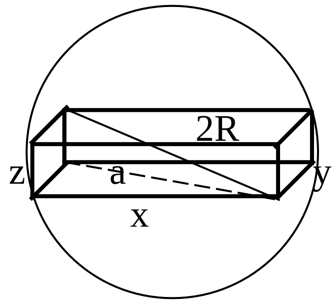


Рис. 5

$$v'_x = y\sqrt{4R^2 - x^2 - y^2} - \frac{x^2\,y}{\sqrt{4R^2 - x^2 - y^2}};$$

$$v'_y = x\sqrt{4R^2 - x^2 - y^2} - \frac{x\,y^2}{\sqrt{4R^2 - x^2 - y^2}},$$

или $\begin{cases} y\left(4R^2 - x^2 - y^2\right) - x^2 y = 0, \\ x\left(4R^2 - x^2 - y^2\right) - x\,y^2 = 0. \end{cases}$

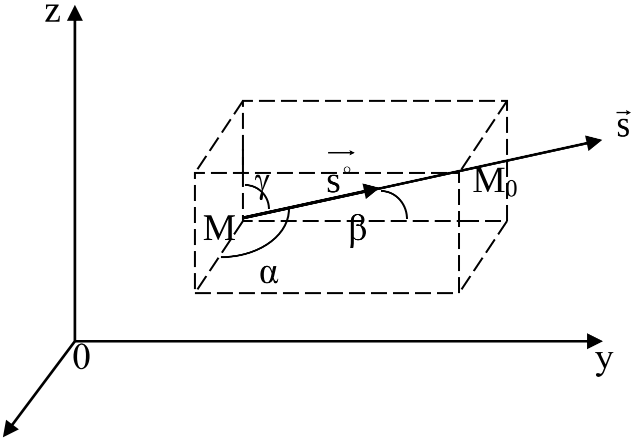
Из условия задачи $x \neq 0,\ y \neq 0$,

$$\begin{cases} 4R^2 - x^2 - y^2 - x^2 = 0 \\ 4R^2 - x^2 - y^2 - y^2 = 0 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} 4R^2 - 2x^2 = y^2 \\ 4R^2 - 2y^2 = x^2 \end{cases} \Rightarrow x = y,$$

откуда $4R^2 = 3x^2$ или $x = \frac{2R}{\sqrt{3}},\ y = \frac{2R}{\sqrt{3}},\ z = \frac{2R}{\sqrt{3}}$, т. е. прямоугольный параллелепипед, вписанный в данный шар, будет иметь наибольший объем, если он будет кубом, ребра которого равны $\frac{2R}{\sqrt{3}}$.

Элементы скалярного поля

а) Производная скалярного поля $u = u(x, y, z)$ по направлению вектора



$\vec{s}^{\circ} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ (рис.6). определяется так:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

– это скорость изменения скалярного поля $u = u(x, y, z)$ в направлении вектора $\vec{s}^{\circ}$

x Рис. 6

Задача 19. Найти скорость изменения скалярного поля $u(M) = x\,y\,z$ в точке $M_0(5,\ 1,\ -8)$ в направлении от этой точки к точке $M_1(9,\ 4,\ 4)$.

Решение. Скорость изменения скалярного поля в направлении вектора $\overrightarrow{s^\circ}$ в точке M_0 определяют по формуле

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} \cos\alpha + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} \cos\beta + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} \cos\gamma .$$

В задаче $\vec{s} = \overrightarrow{M_0\,M_1} = \{4, 3, 12\}$, $|\,\vec{s}\,| = \left|\overrightarrow{M_0\,M_1}\right| = \sqrt{4^2 + 3^2 + 12^2} = 13$,

$$\overrightarrow{s^\circ} = \frac{\vec{s}}{|\,\vec{s}\,|} = \left\{\frac{4}{13}; \frac{3}{13}; \frac{12}{13}\right\} = \{\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma\}.$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} = \left. y z\right|_{M_0(5,1,-8)} = 1\cdot(-8) = -8,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} = \left. x z\right|_{M_0(5,1,-8)} = 5\cdot(-8) = -40,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} = \left. x y\right|_{M_0(5,1,-8)} = 5\cdot 1 = 5.$$

Подставим все найденные величины в первую формулу:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = -8\cdot\frac{4}{13} - 40\cdot\frac{3}{13} + 5\cdot\frac{12}{13} = \frac{-32 - 120 + 60}{13} = -\frac{92}{13} < 0.$$

Ответ: В заданном направлении данное скалярное поле убывает со скоростью $\dfrac{\partial u}{\partial s} = -\dfrac{92}{13}$.

б) Градиент скалярного поля $u = u(x,\ y,\ z)$ – вектор

$$\operatorname{grad} u = \nabla u = \frac{\partial u}{\partial x}\ \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\ \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\ \vec{k} = \left\{\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right\}.$$

Очевидно,

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma =$$

$= \operatorname{grad} u \cdot \overrightarrow{s^\circ} = \text{Пр}_{\vec{s^\circ}} \operatorname{grad} u$. Поэтому $\max \dfrac{\partial u}{\partial s} = |\operatorname{grad} u|$.

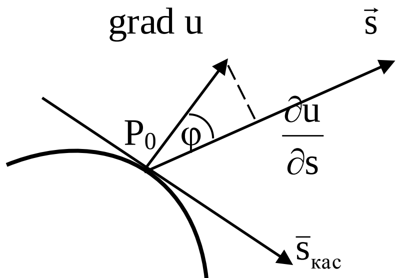


Рис. 7

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \text{Пр}_{\vec{s}} \operatorname{grad} u = |\operatorname{grad} u| \cos\varphi$$

(рис. 7).

Задача 20. Найти величину градиента скалярного поля $u(M) = x^2 + y^2 + z^2 - 2xyz$ в точке $M_0(1, -1, 2)$.

Решение.

$$\operatorname{grad} u = \nabla u = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} \vec{i} + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} \vec{j} + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} =$$

$$= (2x - 2yz)\Big|_{M_0(1,-1,2)} \vec{i} + (2y - 2xz)\Big|_{M_0(1,-1,2)} \vec{j} + (2z - 2xy)\Big|_{M_0(1,-1,2)} \vec{k} =$$

$$= (2\cdot 1 - 2\cdot(-1)\cdot 2)\vec{i} + (2\cdot(-1) - 2\cdot 1\cdot 2)\vec{j} + (2\cdot 2 - 2\cdot 1\cdot(-1))\vec{k} = 6\vec{i} - 6\vec{j} + 6\vec{k} = \{6, -6, 6\}.$$

$$|\operatorname{grad} u| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \sqrt{6^2 + (-6)^2 + 6^2} = 6\sqrt{3}.$$

Ответ: $|\operatorname{grad} u| = 6\sqrt{3}$.

Задача 21. Найти наибольшую скорость возрастания скалярного поля $u(M) = x^y - z$ в точке $M_0(2, 2, 4)$.

Решение. Воспользуемся формулой $\max \dfrac{\partial u}{\partial s} = |\operatorname{grad} u(M_0)|$,

$$\operatorname{grad} u(M_0) = \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0} \vec{i} + \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0} \vec{j} + \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0} \vec{k} =$$

$$= y \cdot x^{y-1}\Big|_{M_0(2,2,4)} \vec{i} + x^y \ln x\Big|_{M_0(2,2,4)} \vec{j} - 1\cdot\vec{k} = 4\vec{i} + 4(\ln 2)\vec{j} - \vec{k} = \{4, 4\ln 2, -1\}$$

$$|\operatorname{grad} u(M_0)| = \sqrt{4^2 + (4\ln 2)^2 + (-1)^2} = \sqrt{17 + 16\ln^2 2}.$$

Ответ: $\max\dfrac{\partial u}{\partial s}=\sqrt{17+16\ln^2 2}$.

Задача 22. Функция $u=\ln\left(x^2+y^2+z^2\right)$ определяет скалярное поле. Доказать, что она удовлетворяет уравнению $u=2\ln 2-\ln(\operatorname{grad} u)^2$.

Решение. Найдем вначале градиент **u** по формуле $\operatorname{grad} u=\dfrac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\dfrac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$, или $\operatorname{grad} u=\dfrac{2x}{x^2+y^2+z^2}\vec{i}+\dfrac{2y}{x^2+y^2+z^2}\vec{j}+\dfrac{2z}{x^2+y^2+z^2}\vec{k}$. Из полученного равенства следует, что декартовы координаты $\operatorname{grad} u$ известны:

$$\operatorname{grad} u=\left\{\frac{2x}{x^2+y^2+z^2};\ \frac{2y}{x^2+y^2+z^2};\ \frac{2z}{x^2+y^2+z^2}\right\}.$$

Так как скалярный квадрат вектора равен квадрату его модуля, то

$$(\operatorname{grad} u)^2=\left(\frac{2x}{x^2+y^2+z^2}\right)^2+\left(\frac{2y}{x^2+y^2+z^2}\right)^2+\left(\frac{2z}{x^2+y^2+z^2}\right)^2=\frac{4}{x^2+y^2+z^2}.$$

Теперь все известные величины можно подставить в уравнение:
$\ln\left(x^2+y^2+z^2\right)=2\ln 2-\ln\dfrac{4}{x^2+y^2+z^2}$, т. е. $\ln\left(x^2+y^2+z^2\right)=\ln 4-\ln 4+$

$+\ln\left(x^2+y^2+z^2\right)$, что и требовалось доказать.

Геометрические приложения частных производных

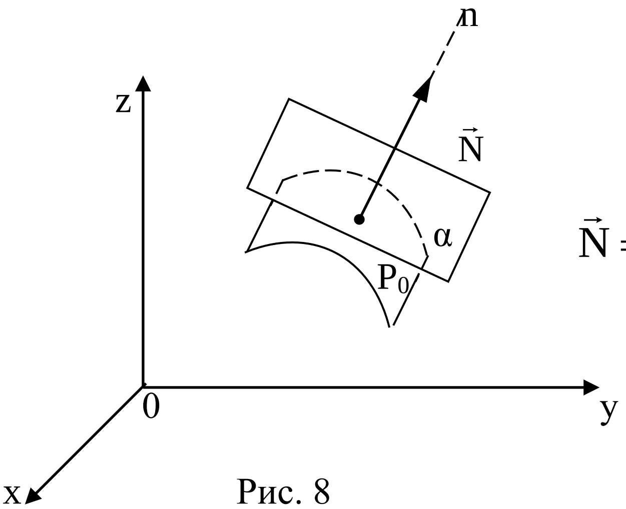
а) Уравнения касательной в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ к пространственной кривой

$\begin{cases} x=x(t)\\ y=y(t):\\ z=z(t)\end{cases}$ $\quad\dfrac{x-x_0}{x'_t(t_0)}=\dfrac{y-y_0}{y'_t(t_0)}=\dfrac{z-z_0}{z'_t(t_0)}$, где $\vec{s}=\{x'_t(t_0),\ y'_t(t_0),\ z'_t(t_0)\}$ – направляющий
вектор касательной, $x_0=x(t_0)$, $y_0=y(t_0)$, $z_0=z(t_0)$ – точка касания.

б) Уравнения касательной плоскости α и нормали n к поверхности $F(x, y, z)=0$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

$$\alpha:\ F'_x(M_0)(x-x_0)+F'_y(M_0)(y-y_0)+F'_z(M_0)(z-z_0)=0.$$

$$n: \ \frac{x-x_0}{F'_x(M_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(M_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(M_0)}.$$



$$\vec{N}=\nabla u=\left\{\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}\right\}_{P_0} \text{ (рис. 8)}$$

Рис. 8

Задача 23. Составить уравнение касательной прямой к пространственной линии $x=3t^2-2, \quad y=t^3+1, \quad z=2t^2+6$ в точке $t_0=1$.

Решение. Уравнение касательной к пространственной кривой в общем виде таково: $\dfrac{x-x_0}{x'_t(t_0)}=\dfrac{y-y_0}{y'_t(t_0)}=\dfrac{z-z_0}{z'_t(t_0)}$. Найдем координаты точки касания:

$x_0=\left(3t^2-2\right)\Big|_{t_0=1}=1, \qquad y_0=\left(t^3+1\right)\Big|_{t_0=1}=2, \qquad z_0=\left(2t^2+6\right)\Big|_{t_0=1}=8$, затем координаты направляющего вектора $\vec{s}=\{m, n, p\}=\{x'_t, y'_t, z'_t\}_{M_0}$:

$$m=x'_t(M_0)=6t\Big|_{t_0=1}=6, \quad n=y'_t(M_0)=3t\Big|_{t_0=1}=3, \quad p=z'_t(M_0)=4t\Big|_{t_0=1}=4.$$

Итак, $\dfrac{x-1}{6}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-8}{4}$ – касательная к пространственной кривой в данной точке.

Задача 24. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $z=x^2-y^2$ (гиперболический параболоид) в точке $M_0(1, 1, 0)$.

Решение. Вначале запишем уравнение данной поверхности в виде $F(x, y, z)=0$, т. е. $x^2-y^2-z=0$. Тогда уравнение касательной плоскости в общем виде запишется так: $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$, где $A = F'_x(M_0) = 2x\Big|_{x=1} = 2$, $B = F'_y(M_0) = -2y\Big|_{y=1} = -2$, $C = F'_z(M_0) = -1\Big|_{z=0} = -1$,

т. е. нормаль к касательной плоскости $\vec{N} = \{2, -2, -1\}$, $M_0(1, 1, 0)$ – точка касания, значит, $2(x-1) - 2(y-1) - 1(z-0) = 0$, т. е. $2x - 2y - 1 = 0$ – касательная плоскость к данной поверхности в точке M_0.

Уравнения нормали к этой же поверхности в точке M_0 в общем виде запишутся так: $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$, где $\vec{s} = \{m, n, p\}$ – направляющий вектор нормали, за него можно принять нормаль к касательной плоскости $\vec{N}$, т. е. $\vec{s} = \vec{N} = \{2, -2, -1\}$. Итак, $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y-1}{-2} = \dfrac{z}{-1}$ – это канонические уравнения нормали к данной поверхности в точке M_0.

Задача 25. Показать, что конус $z^2 = x^2 + y^2$ и сфера $x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 2$ касаются друг друга в точке $M_0(0, 1, 1)$.

Решение. Чтобы решить задачу, достаточно показать, что в точке $M_0(0,1,1)$ данные конус и сфера имеют общую касательную плоскость:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Сначала найдем касательную плоскость к конусу в точке M_0: уравнение конуса запишем в виде $F(x, y, z) = 0$, т. е. в виде $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, откуда

$$A = F'_x(M_0) = 2x\Big|_{x_0=0} = 0,\ B = F'_y(M_0) = 2y\Big|_{y_0=1} = 2,\ C = F'_z(M_0) = -2z\Big|_{z_0=1} = -2.$$

Значит, $0(x-0) + 2(y-1) - 2(z-1) = 0$, или $2y - 2z = 0$ – касательная плоскость к конусу в точке M_0.

Также найдем касательную плоскость к сфере $x^2 + y^2 + (z-2)^2 - 2 = 0$ в точке $M_0(0, 1, 1)$.

$$A = F'_x(M_0) = 2x\Big|_{x_0=0} = 0,\ B = F'_y(M_0) = 2y\Big|_{y_0=1} = 2,\ C = F'_z(M_0) = 2(z-2)\Big|_{z_0=1} = -2.$$

Касательная плоскость к сфере в точке M_0 задается уравнением $0(x-0) + 2(y-1) - 2(z-1) = 0$, или $2y - 2z = 0$, что и требовалось доказать.

Задача 26. На поверхности $x^2 + y^2 - z^2 - 2x = 0$ найти точки, в которых касательная плоскость параллельна координатной плоскости **XOZ**.

Решение. Так как касательная плоскость к поверхности параллельна плоскости **XOZ**, то она перпендикулярна оси **OY** и ее нормаль $\vec{N} = \{A, B, C\}$ имеет координаты $\vec{N} = \{0, B, 0\}$. С другой стороны известно, что нормаль касательной плоскости к поверхности $F(x, y, z) = 0$ имеет координаты:

$$A = \left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_{M_0} = 2x_0 - 2, \quad B = 2y\Big|_{M_0} = 2y_0, \quad C = -2z\Big|_{M_0} = -2z_0.$$

Чтобы найти x_0, y_0, z_0, сравним **A**, **B** и **C** вектора $\vec{N}$: $2x_0 - 2 = 0$, $2y_0 = B$, $-2z_0 = 0$, т. е. $x_0 = 1$, $y_0 = \frac{B}{2}$, $z_0 = 0$ – координаты точки касания. Осталось
найти **B**. Так как точка касания принадлежит поверхности, ее координаты должны удовлетворять уравнению этой поверхности:

$x^2 + y^2 - z^2 - 2x = 0$ или $1^2 + \frac{B^2}{4} - 0^2 - 2 \cdot 1 = 0$, откуда

$B^2 = 4$, $B = 2 \pm 2$, значит $y_0 = \pm 1$. Значит, точек касания две: $M_0(1,\ 1,\ 0)$ и $N_0(1,\ -1,\ 0)$.