Две задачи математического анализа

Первая задача состоит в отыскании производной от заданной функции $y = f(x)$. Напомним, что с помощью производной решаются многие задачи математики и физики. Так, например, если точка движется по закону $S = f(t)$, где t – время, а S – пройденный путь, то скорость движения $V = V(t)$ есть производная от пути по времени, т. е. $V(t) = S'(t) = \frac{dS}{dt}$, а ускорение $a = a(t)$ равно $a(t) = V'(t) = S''(t) = \frac{d^2S}{dt^2}$. Если масса неоднородного стержня изменяется по закону $m = m(x)$, то его плотность в точке x есть производная $\rho = \rho(x) = m'(x)$. В геометрии с помощью производной решается задача о проведении касательных к заданным кривым. Эти примеры можно продолжить.

Теперь обратимся к **обратной задаче**: как по заданной производной $y' = f'(x)$ восстановить саму функцию $y = f(x)$?

Как, например, зная скорость движения $V = V(t)$, найти закон изменения пройденного пути $S = S(t)$? Как найти массу стержня переменной плотности $\rho = \rho(x)$? В общем случае задача ставится следующим образом: пусть задана функция $y = F(x)$, производная от которой совпадает с заданной функцией: $F'(x) = f(x)$. Такая функция $F(x)$ называется **первообразной** функции $f(x)$. Так, например, если $f(x) = x^2$, то $F(x) = \frac{x^3}{3}$, так как $F'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2 = f(x)$. Если $f(x) = \sin x$, то $F(x) = -\cos x$, так как $F'(x) = (-\cos x)' = \sin x = f(x)$. Обратите внимание на то, что для заданной функции $f(x)$ **первообразных существует бесконечно много**, так как $F(x)$ есть некоторая первообразная $f(x)$. Любая функция вида $F(x) + C$, где $c = const$, есть также первообразная $f(x)$, так как $(F(x) + C)' = F'(x) + C' = F'(x) = f(x)$.

В силу этого **множество всех первообразных** заданной функции $f(x)$ принято обозначать символом $\int f(x)dx$ и называть **неопределенным интегралом** от функции $f(x)$. Итак, по определению, $\int f(x)dx = F(x) + C$.

Примеры. $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3} + C$, так как $\left(\frac{x^3}{3} + C\right)' = x^2$.

$\int \sin x dx = -\cos x + C$, так как $(-\cos x + C)' = \sin x$.

$\int e^x dx = e^x + C$, так как $(e^x + C)' = e^x$.

Приступая к изучению неопределенного интеграла, следует обратить внимание на то, что

1) эта операция многозначная;

2) в техническом отношении интегрирование для студентов представляется более сложным, чем отыскание производных. Чтобы научиться интегрировать, нужна практика. Только решение большого числа разнообразных примеров позволит выработать некоторые навыки в интегрировании;

3) обратите внимание на запись интеграла. Здесь под знаком интеграла стоит дифференциал аргумента функции $f(x)$. Если же задана сложная функция $y=f(x)$, где $u=\varphi(x)$, то все формулы интегрирования имеют смысл только в том случае, когда под знаком интеграла стоит дифференциал $du=\varphi'(x)\cdot dx$. Это обстоятельство нужно иметь в виду постоянно. В формуле $\int f(u)du=F(u)+C$ будем подразумевать, что ищется интеграл от сложной функции $y=f(u)$, где $u=\varphi(x)$, x – независимая переменная;

4) поскольку операции дифференцирования и интегрирования взаимообратные, ниже приводятся основные свойства производной и формулы дифференцирования, а далее – аналогичный материал, касающийся неопределенного интеграла.

Основные правила дифференцирования

1. $c'=0,\ \ c=\text{const}$.
2. $x'=1,\ \ x-$независимая переменная.
3. $(u\pm v)'=u'\pm v'$, где $u=u(x)$ и $v=v(x)$.
4. $(c\cdot u)'=c\cdot u',\ c=\text{const},\ \ u=u(x)$.
5. $(u\cdot v)'=u'v+v'u,\ u=u(x),\ \ v=v(x)$,

$(u\cdot v\cdot w)'=u'\cdot v\cdot w+v'\cdot u\cdot w+w'\cdot u\cdot v,\ \ u=u(x),\ v=v(x),\ \ w=w(x)$.

6. $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'\cdot v-v'u}{v^2},\ \ u=u(x),\ \ v=v(x)$.
7. Производная сложной функции. Если $y=f(u)$, где $u=\varphi(x)$, то $y'_x=y'_u\cdot u'_x$.
8. Дифференциал функции. Если $y=f(x)$, то $dy=f'(x)\cdot dx$.

Таблица производных

1. Производная степенной функции $y=u^{\alpha}$, где $u=u(x)$

$(u^{\alpha})'=\alpha\cdot u^{\alpha-1}\cdot u'$. Частные случаи : $\left(\sqrt{u}\right)'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}},\ \left(\dfrac{1}{u}\right)'=-\dfrac{u'}{u^2}$.

2. Производная показательной функции $y=a^u,\ a>0, a\neq 1$,

$(a^u)'=a^u\cdot\ln a\cdot u'$; $(e^u)'=e^u\cdot u'$, так как $\ln e=1$; $(e^x)'=e^x$, так как $x'=1$.

3. Производная логарифмической функции $y=\log_a u,\ a>0,\ a\neq 1$

$\left(\log_a u\right)' = \frac{u'}{u} \cdot \log_a e$; $\left(\ln u\right)' = \frac{u'}{u}$, так как $\log_e e = 1$; $\left(\ln x\right)' = \frac{1}{x}$, так как $x' = 1$.

4. Производные тригонометрических функций

$\left(\sin u\right)' = \cos u \cdot u'$; $\left(\cos u\right)' = -\sin u \cdot u'$; $\left(\mathrm{tg}\, u\right)' = \sec^2 u \cdot u' = \frac{u'}{\cos^2 u}$;

$\left(\mathrm{ctg}\, u\right)' = -\mathrm{cosec}^2 u \cdot u' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$; $\left(\sec u\right)' = \left(\frac{1}{\cos u}\right)' = \sec u \cdot \mathrm{tg}\, u \cdot u' = \frac{\sin u}{\cos^2 u} \cdot u'$;

$\left(\mathrm{cosec}\, u\right)' = -\mathrm{cosec}\, u \cdot \mathrm{ctg}\, u \cdot u' = -\frac{\cos u}{\sin^2 u} \cdot u'$.

5. Производные обратных тригонометрических функций:

$$\left(\arcsin u\right)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}, \qquad \left(\arccos u\right)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}},$$

$$\left(\mathrm{arctg}\, u\right)' = \frac{u'}{1+u^2}, \qquad \left(\mathrm{arcctg}\, u\right)' = -\frac{u'}{1+u^2}.$$

6. Производные гиперболических функций:

$$\left(\mathrm{sh}\, u\right)' = \mathrm{ch}\, u \cdot u', \qquad \left(\mathrm{ch}\, u\right)' = \mathrm{sh}\, u \cdot u',$$

$$\left(\mathrm{th}\, u\right)' = \frac{u'}{\mathrm{sh}^2 u}, \qquad \left(\mathrm{cth}\, u\right)' = -\frac{u'}{\mathrm{sh}^2 u}.$$

Неопределенный интеграл

Теорема существования. Если функция $y = f(x)$ **непрерывна** в заданном промежутке (a, b), то в этом промежутке она имеет первообразную.

Основные свойства неопределенного интеграла

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$.
2. $d\left(\int f(x)\,dx\right) = f(x)dx$.
3. $\int c \cdot f(x)dx = c \cdot \int f(x)dx$, $c = \mathrm{const}$.
4. $\int d \cdot f(x) = f(x) + C$.
5. $\int \left(f(x) \pm \varphi(x)\right)dx = \int f(x)dx \pm \int \varphi(x)dx$.
6. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(x+a)dx = F(x+a) + C$, $a = \mathrm{const}$.
7. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(kx)dx = \frac{1}{k} \cdot F(kx) + C$, $k = \mathrm{const}$.
8. Если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $f(kx+a)dx = \frac{1}{k} \cdot F(kx+a) + C$.

Методы интегрирования

1. Метод замены переменной (способ подстановки)

$$\int f(\varphi(x))\,\varphi'(x)dx = \begin{vmatrix} t = \varphi(x) \\ dt = \varphi'(x)\,dx \end{vmatrix} = \int f(t)\,dt = F(t) + c = F(\varphi(x)) + c.$$

2. Метод интегрирования по частям: $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$, где $u = u(x)$, $v = v(x)$.

Таблица неопределенных интегралов

1. Интеграл от степенной функции $y = t^{\alpha}$:

$$\int t^{\alpha} dt = \frac{t^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \quad где \quad \alpha \neq \ 1; \ (1) \qquad \int \frac{dt}{t^2} = \ \frac{1}{t} + C \quad (\alpha = \ \ 2). \qquad (2)$$

$$\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = 2\sqrt{t} + C \quad \left(\alpha = \ \ \frac{1}{2}\right). \qquad (3)$$

2. $\int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C$.

3. Интеграл от показательной функции $y = a^n$, $a > 0$, $a \neq 1$:

$$\int a^t dt = \frac{a^t}{\ln a} + C, \qquad \int e^t dt = e^t + C.$$

4. Интегралы от тригонометрических функций:

$$\int \sin t \quad dt = \quad \cos t + C; \qquad \int \cos t \quad dt = \sin t + C;$$

$$\int tg t \quad dt = \quad \ln|\cos t| + C; \qquad \int ctg\, t \quad dt = \ln|\sin t| + C;$$

$$\int \sec t \quad dt = \int \frac{dt}{\cos t} = \ln\left| tg\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C; \qquad \int \operatorname{cosec} t \quad dt = \int \frac{dt}{\sin t} = \ln\left| tg \frac{t}{2}\right| + C;$$

$$\int \sec^2 t \quad dt = \int \frac{dt}{\cos^2 t} = tg\, t + C; \qquad \int \operatorname{cosec}^2 t \quad dt = \int \frac{dt}{\sin^2 t} = \quad ctg\, t + C.$$

5. Интегралы от гиперболических функций:

$$\int sh u \cdot du = ch u + C; \qquad \int ch u \cdot du = sh u + C;$$

$$\int th u \cdot du = \ln|ch u| + C; \qquad \int cth u \cdot du = \ln|sh u| + C.$$

6. Интегралы, содержащие выражение вида $v^2 \pm a^2$, $a^2 \pm v^2$, $a = const$:

$$\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a} \quad arctg \frac{u}{a} + C. \quad (5) \qquad \int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C. \quad (6)$$

$$\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{u+a}{u-a}\right| + C. \quad (7) \qquad \int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin \frac{u}{a} + C. \quad (8)$$

$$\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 + a^2}\right| + C. \quad (9) \qquad \int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right| + C. \quad (10)$$

7. Часто встречающиеся интегралы:

$$\int \sqrt{a^2 - u^2}\, du = \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{u}{a} + \frac{u \cdot \sqrt{a^2 - u^2}}{2} + C.$$

$$\int \sqrt{a^2 + u^2}\, du = \frac{u}{2} \cdot \sqrt{a^2 + u^2} + \frac{a^2}{2} \ln\left| u + \sqrt{a^2 + u^2}\right| + C.$$

$$\int e^{ax}\cdot\cos bx\cdot dx=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left(b\cdot\sin bx+a\cdot\cos bx\right)+C. \qquad (11)$$

$$\int e^{ax}\cdot\sin bx\cdot dx=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left(a\cdot\sin bx-b\cdot\cos bx\right)+C. \qquad (12)$$

$$\int \sec^3 u\cdot du=\int\frac{du}{\cos^3 u}=\frac{1}{2}\sec u\cdot \mathrm{tg}u+\frac{1}{2}\ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{u}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C. \qquad (13)$$

$$\int \mathrm{cosec}^3 u\cdot du=\int\frac{du}{\sin^3 u}=-\frac{1}{2}\mathrm{cosec}\,u\cdot \mathrm{ctg}u+\frac{1}{2}\ln\left|\mathrm{tg}\frac{u}{2}\right|+C. \qquad (14)$$

8. Реккурентные соотношения

$$J_k=\int\frac{du}{\left(u^2+a^2\right)^k};\quad J_{k+1}=\frac{1}{2ka^2}\cdot\frac{u}{\left(u^2+a^2\right)^k}+\frac{2k-1}{2ka^2}\cdot J_k,\ k=1,2,3,\ldots. \qquad (15)$$

$$J_k=\int\sin^k u\cdot du;\quad J_{k+1}=\frac{1}{k}\sin^{(k+1)}u\cdot\cos u+\frac{k-1}{k}\cdot J_{k-2},\quad k=1,2,3.\ldots$$

$$J_k=\int\cos^k u\cdot du;\quad J_{k+1}=\frac{1}{k}\cos^{(k-1)}u\cdot\sin u+\frac{k-1}{k}\cdot J_{k-2},\quad k=2,3,\ldots.$$

Замечание

1. Во всех формулах подынтегральные функции предполагаются сложными, т. е. аргумент и есть некоторая функция от независимой переменной *x*: $t=t(x)$. Следует хорошо уяснить, что все формулы верны лишь в том случае, когда подынтегральная функция умножается строго на дифференциал аргумента *t*, т. е. на dt. Так, например, $\int\sin x\,dx=-\cos x+C$, но $\int\sin x^2\,dx\neq-\cos x^2+C$, так как здесь $t=x^2$, $dt=2x\,dx$, чего нет под интегралом. Аналогично $\int e^x dx=e^x+C$, но $\int e^{-x}dx\neq e^{-x}+C$, так как здесь $t=-x,\ dt=-dx$, чего нет под интегралом.

Для упрощения записи во всех формулах независимая переменная x опущена. Например, формула (1) имеет следующий вид: $\int\left(t(x)\right)^{\alpha}dt=\frac{\left(t(x)\right)^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$. Такая запись затрудняет запоминание формулы.

2. Вся таблица интегралов разбита на восемь групп формул. Деление это, вообще говоря, произвольное, сделано с единственной целью, чтобы можно было быстрее и легче запомнить эти формулы. Впрочем, в большинстве случаев достаточно знать первые шесть групп формул. Седьмая группа выделена потому, что эти интегралы находятся достаточно длинным способом и встречаются на практике редко.

3. Следует научиться работать с рекуррентными соотношениями. Сущность их состоит в том, что, зная интеграл J_k, можно без труда найти интеграл J_{k+1}

Приведем пример использования формулы (15). Полагая здесь $k=1$, получим

$$J_1=\int\frac{du}{u^2+a^2}=\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a}+C$$ (табличный интеграл (5)),

$$J_2=\frac{1}{2\cdot1\cdot a^2}\cdot\frac{u}{u^2+a^2}+\frac{2\cdot1-1}{2\cdot1\cdot a^2}\cdot\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a}+C,\qquad J_2=\frac{1}{2a^2}\left(\frac{u}{u^2+a^2}+\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a}\right)+C.$$

При $k=2$ имеем $J_3=\int\frac{du}{\left(u^2+a^2\right)^3}=\frac{1}{2\cdot2\cdot a^2}\cdot\frac{u}{\left(u^2+a^2\right)^2}+\frac{2\cdot2-1}{2\cdot2\cdot a^2}\cdot J_2$,

$$J_3=\int\frac{du}{\left(u^2+a^2\right)^3}=\frac{1}{4a^2}\cdot\frac{u}{\left(u^2+a^2\right)^2}+\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2a^2}\left(\frac{u}{u^2+a^2}+\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{u}{a}\right)+C,$$

$$J_3=\frac{1}{4a^2}\cdot\frac{u}{\left(u^2+a^2\right)^2}+\frac{3}{8a^4}\cdot\frac{u}{u^2+a^2}+\frac{3}{8a^5}\cdot\operatorname{arctg}\frac{u}{a}+C.$$

В заключение отметим, что существуют три способа отыскания неопределенных интегралов: интегрирование с помощью табличных формул (он называется иначе «метод подведения под знак дифференциала»), метод замены переменной (иначе: «способ подстановки») и метод интегрирования по частям. Подробно рассмотрим эти методы.

Тема № 1. Интегрирование по формулам

Пример, $\int x^3dx=\frac{x^4}{4}+C$,

$$\int\sqrt{x^3}dx=\int x^{3/2}dx=\frac{x^{3/2}+1}{3/2+1}+C=\frac{2}{5}\sqrt{x^5}+C.$$

Приведем более сложный пример:

$$J=\int\frac{\left(\sqrt{x}+1\right)^3}{\sqrt[3]{x}}dx=\int\frac{\sqrt{x^3}+3x+3\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x}}dx.$$

Здесь воспользовались известным разложением $(a\pm b)^3=a^3\pm3a^2b+3ab^2\pm b^3$. Разделив числитель на знаменатель, получим

$$J=\int x^{7/6}dx+3\int x^{2/3}dx+3\int x^{1/6}dx+\int x^{-1/3}dx,$$

$$J=\frac{x^{7/6+1}}{7/6+1}+3\cdot\frac{x^{2/3+1}}{2/3+1}+3\cdot\frac{x^{1/6+1}}{1/6+1}+\frac{x^{-1/3+1}}{-1/3+1}+C,$$

$$J=\frac{6}{13}\sqrt[6]{x^{13}}+3\cdot\frac{3}{5}\cdot\sqrt[3]{x^5}+3\cdot\frac{6}{7}\cdot\sqrt[6]{x^7}+\frac{3}{2}\cdot\sqrt[3]{x^2}+C,$$

$$J=\frac{6}{13}\cdot x^2\cdot\sqrt[6]{x}+\frac{9}{5}\cdot x\cdot\sqrt[3]{x^2}+\frac{18}{7}\cdot x\cdot\sqrt[6]{x}+\frac{3}{2}\cdot\sqrt[3]{x^2}+C.$$

Интеграл $J=\int(7x-5)^4dx$ можно найти двумя способами. Так как $\int x^4dx=\dfrac{x^5}{5}+C$, по свойству 8 при $k=7$ и $a=-5$ находим

$$J=\int(7x-5)^4dx=\frac{1}{7}\cdot\frac{(7x-5)^5}{5}+C=\frac{1}{35}\cdot(7x-5)^5+C.$$

Другой способ. Полагая здесь $t=7x-5,\ dt=(7x-5)'dx=7dx$, получим

$$\mathrm{J}=\int(7\mathrm{x}-5)^4\,\mathrm{dx}=\frac{1}{7}\int(7\mathrm{x}-5)^4\,7\mathrm{dx}=\frac{1}{7}\int(7\mathrm{x}-5)^4\,\mathrm{d}(7\mathrm{x}-5)=\frac{1}{7}\cdot\frac{(7\mathrm{x}-5)^5}{5}+\mathrm{C}=$$
$$=\frac{1}{35}(7\mathrm{x}-5)^5+\mathrm{C}.$$

Говорят, что **интеграл поправлен на 1/7**, иначе говоря, **под знак дифференциала подведено основание** 7x – 5**,** чтобы получить точно табличную формулу (1).

Рассмотрим интеграл $J=\int\cos\dfrac{1}{x^2}\cdot\dfrac{dx}{x^3}$. Полагая здесь $t=\dfrac{1}{x^2}$,

$dt=\left(\dfrac{1}{x^2}\right)'dx=\dfrac{2}{x^3}dx$, получим $J=-\dfrac{1}{2}\int\cos\dfrac{1}{x^2}\cdot\dfrac{-2dx}{x^3}=$

$=-\dfrac{1}{2}\int\cos\dfrac{1}{x^2}\cdot d\left(\dfrac{1}{x^2}\right)=-\dfrac{1}{2}\cdot\sin\dfrac{1}{x^2}+C$. Формулы (2) и (3) суть частные случаи основной формулы (1) при $\alpha=-2$ и $\alpha=-1/2$. Их рекомендуется запомнить, так как они будут часто встречаться в последующем. Приведем примеры.

Так как $\int\dfrac{dx}{x^2}=-\dfrac{1}{x}+C$, $\int\dfrac{dx}{(x-3)^2}=-\dfrac{1}{x-3}+C$ (по свойству 6 неопределенного интеграла), $\int\dfrac{dx}{(4x+1)^2}=-\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{4x+1}+C$ (свойство 8). Аналогично

$\int\dfrac{dx}{\sqrt{x+2}}=2\sqrt{x+2}+C$, $\displaystyle\int\frac{\mathrm{dx}}{\sqrt{3\mathrm{x}-1}}=\frac{2}{3}\sqrt{3\mathrm{x}-1}+\mathrm{C}$, поскольку $\int\dfrac{dx}{\sqrt{x}}=2\sqrt{x}+C$. Вообще свойства 6 - 8 неопределенного интеграла надо хорошо усвоить. Это позволяет находить простейшие интегралы самым коротким способом. Приведем еще несколько примеров.

$J=\int\dfrac{dx}{\sqrt{1-x}}=-2\sqrt{1-x}+C$, так как здесь $k=-1$.

$J=\int\dfrac{dx}{(2x-1)^2}=-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2x-1}+C$, так как здесь $k=2$.

$J=\int\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)dx=-\dfrac{1}{2}\cdot\cos\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)+C$, так как здесь $k=2$.

$J=\int\cos\left(\frac{x}{3}-1\right)dx=3\sin\left(\frac{x}{3}-1\right)+C$, так как здесь $k=\frac{1}{3}$.

Теперь обратимся к формуле (4): $\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C$. Она применяется в тех случаях, когда в числителе стоит дифференциал знаменателя, точнее, когда в числителе **может быть получен** дифференциал знаменателя. Приведем примеры.

$J=\int\frac{x\,dx}{x^2+4}$. Так как $d\left(x^2+4\right)=\left(x^2+4\right)'dx=2x\,dx$, то

$$J=\int\frac{x\,dx}{x^2+4}=\frac{1}{2}\int\frac{2x\,dx}{x^2+4}=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2+4\right)}{x^2+4}=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+4\right|+C,$$

$$J=\int tgx\,dx=-\int\frac{-\sin x\,dx}{\cos x}=-\int\frac{d(\cos x)}{\cos x}=-\ln|\cos x|+C.$$

Рассмотрим интеграл от показательной функции и ее частный, но очень важный случай - интеграл от экспоненты:

$$\int a^t dt=\frac{a^t}{\ln a}+C,\qquad \int e^t\,dt=e^t+C,$$

$J=\int 4^x\,dx=\frac{4^x}{\ln 4}+C$, $\int 4^{x-1}dx=\frac{4^{x-1}}{\ln 4}+C$ (свойство 6),

$J=\int 4^{3x-1}dx=\frac{1}{3}\cdot\frac{4^{3x-1}}{\ln 4}+C$ (свойство 8),

$$J=\int\frac{\left(a^x-b^x\right)^2}{(ab)^x}dx=\int\frac{a^{2x}-2a^xb^x+b^{2x}}{a^xb^x}dx=\int\frac{a^x}{b^x}dx-2\int dx=\int\frac{b^x}{a^x}dx=$$

$$=\int\left(\frac{a}{b}\right)^x dx-2x+\int\left(\frac{b}{a}\right)^x dx==\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^x}{\ln\frac{a}{b}}-2x+\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^x}{\ln\frac{b}{a}}+C=$$

$$=\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^x}{\ln a-\ln b}-2x+\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^{-x}}{\ln b-\ln a}+C=\frac{1}{\ln a-\ln b}\left(\left(\frac{a}{b}\right)^x-\left(\frac{a}{b}\right)^{-x}\right)-2x+C.$$

$J=\int x\cdot 5^{x^2}dx.$ Здесь $t=x^2, dt=2x\quad dx$, поэтому

$$J=\int x\cdot 5^{x^2}dx=\frac{1}{2}\int 5^{x^2}\cdot 2x\cdot dx=\frac{1}{2}\int 5^{x^2}d\left(x^2\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{5^{x^2}}{\ln 5}+C,$$

$J=\int \frac{e^{1/x}}{x^2}dx$. Здесь $t=\frac{1}{x}, dt=\left(\frac{1}{x}\right)' dx=-\frac{1}{x^2}dx$, поэтому

$$J=\int \frac{e^{1/x}}{x^2}dx=-\int e^{1/x}\cdot\left(-\frac{dx}{x^2}\right)=-\int e^{1/x}d\left(\frac{1}{x}\right)=-e^{1/x}+C.$$

Замечание. Поскольку операция интегрирования является обратной по отношению к операции дифференцирования, полученный ответ всегда можно проверить. Для этого его надо продифференцировать и показать, что получится подынтеграль-ная функция. Так, в последнем примере $\left(-e^{1/x}+C\right)'=-\left(e^{1/x}\right)'=e^{1/x}\cdot\frac{1}{x^2}=\frac{e^{1/x}}{x^2}$.

Обратимся к интегрированию гиперболических функций.

Найти интеграл $J=\int ch^2x\cdot dx$.

Так как $ch^2x=\frac{1}{2}(1+ch2x)$, получим $J=\frac{1}{2}\int(1+ch2x)dx=\frac{1}{2}\left(\int dx+\int ch2x\cdot dx\right)=$

$$=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}\int ch2x\cdot d(2x)\right)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{1}{2}sh2x\right)+C=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}sh2x+C.$$

Найти интеграл $\mathrm{J}=\int \mathrm{sh}^3\mathrm{x}\cdot \mathrm{dx}$.

$$J=\int sh^2x\cdot sh\,x\cdot dx=\int\left(ch^2-1\right)sh\,x\cdot dx=\int ch^2x\cdot sh\,x\cdot dx-\int sh\,x\cdot dx=$$

$$=\int ch^2x\cdot d(ch\,x)-ch\,x=\frac{ch^3x}{3}-ch\,x+C.$$

Упражнения (устно)

Дайте ответы в следующих примерах.

$J_1=\int(2x+3)^3dx,\quad J_2=\int\frac{dx}{3x-1},\quad J_3=\int\frac{dx}{(3x-1)^2},$

$J_4=\int tg\,3x\cdot dx,\quad J_5=\int\cos\frac{x+1}{2}dx,\quad J_6=\int\sec^2\left(1-\frac{x}{3}\right)dx,$

$J_7=\int 5^{2x+1}dx,\quad J_8=\int e^{x/2-1}dx,\quad J_9=\int\frac{x^2dx}{x^3+1}.$

Упражнение

Найти следующие интегралы.

$$J_1=\int\frac{(2x-1)^2}{\sqrt{x}}dx,\qquad J_2=\int\left(3t^2+1\right)t\cdot dt,\qquad J_3=\int x\cdot\sin x^2dx,$$

$$J_4=\int x^2\cos\left(\frac{\pi}{3}-x^3\right)dx,\quad J_5=\int\frac{x^3dx}{\sqrt{5-x^4}},\qquad J_6=\int\frac{t\cdot dt}{\sqrt{2t^2+1}},$$

$$J_7=\int u\cdot 2^{3u^2-1}\cdot du,\qquad J_8=\int x\cdot e^{x^2+a^2}\cdot dx\qquad J_9=\int\left(e^{x/2}+e^{-x/2}\right)dx$$

Задание на дом

$$J_1=\int\frac{dx}{7x-1},\qquad J_2=\int\frac{\left(\sqrt[3]{x}-1\right)^2}{x}dx,\quad J_3=\int\left(\frac{1}{3}\right)^{4-5x}dx,$$

$$J_4=\int\frac{x\,dx}{4-x^2},\qquad J_5=\int\frac{x^2dx}{\sqrt{x^3+7}},\qquad J_6=\int t\cdot tg\left(3t^2-1\right)dt,$$

$$J_7=\int x^2e^{x^3-1}dx,\quad J_8=\int 5^{\sqrt{x}}\cdot\frac{dx}{\sqrt{x}},\qquad J_9=\int\frac{e^xdx}{e^x-1}.$$

Тема № 2. Интегрирование по формулам. Способ подстановки

Цель занятия – усвоить шестую группу формул; овладеть методом замены переменной; научиться брать интегралы, содержащие квадратный трехчлен.

1.**К шестой группе формул** относятся интегралы функций $\frac{1}{u^2+a^2}$, $\frac{1}{u^2-a^2}$, $\frac{1}{a^2-u^2}$, $\frac{1}{\sqrt{a^2-u^2}}$, $\frac{1}{\sqrt{u^2\pm a^2}}$, где $a=\mathrm{const}$, $u=u(x)$. В каждом примере надо определить, чему равно a и u, найти du и сделать необходимую поправку. Обратите внимание на форму записи.

Примеры.

$$J_1=\int\frac{x\,dx}{\sqrt{x^4+9}}=\int\frac{x\,dx}{\sqrt{\left(x^2\right)+3^2}}=\left|u=x^2,\ a=3,\ du=2x\cdot dx\ \right|=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\int\frac{2x\,dx}{\sqrt{\left(x^2\right)^2+3^2}}=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+\sqrt{x^4+9}\right|+C\quad(\textit{формула}\ (5)).$$

$$J_2=\int\frac{x^3dx}{x^8+5}=\int\frac{x^3dx}{\left(x^4\right)^2+\left(\sqrt{5}\right)^2}=\ \left|u=x^4,\ a=\sqrt{5},\ du=4x^3dx\right|=\frac{1}{4}\cdot\int\frac{4x^3dx}{\left(x^4\right)^2+\left(\sqrt{5}\right)^2}=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot arctg\frac{x^4}{\sqrt{5}}+C\quad(\textit{формула}\ (5)).$$

$$J_3 = \int \frac{5-3x}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = 5\int \frac{dx}{\sqrt{2^2-x^2}} - 3\int \frac{x\,dx}{\sqrt{4-x^2}} = 5\cdot \arcsin\frac{x}{2} - 3\int \left(4-x^2\right)^{-1/2} x\cdot dx.$$

Последний интеграл степенной, так как $\mathrm{du} = \left(4-\mathrm{x}^2\right)'\mathrm{dx} = -2\mathrm{x}\cdot\mathrm{dx}$, если $\mathrm{u} = 4-\mathrm{x}^2$, поэтому

$$\int \left(4-x^2\right)^{-1/2} x\cdot dx = -\frac{1}{2}\int \left(4-x^2\right)^{-1/2}\left(-2x\cdot dx\right) = -\frac{1}{2}\int \left(4-x^2\right)^{-1/2} d\left(4-x^2\right) =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(4-x^2\right)^{-1/2+1}}{-1/2+1} = -\sqrt{4-x^2} + C.$$

$$J_3 = 5\cdot\arcsin\frac{x}{3} + 3\sqrt{4-x^2} + C.$$

$$J_4 = \int \frac{\arcsin x + 4x + 1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \int \arcsin x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + 4\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$\int \arcsin x\cdot d\left(\arcsin x\right) + 4\int \left(1-x^2\right)^{-1/2} x\cdot dx + \arcsin x \quad (\textit{формула}\ (8)).$$

Первый интеграл степенной: $\int u\cdot du = \frac{u^2}{2} + C$, где $\mathrm{u} = \arcsin \mathrm{x}$. Второй интеграл также степенной, его можно найти в примере J_3. Поэтому

$$J_4 = \frac{\left(\arcsin x\right)^2}{2} - 2\sqrt{1-x^2} + \arcsin x + C.$$

$$J_5 = \int \frac{\sin 2x\,dx}{\sin^4 x - 3} = \int \frac{\sin 2x\,dx}{\left(\sin^2 x\right)^2 - \left(\sqrt{3}\right)^2} = \left| \begin{array}{l} u = \sin^2 x,\ a = \sqrt{3}, \\ du = 2\sin x\cdot\cos x\cdot dx = \sin 2x\cdot dx \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}}\cdot\ln\left|\frac{\sin^2 x - \sqrt{3}}{\sin^2 x + \sqrt{3}}\right| + C \quad (\textit{формула}\ (6)).$$

Упражнение. Решить примеры.

$$J_1 = \int \frac{dx}{4+9x^2}, \quad J_2 = \int \frac{dt}{8-5t^2}, \quad J_3 = \int \frac{dt}{\sqrt{7-2t^2}}, \quad J_4 = \int \frac{dx}{\sqrt{9x^2-1}},$$

$$J_5 = \int \frac{x\,dx}{4+3x^4}, \quad J_6 = \int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^{2x}-4}}, \quad J_7 = \int \frac{t\,dt}{\sqrt{4-3t^4}}, \quad J_8 = \int \frac{x^3 dx}{1-x^4}.$$

Интегрирование методом замены переменной

При использовании формул $\int f\left(\varphi(x)\right)\varphi'(x)dx = \left| t = \varphi(x);\ dt = \varphi'(x)\,dx \right| = \int f(t)dt$

необходимо помнить, что все фигурирующие здесь функции $f(t),\ \varphi(x),\varphi'(x)$ должны быть непрерывными.

Успех интегрирования целиком зависит от того, насколько удачно выбрана подстановка $t=\varphi(x)$. По крайней мере, надо понимать, что после такой подстановки необходимо получить один из табличных интегралов. Например,

$$J_1=\int\frac{dx}{\sqrt{x}+1}=\left|\begin{matrix}x=t^2,\\ dx=2t\cdot dt\end{matrix}\right|=\int\frac{2t\,dt}{\sqrt{t^2}+1}=2\cdot\int\frac{t\,dt}{t+1}=2\cdot\int\frac{(t+1)-1}{t+1}dt=2\cdot\int\left(1-\frac{1}{t+1}\right)dt=$$

$$=2\left(\int dt-\int\frac{dt}{t+1}\right)=2\left(t-\ln|t+1|\right)+C=2t-2\ln|t+1|+C.$$

Теперь вернемся к старой переменной x. При $x=t^2$, $t=\sqrt{x}$, так как $x>0,\ t>0$, поэтому $J_1=2\sqrt{x}-2\ln\left|\sqrt{x}+1\right|+C$.

$$J_2=\int\frac{dx}{x\sqrt{2x+1}}=\left|\begin{matrix}2x+1=t^2,\ 2x=t^2-1,\\ x=\frac{1}{2}\left(t^2-1\right),\ dx=t\cdot dt\end{matrix}\right|=\int\frac{t\cdot dt}{1/2\left(t^2-1\right)\cdot t}=\int\frac{2dt}{t^2-1}=2\int\frac{dt}{t^2-1}=$$

$$=2\cdot\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C\quad(\text{формула}\quad(6)).$$

Из подстановки следует, что $t=\sqrt{2x+1}$, поэтому $J_2=\ln\left|\frac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{2x+1}+1}\right|+C$.

В некоторых примерах подстановка $x=\varphi(t)$ не приводит к цели. Тогда в качестве новой переменной t выбирают часть подынтегральной функции, например,

$$J_3=\int\frac{dx}{e^x+1}=\left|\begin{matrix}e^x+1=t,\ e^x=t-1,\\ x=\ln|t-1|,\ dx=\frac{dt}{t-1}\end{matrix}\right|=\int\frac{\frac{dt}{t-1}}{t}=\int\frac{dt}{t(t-1)}.$$

$$=\int\frac{dt}{t^2-t}=\int\frac{dt}{(t-1/2)^2-(1/2)^2}.$$

Полагая здесь $u=t-1/2,\ a=1/4$, по формуле (6) получаем

$$J_3=\ln\left|\frac{t-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}}{t-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}\right|+C=\ln\left|\frac{t-1}{t}\right|+C=\ln\left|\frac{e^x+1-1}{e^x+1}\right|+C.\quad J_3=\ln\left|\frac{e^x}{e^x+1}+C\right|.$$

$$J_4=\int\frac{\cos x\,dx}{\sqrt{1+\sin^2x}}=\left|\begin{matrix}\sin x=t,\ x=\arcsin t,\\ dt=\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}},\cos x=\sqrt{1-\sin^2x}=\sqrt{1-t^2}\end{matrix}\right|=$$

$$= \int \frac{\sqrt{1-t^2} \cdot \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}}{\sqrt{1+t^2}} = \int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \ln\left|t + \sqrt{1+t^2}\right| + C \quad (\text{формула} \quad (9)).$$

Возвращаясь к старой переменной x, получим $J_4 = \ln\left|\sin x + \sqrt{1+\sin^2 x}\right| + C$.

Интегралы, содержащие квадратный трехчлен

$$J_1 = \int \frac{dx}{x^2 + px + q}, \qquad J_2 = \int \frac{(Ax+B)dx}{x^2 + px + q}$$

$$J_3 = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + px + q}}, \quad J_4 = \int \frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{x^2 + px + q}}.$$

Интеграл J_1 путем выделения из трехчлена полного квадрата приводится к одному из табличных интегралов (5) - (7). Пусть, например, надо найти интеграл $J_1 = \int \frac{dx}{x^2 - 4x + 7}$. Так как $x^2 - 4x + 7 = \left(x^2 - 2 \cdot x \cdot 2 + 2^2\right) + 3 = \left(x - 2^2\right) + \left(\sqrt{3}\right)^2$, найдем

$$J_1 = \int \frac{dx}{(x-2)^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \left| \begin{matrix} x - 2 = t, \ x = t + 2, \\ dx = dt \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{t^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot arctg \frac{t}{\sqrt{3}} + C =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot arctg \frac{x-2}{\sqrt{3}} + C \quad (\textit{формула}\ (5)).$$

Замечание. Здесь использовалась известная формула $(x \pm a)^2 = x^2 \pm 2 \cdot x \cdot a + a^2$. Если в знаменателе стоит неприведенный трехчлен, то старый коэффициент рекомендуется вынести за знак интеграла, например:

$$J_1 = \int \frac{dx}{6x - 3x^2} = \int \frac{dx}{-3\left(x^2 - 2x\right)} = -\frac{1}{3} \cdot \int \frac{dx}{(x-1)^2 - 1^2} = -\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \ln\left|\frac{x-1-1}{x-1+1}\right| + C =$$

$$= -\frac{1}{6} \cdot \ln\left|\frac{x-2}{x}\right| + C.$$

В интеграле J_2 производная знаменателя равна $\left(x^2 + px + q\right)' = 2x + p$ - многочлен первой степени, как и числитель $Ax + B$. Поэтому числитель представляем в форме $Ax + B = M(2x + p) + N$, причем числа M и N находим из условий, что $2M + N = B$. Тогда

$$J_2 = \int \frac{M(2x+p) + N}{x^2 + px + q} dx = M \cdot \int \frac{(2x+p)dx}{x^2 + px + q} + N \int \frac{dx}{x^2 + px + q}.$$ Первый из этих интегралов – табличный $\int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C$, где $t = x^2 + px + q$. Второй интеграл – только что найденный интеграл J_1.

Пример. $J_2 = \int \frac{(3x-2)dx}{x^2-3x+1}$.

Решение. Так как $\left(x^2-3x+1\right)' = 2x-3$, полагаем $3x-2 = M(2x-3)+N$, откуда $2M = 3,\ M = 3/2, -3M + N = -2,\ N = 5/2$,

$$J_2 = \int \frac{3/2\cdot(2x-3)+5/2}{x^2-3x+1}dx = \frac{3}{2}\int\frac{(2x-3)dx}{x^2-3x+1} + \frac{5}{2}\int\frac{dx}{(x-3/2)^2-\left(\sqrt{5}/2\right)^2}$$, так как

$$x^2-3x+1 = \left(x^2-2\cdot x\cdot\frac{3}{2}+\frac{9}{4}\right)-\frac{9}{4}+1 = \left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4} = \left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2,$$

$$J_2 = \frac{3}{2}\cdot\ln\left|x^2-3x+1\right| + \frac{5}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\ln\left|\frac{x-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}}{x-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{5}}{2}}\right| + C,$$

$$J_2 = \frac{3}{2}\cdot\ln\left|x^2-3x+1\right| + \frac{\sqrt{5}}{2}\cdot\ln\left|\frac{2x-3-\sqrt{5}}{2x-3+\sqrt{5}}\right| + C.$$

Интеграл J_3 после выделения из квадратного трехчлена полного квадрата приводится к одному из табличных интегралов (7), (9), (10) $J_3 = \int\frac{dx}{\sqrt{3-2x-x^2}}$. Так как

$$3-2x-x^2 = -\left(x^2+2x-3\right) = -\left(x^2+2x+1-1-3\right) = -\left((x+1)^2-4\right) = 4-(x+1)^2,$$

$J_3 = \int\frac{dx}{\sqrt{2^2-(x+1)^2}} = \arcsin\frac{x+1}{2}+C$. Интеграл J_4 находится подобно интегралу J_2. Выделив из трехчлена полный квадрат, получим

$$J_4 = \int\frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{x^2+px+q}} = \int\frac{M(2x+p)+N}{\sqrt{x^2+px+q}}dx = M\int\frac{(2x+p)dx}{\sqrt{x^2+px+q}} + N\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+px+q}}.$$

Первый из них – это табличный интеграл (3) $\int\frac{du}{\sqrt{u}} = 2\sqrt{u}+C$, а второй – только что найденный интеграл J_3.

$J_4 = \int\frac{xdx}{\sqrt{x^2-3x+2}}$. Так как $\left(x^2-3x+2\right)' = 2x-3$, получим $x = M(2x-3)+N$, откуда $2M = 1,\ -3M+N = 0, M = 1/2,\ N = 3/2$.

$$J_4 = \int\frac{1/2(2x-3)+3/2}{\sqrt{x^2-3x+2}}dx = \frac{1}{2}\int\frac{(2x-3)dx}{\sqrt{x^2-3x+2}} + \frac{3}{2}\cdot\int\frac{dx}{\sqrt{(x-3/2)^2-\left(\sqrt{5}/3\right)^2}}$$, так как

$$x^2-3x+2 = \left(x^2-2\cdot x\cdot\frac{3}{2}+\frac{9}{4}\right)-\frac{9}{4}+2 = \left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{5}{4}.$$

$J_4 = 1/2 \cdot 2 \cdot \sqrt{x^2 - 3x + 2} + 3/2 \cdot \ln\left| x - 3/2 + \sqrt{x^2 - 3x + 2} \right| + C$ (формула (10)).

Замечание. Нахождение чисел M и N основано на известном свойстве многочленов: два многочлена степени «u» тождественно равны тогда и только тогда, когда равны их коэффициенты при одинаковых степенях «x» и равны их свободные члены. Поэтому из условия $Ax + B = M(2x + p) + N$ следует, что $Ax + B = 2M \cdot x + (Mp + N)$, откуда $A = 2M, B = Mp + N$, т. е. $M = \frac{A}{2}$, $N = B - Mp$.

Впрочем в интегралах J_2 и J_4 выделение из числителя дифференциала трехчлена можно провести прямым путем. Пусть, например, надо найти интеграл $J_4 = \frac{(5x-1)dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 7}}$. Здесь $d(x^2 - 4x + 7) = (2x - 4)dx$.

Поэтому $5x - 1 = 5 \cdot \left(x - \frac{1}{5} \right) = \frac{5}{2} \cdot \left(2 \cdot x - \frac{2}{5} \right) = \frac{5}{2} \cdot \left((2 \cdot x - 4) + 4 - \frac{2}{5} \right) =$

$= 5/2 \cdot \left((2x - 4) + \frac{18}{5} \right) = 5/2 \cdot (2x - 4) + 9$,

$$J_4 = \int \frac{5/2 \cdot (2x-4) + 9}{\sqrt{x^2 - 4x + 7}} dx = \frac{5}{2} \cdot \int \frac{(2x-4)dx}{\sqrt{x^2 - 4x + 7}} + 9 \cdot \int \frac{dx}{\sqrt{(x-2)^2 + (\sqrt{3})^2}} =$$

$$= \frac{5}{2} \cdot 2 \cdot \sqrt{x^2 - 4x + 7} + 9 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x-2}{\sqrt{3}} + C.$$

$$J_4 = 5 \cdot \sqrt{x^2 - 4x + 7} + 3\sqrt{3} \cdot \operatorname{arctg} \frac{x-2}{\sqrt{3}} + C.$$

Упражнение

Найти интегралы

$$J_1 = \int \frac{x\,dx}{x^2 + 4}, \quad J_2 = \int \frac{(2x-7)dx}{\sqrt{x^2 + 6x - 4}}, \quad J_3 = \int \frac{(x-1)dx}{x^2 + 3x - 1},$$

$$J_4 = \int \frac{(1+x)dx}{1+\sqrt{x}}, \quad J_5 = \int \frac{e^x dx}{e^x + 1}, \quad J_6 = \int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}.$$

Тема№ 3. Интегрирование по частям

Цель занятия – научиться пользоваться формулой $\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du$ и применять ее к каждому из рассмотренных ниже классов функций.

Если заданный интеграл $J = \int f(x)\,dx$ не может быть найден рассмотренными выше способами, то подынтегральное выражение $f(x)dx$ разбивают на два сомножителя (u и dv) таким образом, чтобы интеграл $\int v\cdot du$ был табличным или сводился к табличному. Единого правила для этого не существует, однако можно провести некоторую классификацию интегралов, которые берутся по частям.

1. Интегралы, содержащие произведение многочлена $P_n(x)$ на тригонометрические или показательные функции. Более точно к **первому классу** относятся интегралы вида

$$J_1=\int P_n(x)\cdot\cos bx\cdot dx,\quad J_2=\int P_n(x)\cdot\sin bx\cdot dx,$$

$$J_3=\int P_n(x)\cdot a^{bx}dx,\; J_4=\int P_n(x)\cdot e^{bx}dx.$$

Так как интегралы от $\cos bx$, $\sin bx$, a^{bx}, e^{bx} по существу табличные, то в этих примерах мешает интегрированию многочлен $P_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$. От него можно освободиться путем n-кратного дифференцирования, так как при каждом дифференцировании степень многочлена понижается на одну единицу. Поэтому во всех примерах в качестве функции u берут многочлен, т.е. полагают, что $u=P_n(x)$. Приведем примеры.

$$J_1=\int(2x-1)\cos 3x\cdot dx=\left|\begin{array}{ll} u=2x-1, & dv=\cos 3x\cdot dx, \\ du=2\cdot dx & v=\int\cos 3x\cdot dx=\frac{1}{3}\sin 3x \end{array}\right|=$$

$$=\frac{1}{3}(2x-1)\cdot\sin 3x-\int\frac{1}{3}\cdot\sin 3x\cdot 2dx=\frac{1}{3}(2x-1)\cdot\sin 3x-\frac{2}{3}\cdot\int\sin 3x\cdot dx.$$

$$J_1=\frac{1}{3}\cdot(2x-1)\cdot\sin 3x+\frac{2}{9}\cdot\cos 3x+C,$$

$$J_2=\int x^2\cdot e^{-\frac{1}{2}x}\cdot dx=\left|\begin{array}{ll} u=x^2, & du=e^{-\frac{1}{2}x}dx \\ du=2x\cdot dx & v=\int e^{-\frac{1}{2}x}dx=-2\cdot e^{-\frac{1}{2}x} \end{array}\right|=$$

$$=-2x^2\cdot e^{-\frac{1}{2}x}-\int\left(-2\cdot e^{-\frac{1}{2}x}\right)\cdot 2x\cdot dx=-2x^2\cdot e^{-\frac{1}{2}x}+4\cdot\int x\cdot e^{-\frac{1}{2}x}dx.$$

Окончательно можно записать:

$$J_4=\int x^2\cdot e^{-\frac{1}{2}x}dx=-2x^2e^{-\frac{1}{2}x}+4\left(-2x\cdot e^{-\frac{1}{2}x}-4e^{-\frac{1}{2}x}\right)+C,$$

$$J_4=-2x^2e^{-\frac{1}{2}x}-8x\cdot e^{-\frac{1}{2}x}-16\cdot e^{-\frac{1}{2}x}+C=-2e^{-\frac{1}{2}x}\left(x^2+4x+8\right)+C.$$

Замечание. Обратите внимание, что здесь был дан одночлен второй степени, т. е. $P_2(x)=x^2$. Поэтому формула интегрирования по частям применялась дважды.

2. Так называемые **циклические интегралы.** К ним относятся интегралы вида

$$J_1=\int e^{ax}\cos bx\,dx,\qquad J_2=\int e^{ax}\sin bx\,dx,$$

$$J_3=\int \sec^3 bx\,dx=\int\frac{dx}{\cos^3 bx}\ ,\quad J_4=\int \operatorname{cosec}^3 bx\,dx=\int\frac{dx}{\sin^3 bx}.$$

В интегралах J_1 и J_2 надо дважды применить формулу интегрирования по частям, причем разбиение подынтегрального выражения на u и dv можно выполнить по-разному. Найдем, например, интеграл J_1.

$$J_1=\int e^{ax}\cos bx\,dx=\begin{vmatrix} u=e^{ax}, & dv=\cos bx\cdot dx\ , \\ du=a\cdot e^{ax}dx \leftrightarrow & v=\frac{1}{b}\sin bx \end{vmatrix}=\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx-\frac{a}{b}\int e^{ax}\sin bx\cdot dx.$$

Повторяем этот процесс.

$$\int e^{ax}\sin bx\cdot dx=\begin{vmatrix} u=e^{ax}\ , & dv=\sin bx\cdot dx, \\ du=a\cdot e^{ax}dx \leftrightarrow & v=-\frac{1}{b}\cos bx \end{vmatrix}=-\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx+\frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx\cdot dx.$$

$$J_1=\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx-\frac{a}{b}\left(-\frac{1}{b}e^{ax}\cos bx+\frac{a}{b}\int e^{ax}\cos bx\cdot dx\right).$$

Здесь в правой части находится исходный интеграл J_1.

$J_1=\frac{1}{b}e^{ax}\sin bx+\frac{a}{b^2}e^{ax}\cos bx-\frac{a^2}{b^2}\cdot J_1$. Решив это уравнение относительно J_1, найдем

$$\left(1+\frac{a^2}{b^2}\right)\cdot J_1=e^{ax}\left(\frac{1}{b}\sin bx+\frac{a}{b^2}\cos bx\right),\qquad \frac{a^2+b^2}{b^2}J_1=\frac{e^{ax}}{b^2}\left(b\cdot\sin bx+a\cdot\cos bx\right),$$

$$J_1=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left(b\cdot\sin bx+a\cdot\cos bx\right)+C.$$

Аналогично доказывается, что интеграл J_2 определяется формулой

$J_2=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}\left(a\cdot\sin bx-b\cdot\cos bx\right)+C$. Для нахождения интегралов J_3, J_4 достаточно один раз применить формулу интегрирования по частям, а затем воспользоваться формулами тригонометрии. Например,

$$J_3=\int \sec^3 x\cdot dx=\begin{vmatrix} u=\sec x,\ dv=\sec^2 x\cdot dx \\ du=\sec x\cdot tgx\cdot dx,\ v=\int \sec^2 x\cdot dx=tgx \end{vmatrix}=$$

$$=\sec x\cdot tgx-\int tg^2x\cdot\sec x\cdot dx.$$

Так как $1+tg^2x=\sec^2 x$, то $tg^2x=\sec^2 x-1$, поэтому

$$J_3=\sec x\cdot tgx-\int\left(\sec^2 x-1\right)\sec x\cdot dx=\sec x\cdot tgx-\int \sec^3 x\cdot dx+\int \sec x\cdot dx,$$

$J_3=\sec x\cdot tgx-J_3+\ln\left|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|$. Отсюда следует, что

$$2J_3 = \sec x \cdot \mathrm{tg}x + \ln\left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + 2C$$

$J_3 = \frac{1}{2}\sec x \cdot \mathrm{tg}x + \frac{1}{2}\ln\left|\,\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C$. Как видно, циклические интегралы находятся довольно громоздким способом, поэтому они внесены в таблицу интегралов под номерами $(11)-(14)$.

3. К **третьему классу** относятся некоторые интегралы, содержащие аркусы или логарифмы в сочетании с многочленами: $J_1 = \int P_n(x)\arcsin bx \cdot dx$, $J_2 = \int P_n(x)\ln^k bx \cdot dx, \ldots.$ Так как в таблице нет интегралов от аркусов или логарифмов, то эти функции надо «убить» с помощью дифференцирования. Поэтому в качестве функции u берем $u = \arcsin bx$ или $u = \ln^k bx$.

$$J_1 = \int \arcsin x \cdot dx = \left| \begin{array}{ll} u = \arcsin x & dv = dx \\ du = \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} & v = x \end{array} \right| = x \cdot \arcsin x - \int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} =$$

$$= x \cdot \arcsin x - \int (1-x)^{-1/2} x \cdot dx = x \cdot \arcsin x + 1/2 \cdot \int (1-x^2)^{-1/2} \cdot d(1-x^2) =$$

$$= x \cdot \arcsin x + \frac{1}{2} \cdot \frac{(1-x^2)^{1/2}}{1/2} + C.$$

$$J_1 = x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C,$$

$$J_2 = \int x \cdot \ln^2 x \cdot dx = \left| \begin{array}{ll} u = \ln^2 x & dv = x \cdot dx \\ du = 2\ln x \dfrac{dx}{x} & v = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2}\ln^2 x - \int \frac{x^2}{2} \cdot 2\ln x \cdot \frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln^2 x - \int x \cdot \ln x \cdot dx.$$

Полученный интеграл снова берем по частям.

$$\int x \cdot \ln x \cdot dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x, \quad dv = xdx \\ du = \dfrac{dx}{x}, \quad v = \dfrac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{dx}{x} =$$

$$= \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} + C.$$

Окончательно получаем $J_2 = \int x \cdot \ln^2 x \cdot dx = \frac{x^2}{2}\ln^2 x - \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4} + C$,

$$J_2 = \int x \cdot \ln^2 x \cdot dx = \frac{x^2}{4}\left(2\ln^2 x - 2\ln x + 1\right) + C.$$

Замечание. Указанные три класса не исчерпывают многообразия всех случаев применения формулы интегрирования по частям. Например, интеграл $J=\int \sin\ln x\cdot dx$ относится к числу циклических. Действительно, полагая

$u=\sin\ln x,\quad dv=dx$ получим $du=\cos\ln x\dfrac{dx}{x},\ \ v=x$,

$$J=x\cdot\sin\ln x-\int x\cdot\cos\ln x\cdot\frac{dx}{x}=x\cdot\sin\ln x-\int\cos\ln x\cdot dx.$$

Полученный интеграл снова находим по частям

$$\int\cos\ln x\cdot dx=\left|\begin{matrix}u=\cos\ln x, & dv=dx\\ du=-\sin\ln x\dfrac{dx}{x}, & v=x\end{matrix}\right|=x\cdot\cos\ln x+\int\sin\ln x\cdot dx.$$

Итак, $\int\sin\ln x\cdot dx=x\cdot\sin\ln x-x\cdot\cos\ln x-\int\sin\ln x\cdot dx$.

Отсюда $2\int\sin\ln x\cdot dx=x\cdot(\sin\ln x-\cos\ln x)$, $\int\sin\ln x\cdot dx=\dfrac{1}{2}x\cdot(\sin\ln x-\cos\ln x)+C$.

Замечание. Во многих случаях приходится применять оба способа – замену переменной и интегрирование по частям, например, $J=\int x\cdot e^{\sqrt{x}}\cdot dx=\Big|\,x=t^2,$

$dx=2t\cdot dt\Big|=\int t^2\cdot e^t\cdot 2t\cdot dt=2\int t^3\cdot e^t\cdot dt$.

Интегрируя по частям трижды, находим, что

$J=e^t\left(t^3-3t^2+6t-6\right)+C$, где $t=\sqrt{x}$. После подстановки

$J=e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x^3}-3x+6\sqrt{x}-6\right)+C$.

Тема № 4. Интегрирование рациональных дробей

Цель занятия – научиться разлагать рациональные дроби на простейшие, научиться интегрировать простейшие рациональные дроби.

Изучив оба метода интегрирования: замену переменной и интегрирование по частям, перейдем к нахождению интегралов от различных классов элементарных функций.

Определение. Рациональной дробью называется отношение двух многочленов:

$$R(x)=\frac{Q_m(x)}{P_n(x)}=\frac{b_0x^m+b_1x^{m-1}+..+b_m}{a_0x^n+a_1x^{n-1}+...+a_n}.$$

В последующем постоянно предполагается, что дробь $R(x)$ **несократима**, т.е. многочлены $Q_m(x)$ и $P_n(x)$ не имеют общих корней. Рациональная дробь $R(x)$ называется **правильной**, если $m<n$, и **неправильной**, если $m\geq n$. Рассмотрим несколько примеров.

$$R_1(x)=\frac{1}{x^2-3},\quad R_2(x)=\frac{2x-1}{x^2+4x+4},\quad R_3(x)=\frac{x^5-4x^3+5x^2-7}{x^3-2x^2+4x+1}.$$

Здесь дробь $R_1(x)$ правильная, так как $m=0,\ n=2$; дробь $R_2(x)$ также правильная, так как $m=1,\ n=2$; дробь $R_3(x)$ неправильная, так как $m=5,\ n=3$. Если дробь неправильная, то, разделив числитель на знаменатель, можно получить целую часть этой дроби – многочлен степени $m-n$, плюс некоторую правильную рациональную дробь. Таким образом, неправильная рациональная дробь представлена в виде $R(x)=S_{m-n}(x)+R_0(x)$, где $S_{m-n}(x)$ - многочлен степени $m-n$, а $R_0(x)$- правильная рациональная дробь.

Пример. Выделить целую часть дроби $R_3(x)=\dfrac{x^5-4x^3+5x^2-7}{x^3-2x^2+4x+1}$.

Делим числитель на знаменатель «углом»:

$$
\begin{array}{rl|l}
\_ & x^5-4x^3+5x^2-7 & \underline{x^3-2x^2+4x+1} \\
 & \underline{x^5-2x^4+4x^3+x^2} & x^2+2x-4 \quad (\text{частное}) \\
\_ & 2x^4-8x^3+4x^2-7 & \\
 & \underline{2x^4-4x^3+8x^2+2x} & \\
 & -4x^3-4x^2-2x-7 & \\
- & \underline{4x^3+8x^2-16x-4} & \\
 & -12x^2+14x-3 \quad (\text{остаток}) &
\end{array}
$$

$$R_3(x)=\frac{x^5-4x^3+5x^2-7}{x^3-2x^2+4x+1}=x^2+2x-4+\frac{-12x^2+14x-3}{x^3-2x^2+4x+1}.$$

Замечание. В простейших случаях, когда, например, $m=n=1$, эту работу можно выполнить быстрее:

$$R_1(x)=\frac{x-1}{x+1}=\frac{(x+1)-2}{x+1}=1-\frac{2}{x+1},$$

$$R_2(x)=\frac{3x+5}{x-1}=\frac{(3x-3)+5+3}{x-1}=\frac{3(x-1)+8}{x-1}=3+\frac{8}{x-1}.$$

Поскольку интегрирование многочлена не представляет труда, то по существу, дело сводится к интегрированию правильных рациональных дробей. Для этого потребуются некоторые новые понятия.

Хорошо известно, что квадратный трехчлен с вещественными корнями x_1 и x_2 разлагается на линейные множители: $x^2+px+q=(x-x_1)\cdot(x-x_2)$.

В общем случае многочлен степени n разлагается на произведение линейных и квадратных множителей вида

$$P_n(x)=(x-x_1)\ldots(x-x_2)^k\cdot(x^2+p_1x+q_1)\ldots(x^2+p_2x+q_2)^e,$$

причем указанные трехчлены не имеют вещественных корней. При этом говорят, что корень $x=x_1$ - **простой**, корень $x=x_2$ имеет **кратность** к.

Примеры

Многочлен $P_3(x)=x^3-x=x(x-1)(x+1)$ имеет простые вещественные корни $x_1=0,\ x_2=1,\ x_3=-1$.

Решение. Многочлен $P_4(x)=x^2(x+2)(x^2-x+4)$ имеет вещественный простой корень $x=-2$; двукратный корень $x=0$.

Определение. Следующие рациональные дроби называются **простейшими первого, второго, третьего и четвертого типов:** $R_1(x)=\dfrac{A}{x-x_0}$, $R_2(x)=\dfrac{A}{(x-x_0)^k}$

$$R_3(x)=\frac{Ax+B}{x^2+px+q},\ R_4(x)=\frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^k}.$$

Здесь A,B,p,q,k,x_0- заданные числа, $k\in N$.

В последующем постоянно предполагается, что трехчлен x^2+px+q не имеет вещественных корней и, следовательно, не разлагается на линейные множители.

Примеры. Рассмотрим дроби

$$R_1(x)=\frac{1}{x+1},\ R_2(x)=\frac{3}{(x-1)^2},\ R_3(x)=\frac{1}{x^2-4x+8},\ R_4(x)=\frac{2x-1}{\left(x^2-4x+8\right)^2}.$$

Здесь $R_1(x)$- дробь первого типа, причем $x_0=-2$, $R_2(x)$- дробь второго типа, где $x_0=1$, $k=2$. $R_3(x)$- дробь третьего типа, где $A=0, B=1$, причем трехчлен x^2-4x+8 вещественных корней не имеет. Дробь $R_4(x)$ принадлежит к четвертому типом, где $A=2$, $B=-1$, $k=2$.

Дроби $R_1(x)=1/x$ и $R_2(x)=1/x^3$принадлежат соответственно к первому и второму типам, причем $x_0=0$.

Теорема о разложении рациональной дроби. Всякая правильная рациональная дробь разлагается в сумму простейших дробей первого – четвертого типов. При этом если $x=x_0$ - **простой** вещественный корень знаменателя $P_n(x)$, то в разложении ему соответствует дробь первого типа $\dfrac{A}{x-x_0}$; если $x=x_0$ - вещественный корень кратностью k, то в разложении ему соответствует сумма k дробей первого и второго типов:

$\dfrac{A_1}{x-x_0}+\dfrac{A_2}{\left(x-x_0\right)^2}+\ldots+\dfrac{A_k}{\left(x-x_0\right)^k}$; если в знаменателе $P_n(x)$ имеется трехчлен $x^2+p_1x+q_1$без вещественных корней, то в разложении дроби ему соответствует дробь третьего типа $\dfrac{Ax+B}{x^2+p_1x+q_1}$; если, наконец, знаменатель $P_n(x)$ содержит множитель $(x^2+p_2x+q_2)^k$, то в разложении ему соответствует сумма «k» дробей третьего и четвертого типов: $\dfrac{A_1x+B_1}{x^2+p_2x+q_2}+\dfrac{A_2x+B_2}{\left(x^2+p_2x+q_2\right)^2}+\ldots+\dfrac{A_kx+B_c}{\left(x^2+p_2x+q_2\right)^k}$.

Таким образом, разложение дроби $R(x)=\dfrac{Q_m(x)}{P_n(x)}$существенно зависит от того, какие корни имеет знаменатель $P_n(x)$. Поэтому разложение рекомендуется проводить по следующей схеме.

1. Найти все корни знаменателя $P_n(x)$ и определить их кратность.

2. Написать разложение $P_n(x)$ на линейные и квадратные множители.

3. Написать сумму простейших дробей в соответствии с полученным разложением знаменателя.

Пример 1. Разложить дробь $R_1(x)=\dfrac{2x^2-3x-3}{x^3-2x^2+x}$.

Решение. Здесь знаменатель имеет разложение $P_3(x)=x^3-2x^2+x=$ $=x\left(x^2-2x+1\right)=x(x-1)^2$. Отсюда следует, что $x_1=0$ - простой вещественный корень, ему соответствует дробь $\dfrac{A}{x}$; $x_2=1$- вещественный двукратный корень, ему соответствует сумма дробей $\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{C}{(x-1)^2}$. Поэтому данная дробь представлена суммой $R_1(x)=\dfrac{2x^2-3x-3}{x^3-2x^2+x}=\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x-1}+\dfrac{C}{(x-1)^2}$.

Пример 2. Разложить дробь $R_2(x)=\dfrac{1}{x^3+1}$.

Решение. Здесь $x^3+1=(x+1)\cdot(x^2-x+1)$, причем трехчлен вещественных корней не имеет, поэтому $R_2(x)=\dfrac{1}{x^3+1}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{Bx+C}{x^2-x+1}$.

Пример 3. Разложить дробь $R(x)=\dfrac{2x-1}{\left(x^2-4\right)\cdot\left(x^2+4\right)}$.

Решение. Здесь знаменатель $P_4(x)=(x^2-4)\cdot(x^2+4)=(x-2)\cdot(x+2)\cdot(x^2+4)$ имеет вещественные простые корни: $x_1=2, x_2=-2$. Двучлен x^2+4 вещественных корней не имеет: если $x^2+4=0$, то $x^2=-4$, $x=\pm\sqrt{-4}$. Поэтому разло-жение дроби имеет вид

$$R(x)=\frac{2x-1}{(x^2-4)\cdot(x^2+4)}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x+2}+\frac{Cx+D}{x^2+4}.$$

Теперь перейдем к нахождению неопределенных **коэффициентов** разложения: A, B, C,…. Существуют **два способа** их определения. Поскольку оба способа достаточно простые, рассмотрим их на конкретных примерах.

Первый способ. Дробь $R_1(x)$ представлена в виде

$$R_1(x)=\frac{2x^2-3x-3}{x^3-2x^2+x}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{(x-1)^2}=\frac{A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx}{x(x-1)^2}.$$

Поскольку здесь знаменатели равны, то должны быть равны и числители. $2x^2-3x-3=A(x-1)^2+Bx(x-1)+Cx$. Имеет место равенство двух многочленов, которое выполняется тождественно, т.е. при любых значениям «x».

Пусть, например, $x=0$, тогда $-3=A$, $A=-3$; при $x=1$ $-4=C$, $C=-4$; при $x=-1$ $2=4A+2B-C$, $B=5$. Таким образом, получили разложение дроби $R_1(x)=\dfrac{2x^2-3x-3}{x^3-2x^2+x}=-\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x-1}-\dfrac{4}{(x-1)^2}$.

Замечание. Нахождение неопределенных коэффициентов A, B, C, … упрощается, если в качестве значений «x» брать корни знаменателя.

Второй способ покажем на следующем примере:

$$R_2(x)=\frac{1}{x^3+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1}=\frac{A(x^2-x+1)+(Bx+C)\cdot(x+1)}{(x+1)\cdot(x^2-x+1)},$$

$1=A(x^2-x+1)+(Bx+C)(x+1)$. В правой части раскроем скобки и приведем подобные члены, тогда $1=(A+B)\cdot x^2+(-A+B+C)x+(A+C)$ или $0\cdot x^2+0\cdot x+1=(A+B)x^2+(-A+B+C)x+(A+C)$. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x и свободные члены, получаем систему линейных уравнений относительно A, B, C: $A+B=0$, $-A+B+C=0$, $A+C=1$. Решив эту систему способом подстановки (или по формулам Крамера), получим $B=-A$, $C=1-A$. Подставим эти значения во второе равенство: $-A-A+1-A=0$, $3A=1$, $A=1/3$, $B=-1/2$, $C=2/3$. Получаем разложение дроби $R_2(x)=\dfrac{1}{x^3+1}=\dfrac{1/3}{x+1}+\dfrac{-1/3\cdot x+2/3}{x^2-x+1}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{x-2}{x^2-x+1}$.

Замечание. Результат вычислений всегда можно проверить. Так, в последнем примере

$$R_2(x)=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{x+1}-\frac{x-2}{x^2-x+1}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{x^2-x+1-x^2-x+2x+2}{(x+1)\cdot(x^2-x+1)}=\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{x^3+1}=\frac{1}{x^3+1}.$$

Упражнение. Разложить на простейшие дробь $R_3(x)=\dfrac{2x-1}{(x^2-4)\cdot(x^2+4)}$.

Разложив дробь $R(x)$ на простейшие и проинтегрировав полученное равенство, получим в правой части (в общем случае) **сумму следующих четырех интегралов**:

$$J_1=\int\frac{A}{x-x_0}dx,\qquad J_2=\int\frac{A}{(x-x_0)^k}dx,$$

$$J_3=\int\frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx,\qquad J_4=\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^k}dx$$

Первый из них по существу табличный: $J_1=A\cdot\displaystyle\int\frac{dx}{x-x_0}=A\cdot\ln|x-x_0|+C$. Второй интеграл степенной:

$$J_2=A\cdot\int\frac{dx}{(x-x_0)^k}=A\cdot\int(x-x_0)^{-k}\cdot dx=A\cdot\frac{(x-x_0)^{-k+1}}{-k+1}+C.$$

Третий интеграл был рассмотрен выше.

Рассмотрим подробнее интеграл J_4, $k \ge 2$. Так как $\left(x^2+px+q\right)' = 2x+p$, числитель представляем в виде $Ax+B = M(2x+p)+N$,

$$J_4 = \int \frac{M(2x+p)+N}{\left(x^2+px+q\right)^k}dx = M\cdot\int\frac{(2x+p)dx}{\left(x^2+px+q\right)^k} + N\cdot\int\frac{dx}{\left(x^2+px+q\right)^k} = M\cdot J_0^{\bullet} + N\cdot J_k^{\bullet}.$$

Интеграл $J_0^{\bullet}$ степенной, так как

$$J_0^{\bullet} = \int\left(x^2+px+q\right)^k\cdot d\left(x^2+px+q\right) = \frac{\left(x^2+px+q\right)^{-k+1}}{-k+1}+C.$$

Для нахождения интеграла J_k выделим из трехчлена полный квадрат:

$$x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\frac{4q-p^2}{4} = u^2+a^2,\ u = x+\frac{p}{2},\ a = \frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}.$$

Тогда $J_k = \int\frac{du}{\left(u^2+a^2\right)^k}$. Этот интеграл находится с помощью рекуррентного соотношения (15). Впрочем интеграл может быть найдем с помощью тригонометрической подстановки $u = a\cdot\operatorname{tg}t,\ du = a\sec^2 t\cdot dt$.

Пример. Найти интеграл $J = \int\frac{x-1}{(x^2+2x+2)^2}dx$.

Решение. Так как $(x^2+2x+2)' = 2x+2$, получим $x-1 = M\cdot(2x+2)+N$. Тогда $2M=1,\ 2M+N=-1,\ M=1/2,\ N=-2,\ x-1 = 1/2\cdot(2x+2)-2$.

$$J = \int\frac{(2x+2)/2-2}{\left(x^2+2x+2\right)^2}\cdot dx = \frac{1}{2}\cdot\int\frac{(2x+2)dx}{\left(x^2+2x+2\right)^2} - 2\cdot\int\frac{dx}{\left(x^2+2x+2\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\int\left(x^2+2x+2\right)^{-2}\cdot d\left(x^2+2x+2\right) - 2\cdot\int\frac{dx}{\left((x+1)^2+1^2\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\left(x^2+2x+2\right)^{-1}}{-1} - 2\cdot\int\frac{du}{(u^2+1^2)^2},\quad \text{где } u = x+1.$$

$J = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+2x+2} - 2\cdot J_2$. Полагая в формуле (15) $k=1$, получим

$J_2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{u}{(u^2+1)} + \frac{1}{2}\cdot J_1$, где $J_1 = \int\frac{du}{u^2+1} = \operatorname{arctg}u$,

$J_2 = \frac{u}{2(u^2+1)} + \frac{1}{2}\cdot\operatorname{arctg}u = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{u}{u^2+1}+\operatorname{arctg}u\right)$, $u = x+1$. Окончательно находим

$$J = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x^2+2x+2} - \frac{x+1}{x^2+2x+2} - \operatorname{arctg}(x+1)+C,$$

$$J = -\frac{2x+3}{2(x^2+2x+2)} - \operatorname{arctg}(x+1)+C.$$

Для сравнения найдем $J_2 = \int \frac{du}{(u^2+1)^2}$, где $u = x+1$ с помощью подстановки $u = tg\,t$, $du = \sec^2 t \cdot dt$. Тогда $u^2+1 = tg^2 t + 1 = \sec^2 t$. Поэтому

$J_2 = \int \frac{\sec^2 t \cdot dt}{\sec^4 t} = \int \frac{dt}{\sec^2 t} = \int \cos^2 t \cdot dt$. Так как $1 + \cos 2t = 2\cos^2 t$, получим

$\cos^2 t = \frac{1+\cos 2t}{2}$, $J_2 = \int \frac{1+\cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2} \cdot \int dt + \frac{1}{2} \cdot \int \cos 2t \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot t + \frac{1}{4} \sin 2t + C$.

Из подстановки следует, что $t = arctg\,u = arctg(x+1)$,

$$\sin 2t = 2 \cdot \sin t \cdot \cos t = 2 \cdot \frac{tgt}{\sqrt{1+tg^2 t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+tg^2 t}} = 2 \cdot \frac{2u}{1+u^2} = \frac{2(x+1)}{x^2+2x+2},$$

$$J_2 = \frac{1}{2} \cdot arctg(x+1) + \frac{(x+1)}{2\left(x^2+2x+2\right)} + C.$$

Решить примеры

$$J_1 = \int \frac{x^3-2}{x^4-2x^2-8}, \quad J_2 = \int \frac{3x-7}{x^3+x^2+4x+4} dx,$$

$$J_3 = \int \frac{x^2-x-1}{x^4-x} dx, \quad J_4 = \int \frac{2x+1}{(x^2-4x+5)^2}.$$

Тема № 5. Интегрирование иррациональных функций

Цель занятия - научиться брать интегралы видов:

$$J_1 = \int f\left(x, \sqrt[m]{x^p}, \ldots, \sqrt[n]{x^q}\right) \cdot dx, \qquad J_2 = \int f\left(x, \sqrt[m]{(ax+b)^p}, \ldots, \sqrt[n]{(ax+b)^q} dx\right),$$

$$J_3 = \int f\left(x, \sqrt[m]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^p}, \ldots, \sqrt[n]{\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^q} \right) \cdot dx, \qquad J_4 = \int f\left(x, \sqrt{a^2-x^2}\right) \cdot dx,$$

$$J_5 = \int f\left(x, \sqrt{a^2+x^2}\right) \cdot dx, \qquad J_6 = \int f\left(x, \sqrt{x^2-a^2}\right) \cdot dx.$$

Здесь предполагается, что подынтегральная функция f рациональна относительно всех своих аргументов. Эти интегралы находятся по одной схеме: необходимо выбрать подстановку таким образом, чтобы все радикалы исчезли, т. е. чтобы после замены переменной были получены интегралы от рациональных функций относительно новой переменной t.

В первом случае к цели приводит подстановка $x = t^k$, где $K = \text{н.о.к}\{m_1, \ldots, n\}$, $dx = к \cdot t^{k-1} \cdot dt$.

Пример. $J_1 = \int \frac{\sqrt[3]{ч}-1}{\sqrt{x}+1}$.

Решение. Здесь $K = \text{н.о.к}\{3,2\} = 6$, поэтому $x = t^6, dx = 6t^5 dt$. После замены получим

$$J_1 = \int \frac{\sqrt[3]{t^6} - 1}{\sqrt{t^6} + 1} \cdot t^5 \cdot dt = 6 \cdot \int \frac{(t^2 - 1) \cdot t^5}{t^3 + 1} \cdot dt = 6 \cdot \int \frac{(t-1)\cdot(t+1)\cdot t^5}{(t+1)\cdot(t^2 - t + 1)} \cdot dt =$$

$$= 6 \cdot \int \frac{t^6 - t^5}{t^2 - t + 1} \cdot dt$$

Это интеграл от неправильной рациональной дроби. Разделив числитель на знаменатель, получим

$$J_1 = 6 \cdot \int \left(t^4 - t^2 - t + \frac{t}{t^2 - t + 1} \right) \cdot dt = 6 \cdot \frac{t^5}{5} - 6 \cdot \frac{t^3}{3} - 6 \cdot \frac{t^2}{2} + 6 \cdot \int \frac{t\,dt}{t^2 - t + 1}.$$

Так как $(t^2 - t + 1)' = 2t - 1$, получим

$t = M(2t-1) + N,\ 2M = 1,\ -M + N = 0,\ M = 1/2,\ N = 1/2$.

Тогда $J_1 = \dfrac{6}{5} t^5 - 2t^3 - 3t^2 + 6 \cdot \displaystyle\int \frac{(2t-1)/2 + 1/2}{t^2 - t + 1} \cdot dt =$

$$= \frac{6}{5} t^5 - 2t^3 - 3t^2 + 3 \cdot \left(\int \frac{(2t-1)dt}{t^2 - t + 1} + \int \frac{dt}{(t - 1/2)^2 + (\sqrt{3}/2)^2} \right).$$

$$J_1 = \frac{6}{5} t^5 - 2t^3 - 3t^2 + 3\ln\left| t^2 - t + 1 \right| + 2\sqrt{3} \cdot \operatorname{arctg} \frac{2t - 1}{\sqrt{3}} + C.$$

Так как $x = t^6$, $t = \sqrt[6]{x}$, находим

$$J_1 = \frac{6}{5} \cdot \sqrt[6]{x^5} - 2 \cdot \sqrt[6]{x^3} - 3 \cdot \sqrt[6]{x^2} + 3 \cdot \ln\left| \sqrt[6]{x^2} - \sqrt[6]{x} + 1 \right| + 2\sqrt{3} \cdot \operatorname{arctg} \frac{2\sqrt[6]{x}}{\sqrt{3}} + C,$$

$$J_1 = \frac{6}{5} \cdot \sqrt[6]{x^5} - 2 \cdot \sqrt{x} - 3 \cdot \sqrt{x} + 3 \cdot \ln\left| \sqrt[3]{x} - \sqrt[6]{x} + 1 \right| + 2\sqrt{3} \cdot \operatorname{arctg} \frac{2 \cdot \sqrt[6]{x} - 1}{\sqrt{3}} + C.$$

Интеграл J_2 берется аналогично: $ax + b = t^k$, где $k = \text{н.о.к.}\{m, \ldots, n\}$. Тогда $x = 1/a(t^k - b)$, $dx = k/a \cdot t^{k-1} \cdot dt$.

Пример. Найти интеграл $J_2 = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{2x-1} - \sqrt[4]{2x-1}}$.

Решение. Здесь полагаем, что $2x - 1 = t^4$, $x = \dfrac{t^4 + 1}{2}$, $dx = 2t^3 dt$.

$$J_2 = \int \frac{2t^3 dt}{t^2 - t} = 2 \cdot \int \frac{t^3 dt}{t(t-1)} = 2 \cdot \int \frac{(t^2 - 1) + 1}{t - 1} \cdot dt = 2 \cdot \int \left(t + 1 + \frac{1}{t-1} \right) \cdot dt,$$

$J_2 = 2 \cdot \left(t^2/2 + t + \ln|t - 1| \right) + C$, где $t = \sqrt[4]{2x-1}$,

$J_2 = \sqrt{2x-1} + 2 \cdot \sqrt[4]{2x-1} + \ln\left| \sqrt[4]{2x-1} - 1 \right| C$. Для интеграла J_3 берем подстановку

$\frac{ax+b}{cx+d}=t^k$, где $k = \text{нок}\ \{m,\dots,n\}$. Из подстановки находим x и затем dx. После замены переменных получим снова интеграл от рациональной дроби.

Пример. Найти интеграл $J_3 = \int \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \cdot \frac{dx}{x}$.

Решение. $\frac{1-x}{1+x} = t^2$**.** Отсюда находим x и dx: $1-x = t^2 + t^2x$, $-x - t^2x = t^2 - 1$,

$$-x\left(t^2+1\right) = t^2 - 1,\ x = -\frac{t^2-1}{t^2+1},$$

$$dx = -\left(\frac{t^2-1}{t^2+1}\right)' \cdot dt = -\frac{2t\cdot\left(t^2+1\right) - 2t\cdot\left(t^2-1\right)}{\left(t^2+1\right)^2} \cdot dt = -\frac{4t^2dt}{\left(t^2+1\right)^2}.$$

После замены переменных получим интеграл от рациональной дроби $J_3 = -4\cdot\int\frac{t^2dt}{\left(t^2-1\right)\left(t^2+1\right)}$. Разлагаем дробь на простейшие:

$$\frac{t^2}{(t-1)\cdot(t+1)\cdot\left(t^2+1\right)} = \frac{A}{t-1} + \frac{B}{t+1} + \frac{Ct+D}{t^2+1},$$

$$t^2 = A\cdot(t+1)\cdot\left(t^2+1\right) + B\cdot(t-1)\cdot\left(t^2+1\right) + (Ct+D)\left(t^2-1\right).$$

$$\begin{array}{l} t=0, \\ t=1, \\ t=-1, \\ t=2 \end{array} \left\{\begin{array}{l} 0 = A - B - D \\ 1 = 4A \\ 1 = -4B \\ 4 = 15A + 5B + 6C + 3D \end{array}\right. \qquad \left\{\begin{array}{l} A - B - D = 0 \\ A = 1/4 \\ B = -1/4 \\ 15A + 5B + 6C + 3D = 4 \end{array}\right.$$

Решив систему уравнений, получим $A = 1/4,\ B = -1/4,\ C = 0,\ D = 1/2$,

$$\frac{t^2}{\left(t^2-1\right)\cdot\left(t^2+1\right)} = \frac{1/4}{t-1} - \frac{1/4}{t+1} + \frac{1/2}{t^2+1}.$$

Интегрируя почленно, найдем

$$J_3 = -4\cdot\left(\frac{1}{4}\cdot\int\frac{dt}{t-1} - \frac{1}{4}\cdot\int\frac{dt}{t+1} + \frac{1}{2}\cdot\int\frac{dt}{t^2+1}\right), J_3 = -\ln|t-1| + \ln|t+1| - 2\cdot\operatorname{arctg} t + C,$$

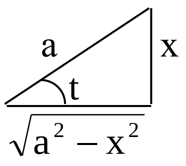
$J_3 = \ln\left|\frac{t+1}{t-1}\right| - 2\cdot\operatorname{arctg} t + C$. Из подстановки следует, что $t = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}$,

$$J_3 = \ln\left|\frac{\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}+1}{\frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}-1}\right| - 2\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C.\ J_3 = \ln\left|\frac{\sqrt{1-x}+\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}-\sqrt{1+x}}\right| - 2\cdot\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} + C.$$

Тригонометрические подстановки

Интегралы J_4, J_5, J_6 удобно находить с помощью тригонометрических подстановок. При этом часто используются тригонометрические тождества
$\sin^2 t + \cos^2 t = 1,\ \ 1 + \mathrm{tg}^2 t = \sec^2 t,\ \ 1 + \mathrm{ctg}^2 t = \mathrm{cosec}^2 t$.

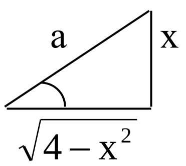
В интеграле $J_4 = \int f\left(x, \sqrt{a^2 - x^2}\right)dx$ к цели приводит подстановка $x = a \cdot \sin t$, $dx = a \cdot \cos t \cdot dt,\ \sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t} = a \cdot \cos t$. В итоге получаем интеграл $J_4 = \int f(a \cdot \sin t, a \cdot \cos t) \cdot a \cdot \cos t \cdot dt$, не содержащий иррациональностей.



При этом возврат к старой переменной «x» проще выполнить с помощью прямоугольного треугольника. Так как $\sin t = x / a$, то получаем треугольник со сторонами (теорема Пифагора). Отсюда находится любая тригонометрическая функция.

Пример. Найти $J_4 = \int \frac{dx}{x\sqrt{4 - x^2}}$.

Решение. $x = 2\sin t, dx = 2\cos t \cdot dt,\ \sqrt{4 - x^2} = \sqrt{4 - 4\sin^2 t} = \sqrt{4\left(1 - \sin^2 t\right)} = 2\cos t$,



$$J_4 = \int \frac{2\cos t \cdot dt}{2\sin t \cdot 2\cos t} = \frac{1}{2} \cdot \int \frac{dt}{\sin t} = \frac{1}{2} \cdot \ln\left|\ \mathrm{tg}\frac{t}{2}\right| + C,\ \sin t = x/2,$$

$$\cos t = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{2},\ \mathrm{tg}\frac{t}{2} = \frac{\sin t}{1 + \cos t} = \frac{x}{2 + \sqrt{4 - x^2}},$$

$$J_4 = \frac{1}{2} \cdot \ln\left|\frac{x}{2 + \sqrt{4 - x^2}}\right| + C.$$

Интеграл $J_5 = \int f\left(x, \sqrt{a^2 + x^2}\right)dx$ находится с помощью подстановки $x = a \cdot \mathrm{tg} t$. Тогда $dx = a \cdot \sec^2 t \cdot dt, \sqrt{a^2 + x^2} = \sqrt{a^2 + a^2 \mathrm{tg}^2 t} = \sqrt{a^2(1 + \mathrm{tg}^2 t)} = \sqrt{a^2 \cdot \sec^2 t} = a \cdot \sec t$.
$J_5 = \int f(a \cdot \mathrm{tg} t, a \cdot \sec t) \cdot a \cdot \sec^2 t \cdot dt$. В качестве **упражнения** найдите интеграл $J_5 = \int \frac{dx}{x\sqrt{1 + x^2}}$. Наконец, в интеграле $J_6 = \int f\left(x, \sqrt{x^2 - a^2}\right)dx$ цель достигается с помощью подстановки $x = a \cdot \sec t$. Тогда $dx = a \cdot \sec t \cdot \mathrm{tg} t \cdot dt$, $\sqrt{x^2 - a^2} =$
$= \sqrt{a^2 \cdot \sec^2 t - a^2} = \sqrt{a^2\left(\sec^2 t - 1\right)} = \sqrt{a^2 \mathrm{tg}^2 t} = a \cdot \mathrm{tg} t$. Здесь использовалось тождество $1 + \mathrm{tg}^2 t = \sec^2 t$, откуда $\sec^2 t - 1 = \mathrm{tg}^2 t$. Возврат к старой переменной «x» выполняется также с помощью прямоугольного треугольника.

Пример. Найти интеграл $J_6 = \int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2 - 1}}$.

Решение. Полагаем $x=\sec t,\ dx=\sec t\cdot tgt\cdot dt,\ \sqrt{x^2-1}=\sqrt{\sec^2 t-1}=\sqrt{tg^2 t}=tgt$. После замены переменных получим

$$J_6=\int\frac{\sec t\cdot tgt\cdot dt}{\sec^2 t\cdot tgt}=\int\frac{dt}{\sec t}=\int\cos t\cdot dt=\sin t+C.$$

Так как $x=\dfrac{1}{\cos t}$, находим $\cos t=1/x,\ \sin t=\sqrt{1-\cos^2 t}=\sqrt{1-\dfrac{1}{x^2}}=\dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$.

$$J_6=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}+C.$$

Решить самостоятельно

Найти интегралы

$$J_1=\int\frac{dx}{\sqrt[3]{x}+1},\qquad J_2=\int\frac{x+\sqrt[4]{3-x}}{\sqrt{3-x}}dx,\qquad J_3=\int\sqrt{x^2-4}\cdot dx,$$

$$J_4=\int\frac{x^2dx}{\sqrt{9+x^2}},\qquad J_5=\int\frac{\sqrt{1-x^2}\cdot dx}{x^2},\qquad J_6=\int\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt[3]{\ }x+1}dx.$$

Занятие № 6. Интегрирование тригонометрических функций

Цель занятия - научиться брать интегралы вида $J=\int R(\cos x,\sin x)\cdot dx$, где R-рациональная функция относительно $\cos x, \sin x$.

Интегралы вида J находили в конце прошлого занятия в примерах J_4, J_5, J_6 где использовались тригонометрические подстановки. Разобранные там примеры были достаточно простые. В общем же случае вопрос решает следующая теорема.

Теорема. Всякий интеграл J с помощью подстановки $tg\,x/2=t$ приводится к интегралу от рациональной дроби.

Доказательство. Из подстановки следует, что $x/2=\mathrm{arctg}t,\ x=2\cdot\mathrm{arctg}t,\ dx=\dfrac{2dt}{1+t^2}$.

Кроме того, используем известные формулы тригонометрии:

$$\cos x=\frac{1-tg^2x/2}{1+tg^2x/2}=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \sin x=\frac{2tg\,x/2}{1+tg^2\,x/2}=\frac{2t}{1+t^2}.$$

После замены $\cos x, \sin x$ и dx их значениями получим интеграл от рациональной дроби относительно t. Подстановка $tg\,x/2=t$ в силу ее всеобщности называется **универсальной тригонометрической подстановкой.**

Пример. Найти интеграл $\int \frac{dx}{1+\sin x+\cos x}$.

Решение. После замены $\sin x, \cos x, dx$ их значениями, получим

$$J=\int \frac{2dt/(1+t^2)}{1+\frac{2t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}}=\int \frac{dt}{t+1}=\ln|t+1|+C, \text{ где } t=\operatorname{tg}\frac{x}{2},\ J=\ln\left|\operatorname{tg}\frac{x}{2}+1\right|+C.$$

Пример. Найти самостоятельно интеграл $J=\int \frac{dx}{8-4\sin x+7\cos x}$.

Универсальная подготовка (в силу ее всеобщности) зачастую приводит к рациональным дробям, интегрирование которых достаточно сложно и громоздко. Кроме того, во многих случаях к цели приводят более простые методы. Приведем некоторую классификацию частных случаев.

Интегралы вида $J_{m,n}=\int \sin^m kx\cdot\cos^n kx\cdot dx$.

Здесь возможны следующие случаи.

1. Оба показателя степени: m и n – **четные положительные числа** (один из них может быть нулем). Тогда к цели приводят так называемые **формулы понижения степени**:

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2},\quad \cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2},\ \sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{1}{2}\sin 2\alpha.$$

Пример. Найти интеграл $J=\int \sin^4 3x\cdot dx$.

Так как $\sin^2 3x=\frac{1-\cos 6x}{2}$, находим $\sin^4 3x=\frac{1-2\cos 6x+\cos^2 6x}{4}$ и заменяем $\cos^2 6x=\frac{1+\cos 12x}{2}$.

После упрощений получим $\sin^4 3x=(3-4\cos 6x+\cos 12x)/8$,

$J=1/8\cdot\int(3-4\cos 6x+\cos 12x)\cdot dx=3/8\cdot x-\cdot\sin 6x/12+\sin 12x/96+C$.

2. Хотя бы одно из чисел m или n – нечетное положительное число. Тогда применяем **метод отщепления** от нечетной степени $\sin x$ или $\cos x$ и используем формулы $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$, $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$.

Пример. Найти интеграл $J=\int \sin^3 x\cos^2 x\cdot dx$.

Решение. $J=\int \sin^2 x\cdot\cos^2 x\cdot(\sin x\,dx)=\int(1-\cos^2 x)\cdot\cos^2 x\cdot(\sin x\,dx)=$

$=\int(\cos^2 x-\cos^4 x)\cdot(\sin x\,dx)=\int\cos^2 x\cdot(\sin x\,dx)-\int\cos^4 x\cdot(\sin x\,dx)=$

$$= -\int \cos^2 x \cdot d(\cos x) + \int \cos^4 x \cdot d(\cos x) = -\frac{\cos^3 x}{3} + \frac{\cos^5 x}{5} + C.$$

Пример. Решите самостоятельно $J = \int \sin^3 2x \cdot dx$.

3. Если m и n – **целые отрицательные числа одинаковой четности,** то к цели приводит метод отщепления.

Пример. $J = \int \frac{dx}{\cos^4 x} = \int \sec^4 x \cdot dx = \int \sec^2 x \cdot \sec^2 x \cdot dx$.

Решение.

$$J = \int \left(1 + tg^2 x\right)\sec^2 x \cdot dx = \int \sec^2 x \cdot dx + \int tg^2 x \cdot \sec^2 x \cdot dx = tgx + \frac{tg^3 x}{3} + C.$$

4. В некоторых случаях эффективно использование тождества $1 = \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha$ или даже $1 = \left(\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha\right)^2$.

Пример. Найти интеграл $J = \int \frac{dx}{\cos x \cdot \sin^3 x}$.

Решение.

$$J = \int \frac{1}{\cos x \cdot \sin^3 x} dx = \int \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos x \cdot \sin^3 x} dx = \int \frac{\cos x \cdot dx}{\sin^3 x} + \int \frac{2dx}{2\cos x \cdot \sin x},$$

$$J = \int (\sin x)^{-3} \cdot d(\sin x) + \int \frac{2dx}{\sin 2x} = \frac{(\sin x)^{-2}}{-2} + x \cdot \ln|\, tg\, x| + C,$$

$$J = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sin^2 x} + 2 \cdot \ln|\, tg\, x| + C.$$

Интегралы вида $J_1 = \int tg^m k \cdot x \cdot dx$, $J_2 = ctg^m k \cdot x \cdot dx$, где m – целое положительное число, находятся с помощью тождеств $tg^2 \alpha = \sec^2 \alpha - 1$, $ctg^2 \alpha = cosec^2 \alpha - 1$.

Пример.

$$J = \int tg^4 3x \cdot dx = \int tg^2 3x \cdot tg^2 3k \cdot dx = \int tg^2 3x \cdot \left(\sec^2 3x - 1\right)dx =$$

$$= \int tg^2 3x \cdot \left(\sec^2 3x \cdot dx\right) - \int tg^2 3x \cdot dx = \frac{1}{3} \cdot \int tg^2 3x \cdot d\,(tg 3x) - \int \left(\sec^2 3x - 1\right)dx =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{tg^3 3x}{3} - \int \sec^2 3x \cdot dx + \int dx = \frac{1}{9} \cdot tg^3 3x - \frac{1}{3} \cdot tg\, 3x + x + C.$$

Пример. Найти интеграл $J = \int ctg^3 x \cdot dx$.

Решение. $J = \int ctgx \cdot ctg^2 x \cdot dx = \int ctgx\left(cosec^2 x - 1\right)dx = \int ctgx \cdot cosec^2 x \cdot dx -$

$$- \int ctgx \cdot dx = -\frac{ctg^2 x}{2} - \ln|\sin x| + C.$$

Следующие три интеграла берутся с помощью известных формул тригонометрии $J_1=\int \sin mx\cdot\cos nx\cdot dx,\quad \sin mx\cdot\cos nx=\frac{1}{2}\left(\sin(m+n)x+\sin(m-n)\,x\right),$

$$J_2=\int \sin mx\cdot\sin nx\cdot dx,\qquad \sin mx\cdot\sin nx=\frac{1}{2}\cdot\left(\cos(m-n)x-\cos(m+n)x\right),$$

$$J_3=\int \cos mx\cdot\cos nx\cdot dx,\quad \cos mx\cdot\cos nx=\frac{1}{2}\cdot\left(\cos(m-n)x+\cos(m+n)x\right).$$

Пример. Найти интеграл $J=\int \sin 2x\cdot\cos 5x\cdot dx$.

Решение. $J=\frac{1}{2}\cdot\int\left(\sin 7x+\sin(-3x)\right)dx=\frac{1}{2}\cdot\int \sin 7x\cdot dx-\frac{1}{2}\cdot\int\sin 3x\cdot dx=$

$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{7}\right)\cdot\cos 7x-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)\cdot\cos 3x+C,\quad J=-\frac{1}{14}\cdot\cos 7x+\frac{1}{6}\cdot\cos 3x+C.$

Подстановка $\operatorname{tg}x=t$ рекомендуется для нахождения интеграла $J=\int R(\operatorname{tg}x)dx$, а также в тех случаях, когда в интеграле $J=\int \sin^m x\cdot\cos^n x\cdot dx$ числа m и n - четные (положительные или отрицательные). Здесь используются известные формулы тригонометрии: $\sin^2 x=\frac{\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}=\frac{t^2}{1+t^2},\quad \cos^2 x=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 x}=\frac{1}{1+t^2}.$

Пример. Найти интеграл $J=\int\frac{dx}{\sin^4 x}$.

Решение. $\operatorname{tg}x=t,\ x=\operatorname{arctg}t,\ dx=\frac{dt}{1+t^2},\ \sin^4 t=\frac{t^4}{\left(1+t^2\right)^2},$

$$J=\int\frac{dt/(1+t^2)}{t^4/(1+t^2)^2}=\int\frac{\left(1+t^2\right)^2}{\left(1+t^2\right)t^4}dt=\int\frac{1+t^2}{t^4}dt=\int\frac{dt}{t^4}+\int\frac{dt}{t^2},$$

$J=\int t^{-4}dt+\int t^{-2}dt=\frac{t^{-3}}{-3}+\frac{t^{-1}}{-1}+C=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{t^3}-\frac{1}{t}+C$. Так как $t=\operatorname{tg}x$, то окончательно получим $J=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\operatorname{tg}^3 x}-\frac{1}{\operatorname{tg}x}+C=-\frac{1}{3}\operatorname{ctg}^3 x-\operatorname{ctg}x+C.$

Замечание. Для интегралов $J_k=\int\sin^k x\,dx,\ J_k=\int\cos^k x\,dx,$ где k- натуральное число, методом интегрирования по частям можно получать рекуррентные соотношения, приведенные в таблице интегралов.

Решить самостоятельно

$J_1 = \int \frac{dx}{3+5\cos x}$, $J_2 = \int \frac{dx}{3\cdot\sin^2 x + 5\cos^2 x}$, $J_3 = \int \frac{dx}{\sin x + \cos x}$,

$J_4 = \int \frac{\sin^3 x\, dx}{1+\cos^2 x}$, $J_5 = \int \sin^5 3x\, dx$, $J_6 = \int \frac{1+\mathrm{tg}x}{1-\mathrm{tg}x}dx$.

Выше были рассмотрены основные приемы и формулы для нахождения неопределенных интегралов. Следует отметить, что многие функции не интегрируются в **конечном** виде. Так, например, функция $y = \frac{\sin x}{x}$ непрерывна в промежутке $(0, +\infty)$, однако, интеграл от нее $\int \frac{\sin x}{x} dx = \mathrm{si}\, x$ (интегральный синус) не выражается в конечном виде через элементарные функции. То же самое относится к интегралам $\int \frac{\cos x}{x} dx = \mathrm{ci}\, x$ (интегральный косинус), $\int \frac{dx}{\ln x} = \mathrm{li}\, x$ (интегральный логарифм).

Замечание. Во многих случаях заданный интеграл $\int f(x)dx$ может быть найден различными способами. Так, например, интеграл $J = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}}$ с помощью подстановки $x = a\cdot\sin t$, $dx = a\cdot\cos t\cdot dt$ дает $J = \int \frac{a\cdot\cos t\cdot dt}{a\cdot\cos t} = \int dt = t + C$, где $t = \arcsin\frac{x}{a}$, $J = \arcsin\frac{x}{a} + C$. С другой стороны, если возьмем подстановку $\sqrt{a^2 - x^2} = t(a - x)$, то $x = a\cdot\frac{t^2-1}{t^2+1}$, $dx = \frac{4at\cdot dt}{(t^2+1)^2}$, $\sqrt{a^2 - x^2} = \frac{2at}{t^2+1}$.

Поэтому $J = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 2\cdot\int \frac{dt}{t^2+1} = 2\cdot\mathrm{arctg}\cdot t + C$, $t = \sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$.

Окончательно $J = \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = 2\cdot\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} + C$. Этот результат **лишь формой** отличается от предыдущего, так как

$$\left(2\cdot\mathrm{arctg}\sqrt{\frac{a+x}{a-x}} + C\right)' = \left(\arcsin\frac{x}{a} + C\right)' = \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}.$$