

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ
ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ,
МЕХАНИКИ И ОПТИКИ**

А.В. Ушаков, В.В. Хабалов, Н.А. Дударенко

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ТЕОРИИ
СИСТЕМ:**

элементы теории и практикум



Санкт-Петербург

2007

УДК 517/519:62.50:681.3

Ушаков А.В., Хабалов В.В., Дударенко Н.А. Математические основы теории систем: элементы теории и практикум./ Под ред. Ушакова А.В. – СПб: СПбГУИТМО, 2007.

В учебном пособии излагаются теоретические положения, подкрепленные практикумом, основных разделов учебной дисциплины «Математические основы теории систем» естественнонаучного цикла образовательного стандарта направления 651900 – «Автоматизация и управление» подготовки бакалавров и магистров по специальности 220201 – «Управление и информатика в технических системах» подготовки специалистов – инженеров.

Учебное пособие рассчитано на студентов направления 651900 и специальности 220201, тем не менее, оно может быть рекомендовано также аспирантам и молодым специалистам, которым по роду своей деятельности приходится иметь дело с информационными и динамическими системами и математическими проблемами, связанными с построением модельных представлений таких систем, ориентированными на возможности матричного формализма метода пространства состояния.

Утверждено к печати Советом факультета компьютерных технологий и управления, протокол № 4 от 19.12.2006.

В 2007 году СПбГУ ИТМО стал победителем конкурса инновационных образовательных программ вузов России на 2007–2008 годы. Реализация инновационной образовательной программы «Инновационная система подготовки специалистов нового поколения в области информационных и оптических технологий» позволит выйти на качественно новый уровень подготовки выпускников и удовлетворить возрастающий спрос на специалистов в информационной, оптической и других высокотехнологичных отраслях экономики.



ISBN 5-7577-0321-0

© Ушаков А.В., Хабалов В.В., Дударенко Н.А., 2007.

© Санкт-Петербургский государственный университет информационных технологий, механики и оптики, 2007.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	4
Используемые обозначения и сокращения	6
Введение	8
1. Алгебраические структуры	15
2. Пространства	25
2.1. Метрические пространства. Примеры метрик	25
2.2. Линейные пространства и операторы. Матрицы линейных операторов	29
3. Матричные инварианты и неинварианты. Сингулярное разложение матриц	45
4. Канонические формы матриц. Матрицы приведения подобия	57
5. Линейные и квадратичные формы. Дифференцирование функций от векторов и матриц по скалярным, векторным и матричным переменным	67
6. Функции от матриц. Матричная экспонента и ее свойства	76
7. Модели «вход–состояние–выход» объектов управления	88
8. Математические модели «вход–выход» объектов управления	107
9. Линейные матричные уравнения	117
10. Дискретное представление сигналов. Базисные функции. Теорема В. Котельникова–К. Шеннона	128
Литература	140
Приложение: Сведения о пакете MATLAB 6.5	142
Из истории кафедры систем управления и информатики	169

*Посвящается шестидесятилетию
основания кафедры автоматики и
телемеханики (ныне кафедры
систем управления и информати-
ки)*

ПРЕДИСЛОВИЕ

Дисциплина «Математические основы теории систем (МОТС)» к настоящему моменту имеет достаточно длинную предысторию. Первоначально в учебных планах подготовки инженеров–электриков по специальности 0606 – «автоматика и телемеханика» в 70-е годы XX-го века появилась дисциплина «Математические основы кибернетики (МОК)». К концу 70-х годов XX-го века название дисциплины претерпевает первое изменение, в результате чего она стала называться «Теоретическими основами кибернетики (ТОК)». Введенная в учебный план специальности 0606 дисциплина как в версии МОК, так и в версии ТОК в основном решала задачи математического обеспечения модельных представлений процессов управления и информационных процессов в канальных средах. В конце 80-х годов XX-го века дисциплина претерпевает очередное изменение названия, в результате чего она начинает называться «Математическими основами исследования процессов управления (МОИПУ)». Из программы дисциплины МОИПУ изымаются положения, связанные с информационными процессами в канальных средах, которые переносятся в программу появившейся в учебном плане специальности дисциплины «Прикладная теория информации (ПТИ)».

Последняя модификация названия дисциплины, в результате которой оно получило действующую в настоящий момент версию «Математические основы теории систем (МОТС)», произошла в начале 90-х годов XX-го века с одновременным изменением номера и названия специальности инженерной подготовки так, что выпускники вузов по данной специальности стали получать квалификацию инженера по специальности 2101 (ныне 220201) – «управление и информатика в технических системах». С середины 90-х годов XX-го века дисциплина МОТС вошла также в структуру учебного плана по разделу естественнонаучных дисциплин образовательного стандарта направления 651900 – «Автоматизация и управление» подготовки бакалавров и магистров.

Таким образом, предлагаемое учебное пособие подготовлено на основе опыта преподавания дисциплин МОК, ТОК, МОИПУ и «Матема-

тические основы теории систем», накопленного на кафедре Систем управления и информатики (до 2001-го года – кафедре автоматике и телемеханики) Санкт-Петербургского государственного университета информационных технологий, механики и оптики.

При подготовке учебного пособия использованы материалы ранее опубликованных научных и учебно-методических работ, содержательно коррелирующих с проблематикой дисциплины МОТС: Никифорова Л.Т., Ушаков А.В., Хабалов В.В. Теоретические основы кибернетики. Учебное пособие. Л.: ЛИТМО, 1984; Матричные уравнения в задачах управления и наблюдения непрерывными объектами / Т.А. Акунов, С. Алишеров, Р.О. Оморов, А.В. Ушаков / Под ред. А.В. Ушакова. – Бишкек: Илим, 1991; Модальные оценки качества процессов в линейных многомерных системах / Т.А. Акунов, С. Алишеров, Р.О. Оморов, А.В. Ушаков / Под ред. А.В. Ушакова. – Бишкек: Илим, 1991.; Матричные уравнения в исследовании дискретных процессов над бесконечными и конечными полями / Т.А. Акунов, С. Алишеров, Р.О. Оморов, А.В. Ушаков / Под ред. А.В. Ушакова. – Бишкек: Илим, 1993.; Алгебраические методы в теории устройств дискретной автоматики и телемеханики: Труды лаборатории телемеханики СПбГИТМО(ТУ). / Под ред. А.В.Ушакова. – СПб: СПбГИТМО (ТУ), 2001; Акунова А., Баячорова Б.Ж., Ушаков А.В., Хабалов В.В. Математические основы теории информационных систем в управлении / Под ред. А.В. Ушакова. – Бишкек: Салам, 2003; Дударенко Н.А. Технология контроля вырождения сложных динамических систем с помощью частотных сепаратных чисел обусловленности // Современные технологии: Сборник научных статей / Под ред. проф. С.А. Козлова. – СПб: СПб ГИТМО (ТУ), 2003; Мельников А.А., Ушаков А.В. Двоичные динамические системы дискретной автоматики / Под ред. А.В. Ушакова. СПб: СПбГУ ИТМО, 2005; Дударенко Н.А., Ушаков А.В. Анализ чувствительности функционала вырождения к параметрической неопределенности функциональных компонентов сложных систем при стохастических экзогенных воздействиях. Мехатроника, автоматизация, управление. №8, 2006.

Искреннюю благодарность авторы выражают своему коллеге Т.А. Акунову за материалы, составившие содержание приложения «Сведения о пакете MATLAB 6.5.»

Конструктивную критику по существу содержания учебного пособия следует направлять автору по: почтовому адресу 195267 до востребования, телефонам 5954128, 2900744 и электронной почте ushakov-AVG@yandex.ru.

Издание настоящего пособия поддержано грантом РФФИ 06–08–01427а.

Используемые обозначения и сокращения

S, X – множество элементов произвольной природы;
 $G, G_0, F, GF(p), GF(p^n)$ – алгебраические структуры соответственно группа, подгруппа, поле, простое поле Галуа с характеристикой (модулем) p , расширенное поле Галуа;
 $\{X, d\}, X_d$ – метрическое пространство с метрикой $d = d(x, y)$;
 A, A – соответственно линейный оператор (ЛО) и матрица ЛО;
 X^n – n -мерное линейное пространство над полем F ;
 R^n – линейное вещественное пространство;
 I – единичная матрица;
 0 – нулевой скаляр, вектор, матрица;
 A, A^j, A_k – матрица, j -ая строка, k -ый столбец матрицы A ;
 A^T – матрица, транспонированная к матрице A ;
 A^* – матрица, сопряженная к матрице A ;
 A^{-1} – матрица, обратная к матрице A ;
 A^+ – матрица, псевдообратная к матрице A ;
 $diag\{\alpha_i, i = \overline{1, n}\}$ – диагональная матрица с элементами α_i на диагонали;
 $row\{\alpha_i, i = \overline{1, n}\}$ – строчная матричная структура с элементами α_i в строке;
 $col\{\alpha_i, i = \overline{1, n}\}$ – столбцовая матричная структура с элементами α_i в столбце;
 $\|(\circ)\|$ – норма элемента (\circ) ;
 $\|(\circ)\|_P$ – норма элемента (\circ) с весом P ;
 $ang\{x, y\}$ – угол между векторами x и y ;
 Δ
 $=$ – равенство по определению;
 \forall – для всех;
 \exists – существует;
 \in – принадлежит;
 \notin – не принадлежит;
 \max_i – максимум на множестве элементов с индексом i ;
 \cup, \cap – символы объединения и пересечения множеств;
 $\gamma = \arg\{\beta(\gamma)\}$ – значение γ , удовлетворяющее условию $\beta(\gamma)$;
 $det(\circ), tr(\circ), rank(\circ)\{rang(\circ)\}$ – соответственно определитель, след, ранг матрицы (\circ) ;
 $\exp(\circ)$ – матричная экспонента с матричным аргументом (\circ) ;
 $cond\{(\circ)\} = C\{(\circ)\}$ – число обусловленности матрицы (\circ) ;

$\dim(\circ)$ – размерность элемента (\circ) ;
 $\deg(\circ)$ – степень полинома (\circ) ;
 $Jm(\circ)$ – образ (\circ) ЛО;
 $Ker(\circ)$ – ядро (\circ) ЛО;
 $\sigma\{\circ\}, \sigma_a\{\circ\}, \sigma_\alpha\{\circ\}$ – соответственно алгебраические спектры собственных значений, коэффициентов характеристического полинома и сингулярных чисел матрицы $\{\circ\}$;
 \otimes – символ кронекеровского произведения;
 $contr\{(A, B)\}$ – предикат наличия свойства управляемости пары матриц (A, B) ;
 $observ\{(A, C)\}$ – предикат наличия свойства наблюдаемости пары матриц (A, C) ;
 \vee – логическое "или";
 $\&$ – логическое "и";
 $(\circ):\eta; (\circ)|\eta$ – предикат наличия характеристического свойства η у элемента (\circ) ;
 $rest(rem)\{\circ/\circ\}$ – остаток от деления \circ/\circ ;
SVD – сингулярное разложение матриц;
МПС – метод пространства состояний;
ВМП – векторно-матричное представление;
ВВ – вход–выход;
ВСВ – вход–состояние–выход;
КС – канал связи;
ОС – обратная связь;
ОУ – объект управления.

Введение. Основные проблемы управления

Основные проблемы управления рассмотрим на примере сложной системы, структурное представление которой приведено на рисунке В.1.

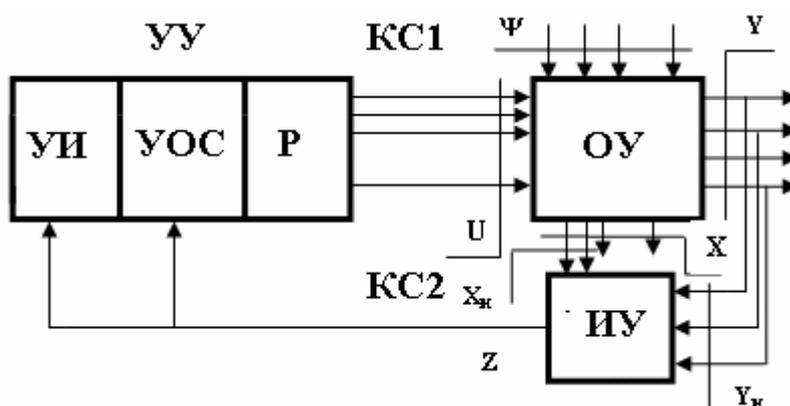


Рисунок В.1. Структурная схема сложной системы управления

На рисунке В.1: ОУ – объект управления, представляющий собой некоторый физический объект (технологический процесс), на котором размещены *регулирующие органы* (РО), управляемые сформированными по некоторому закону сигналами управления; ИУ – измерительное устройство, преобразующее доступные непосредственному измерению компоненты вектора состояния и вектора выхода в электрический сигнал, согласованный с предоставленным каналом связи (КС); УИ – устройство *идентификации* объекта управления; УОС – устройство *оценки состояния* объекта управления; Р – регулятор, представляющий собой техническую среду, средствами которой создается сигнал управления U , сформированный в соответствии с требуемым законом управления (ЗУ) регулирующими органами ОУ; УУ – устройство управления, представляющее собой функциональное объединение устройства идентификации объекта, устройства оценивания его состояния и регулятора; КС1, КС2 – соответственно *прямой* (управляющий) и *обратный* (информационный, известительный) каналы связи.

Таким образом, сложная система представляет собой функциональное объединение *объекта управления, устройства управления и канальной среды*, образованной прямым и обратным каналами связи.

В современной теории управления объект управления задается с помощью макровектора

$$OU = \{U, \Psi, X, Y, T, \Omega_U, \Omega_X, \lambda, \delta, \lambda_\Psi, \delta_\Psi, F\} \quad (B.1)$$

В макровекторе (B.1): $U = [U_1, U_2, \dots, U_r]^T = col\{U_j, j = \overline{1, r}\}$ – r -мерный вектор управления объектом;

$\Psi = [\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_v]^T = \text{col}\{\Psi_l, l = \overline{1, v}\}$ – v -мерный вектор внешних возмущающих воздействий, осуществляющих нежелательное управление объектом; $X = [X_1, X_2, \dots, X_n]^T = \text{col}\{X_i, i = \overline{1, n}\}$ – n -мерный вектор состояния, содержательно выполняющего функцию памяти объекта; $Y = [Y_1, Y_2, \dots, Y_m]^T = \text{col}\{Y_k, k = \overline{1, m}\}$ – m -мерный вектор выхода, содержательно представляющий собой выходную пользовательскую продукцию объекта управления как некоторого технологического процесса; T – временной интервал управления объектом, представляющий собой сплошное множество (континуум) моментов управления в случае, если ОУ имеет непрерывную природу, и счетное множество моментов управления в случае, если объект имеет дискретную природу; Ω_U – множество (область в r -мерном пространстве) допустимых управлений; Ω_X – множество (область в n -мерном пространстве состояния) допустимых траекторий; $\lambda: X \times U \Rightarrow X$ – n -мерная векторная функция перехода, описывающая процесс перехода из некоторого исходного состояния в состояние перехода под действием сформированного управления; $\delta: X \times U \Rightarrow Y$ – m -мерная векторная функция выхода, описывающая процесс формирования выхода объекта при переходе из некоторого исходного состояния в состояние перехода под действием сформированного управления; $\lambda_\Psi: X \times U \times \Psi \Rightarrow \Delta X$ – n -мерная векторная функция, описывающая процесс формирования дополнительного движения ΔX по состоянию под действием внешнего возмущающего воздействия Ψ при переходе из некоторого исходного состояния в состояние перехода под действием сформированного управления; $\delta_\Psi: X \times U \times \Psi \Rightarrow \Delta Y$ – m -мерная векторная функция, описывающая процесс формирования дополнительного движения ΔY по выходу под действием внешнего возмущающего воздействия Ψ при переходе из некоторого исходного состояния в состояние перехода под действием сформированного управления; F – числовое поле, которому принадлежат элементы векторов U, Ψ, X, Y , а также системные параметры векторных функций $\lambda, \delta, \lambda_\Psi, \delta_\Psi$.

В учебной и научной литературе по теории систем управления в основном используется редуцированная версия системного макровектора (В.1), которая имеет представление

$$\text{ОУ} = \{U, X, Y, T, \lambda, \delta\}. \quad (\text{В.2})$$

Компоненты редуцированной версии макровектора (В.2) имеют тот же, что и в (В.1) смысл. Форма (В.2) представления математических моделей объектов управления непрерывной и дискретной природы в учебном пособии будет основной.

Прежде, чем формулировать проблемы управления, необходимо отметить следующее. Любая техническая антропогенная система, то

есть система, созданная умом и руками человека, имеет три фазы своего существования. Первой фазой является *фаза разработки*, включающая в себя построение математической модели объекта управления и среды его функционирования, аналитический синтез закона управления, построение алгоритмического обеспечения процедур оценки параметров модели объекта и его состояния, моделирование системы с использованием возможностей современных программных оболочек, разработка технической реализации (программной – SOFT и схемотехнической – HARD) всех компонентов процесса управления, разработка конструкции устройства управления и технологического сопровождения его изготовления и испытания макетного образца устройства управления с использованием стендовых испытательных средств. Второй фазой существования технической системы является *фаза изготовления*, третьей – *фаза эксплуатации*.

Проблемы управления в своей алгоритмической основе решаются в фазе разработки, а реализуются в фазе эксплуатации. Это значит, что математическая постановка задачи (цели) управления должна быть корректно сформулирована, математические модели объекта управления и среды его функционирования должны быть адекватны реальным физическим процессам в них, параметры математических моделей объекта и окружающей среды должны быть оценены с допустимой погрешностью, оценка вектора состояния должна сходиться к вектору состояния, сформированный закон управления должен доставлять процессу управления объектом требуемые динамические качества с одновременным обеспечением стабильности потребительских свойств в условиях возможной параметрической неопределенности, при этом канальная среда в прямом канале должна передавать достоверно сигналы управления к регулирующим органам объекта, а в обратном канале – достоверно передавать информацию о доступных непосредственному измерению компонентах вектора состояния и выхода в устройство управления. Все алгоритмы, задействованные в процессе управления должны быть вычислительно устойчивыми, матричные компоненты используемых математических модельных представлений должны быть хорошо обусловлены.

Приведенная на рисунке В.1 структурная схема сложной системы, представляющей собой функциональное объединение объекта управления, устройства управления и канальной среды, а также сделанный к ней комментарий позволяют сформулировать основные *проблемы управления*.

Первой проблемой является проблема составления математической модели ОУ в форме (В.1) или (В.2), причем ключевыми моментами здесь оказываются назначение *разумной* размерности вектора состояния, а также аналитические представления правил λ и δ . Первая про-

блема в основном решается *экспертным* образом, который опирается на библиографические источники, опыт специалистов и собственный опыт разработчика.

Второй проблемой является решение задачи идентификации объекта управления, которая сводится при сконструированных аналитических представлениях правил λ и δ к разработке и реализации алгоритма ζ формирования оценок \hat{p}_λ и \hat{p}_δ параметров p_λ и p_δ этих правил на основе результатов измерения доступных непосредственному измерению компонентов x_u и y_u векторов x состояния и y выхода ОУ, причем алгоритм должен гарантировать сходимость оценок параметров в форме

$$\zeta : \{x_u, y_u\} \Rightarrow (\hat{p}_\lambda, \hat{p}_\delta) : \lim_{t \rightarrow \infty} (\hat{p}_\lambda, \hat{p}_\delta) = (p_\lambda, p_\delta) \quad (\text{B.3})$$

Третьей проблемой является решение задачи оценки состояния объекта, которая сводится к разработке и реализации алгоритма ξ формирования оценки \hat{x} вектора состояния x на основе результатов измерения доступных непосредственному измерению компонентов x_u и y_u векторов x состояния и y выхода ОУ, причем алгоритм должен гарантировать сходимость оценки вектора состояния в форме

$$\xi : \{x_u, y_u\} \Rightarrow \hat{x} : \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{x}(t) = x(t) \quad (\text{B.4})$$

Четвертой проблемой является решение задачи формирования закона управления, которое является многофазным.

Первая фаза решения состоит в формализации задачи (цели) управления. При всем многообразии содержательных постановок задач (целей) управления в формализованном представлении они могут быть сведены к двум версиям. Первая версия, именуемая *задачей перевода (регулирования)*, формулируется следующим образом: *перевести объект управления, находящийся в начальный момент времени $t=t_0$ в состоянии $x(t_0)$, к моменту времени $t=t_k$ в требуемое состояние $x(t_k)$ за минимально возможный на множестве доступных управлений Ω_U промежуток времени $\Delta T = t_k - t_0$, формализованное представление задачи перевода (регулирования) имеет вид*

$$x(t=t_0) \Rightarrow x(t=t_k) : \Delta T = (t_k - t_0) = \min_{U \in \Omega_U} \quad (\text{B.5})$$

Вторая версия задачи (цели) управления, именуемая *задачей удержания (слежения)*, формулируется следующим образом: *удерживать состояние объекта управления $x(t)$ на программной траектории $x_{np}(t)$ с минимальной на множестве доступных управлений Ω_U нормой вектора ошибки этого удержания, формализованное представление задачи удержания (слежения) принимает вид*

$$\|x_{np}(t) - x(t)\| = \min_{U \in \Omega_U} \quad (B.6)$$

Вторая фаза решения задачи формирования закона управления состоит в формировании *показателя (критерия) качества* протекания управляемого процесса, сформулированного в одной из *постановочных версий*. Показатель качества $J = J(x, u)$ задаётся так, чтобы траекториям управляемого процесса *лучшего качества* соответствовало экстремальное на множествах допустимых управлений Ω_U и допустимых траекторий Ω_X значение $\text{extrem}_{U \in \Omega_U, X \in \Omega_X} \{J = J(x, u)\}$ этого показателя.

Последняя (финальная) фаза формирования закона управления состоит в формировании сигнала управления как *функции текущего состояния объекта управления*, а в случае непосредственной неизмеримости вектора состояния его оценки, а также оценки параметров правил λ и δ его модели так, что закон управления принимает аналитическое представление

$$U = U\{\hat{x}, \hat{p}_\lambda, \hat{p}_\delta\} : \left\{ \begin{array}{l} x(t_0) \Rightarrow x(t_k) : \Delta T = (t_k - t_0) = \min; \vee \\ U \in \Omega_U \\ \|x_{np}(t) - x(t)\| = \min; \& J = \text{extrem}_{U \in \Omega_U, X \in \Omega_X} \{J(x, u)\} \end{array} \right\} \quad (B.7)$$

Пятой проблемой является проблема канализации информации по прямому каналу связи (КС1) от устройства управления к объекту и по обратному каналу связи (КС2) – от объекта управления к устройству управления. Содержательно проблема канализации информации, как в прямом, так и в обратном каналах сводятся к решению двух задач. *Первая задача* связана с требованием эффективного использования предоставленного канала связи. В вербальной форме задача может быть сформулирована следующим образом: *передачу информации по предоставленному каналу связи следует вести так, чтобы объем сигнала (V_c) не превышал емкости (V_k) канала связи, максимально приближаясь к выполнению равенства $V_c = V_k$, где*

$$V_c = T_c F_c \log_2 \left(1 + \frac{P_c}{P_n}\right); \quad V_k = T_k F_k \log_2 \left(1 + \frac{P_c}{P_n}\right). \quad (B.8)$$

В формуле (B.8): T_c – временная длительность сигнала, F_c – эффективный спектр сигнала, P_c – мощность сигнала, P_n – мощность помехи, сопровождающей процесс формирования сигнала; T_k – длительность интервала времени, на который предоставлен канал связи, F_k – эффективная полоса пропускания канала связи, P_c – мощность сигнала, фиксируемая в канальной среде, P_n – мощность помехи в канальной среде.

Вторая задача канализации информации связана с удовлетворением требованиям обеспечения достоверности принимаемой информации (*информационной надежности каналов образующих средств*). В вер-

бальной форме задача может быть сформулирована следующим образом: *передачу информации по предоставленному каналу связи в условиях помех следует организовать так, чтобы за счет введения в структуру передаваемых кодов, несущих необходимую получателю информацию, избыточных разрядов, на приемной стороне существовала возможность восстановления искаженного при передаче кода в такой степени, чтобы вероятность $P_{ош}$ исполнения искаженной (ошибочной, ложной) команды не превышала бы вероятности $P_{дон}$, допустимой для данной категории проектируемой системы управления.* В формальной постановке задача обеспечения информационной надежности канальными средствами сводится к обеспечению неравенства

$$P_{ош} = \sum_{i=s+1}^n C_n^i p^i (1-p)^{n-i} \leq P_{дон}, \quad (B.9)$$

где n – число разрядов помехозащищенного кода, p – вероятность искажения элементарного сигнала (бита) двоичного кода, s – число исправляемых ошибок средствами помехозащитного декодирования при приеме информации, i – число возможных ошибок, C_n^i – число сочетаний из n по i .

Перечисленные проблемы управления относятся к разряду «вечных», содержательно они инвариантны относительно технологической среды, в которой пребывает конкретное гуманитарное сообщество.

Первая из перечисленных выше проблем является предметной областью дисциплины «Математические основы теории систем». На математическое сопровождение решения перечисленных выше базовых задач управления в их модельном представлении направлено основное содержание учебного пособия. В этой связи в пособии приведены сведения об алгебраических структурах, основных пространствах, матричном формализме, являющемся инструментальной основой метода пространства состояния. Модельные представления динамических объектов (объектов управления) как в классе моделей «вход–состояние–выход (ВСВ)», так и в классе моделей «вход–выход (ВВ)» ограничиваются непрерывными и дискретными по времени объектами. С использованием возможностей ВСВ – модельных представлений решаются задачи анализа структурных свойств динамических объектов – управляемости и наблюдаемости. Проблема конечномерных представлений сигналов, как элементов функционального пространства, решается как в прямой постановке с использованием матрицы Грама, так и в обратной – с использованием теоремы В. Котельникова–К. Шеннона. Освоение основных положений *математических основ теории систем* сопровождается богатым практикумом по базовым проблемам курса.

Вторая, третья и четвертая проблемы являются предметной областью «куста» дисциплин, объединенных названием «Современная теория управления».

Пятая из перечисленных проблем является предметной областью дисциплины «Прикладная теория информации».

1. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ

Для изучения основных разделов математических основ теории систем (МОТС) необходимо определенное знакомство с алгебраическими структурами и пространствами. Схема их формирования, взаимной связи и изучения приведена на рисунке 1.1.

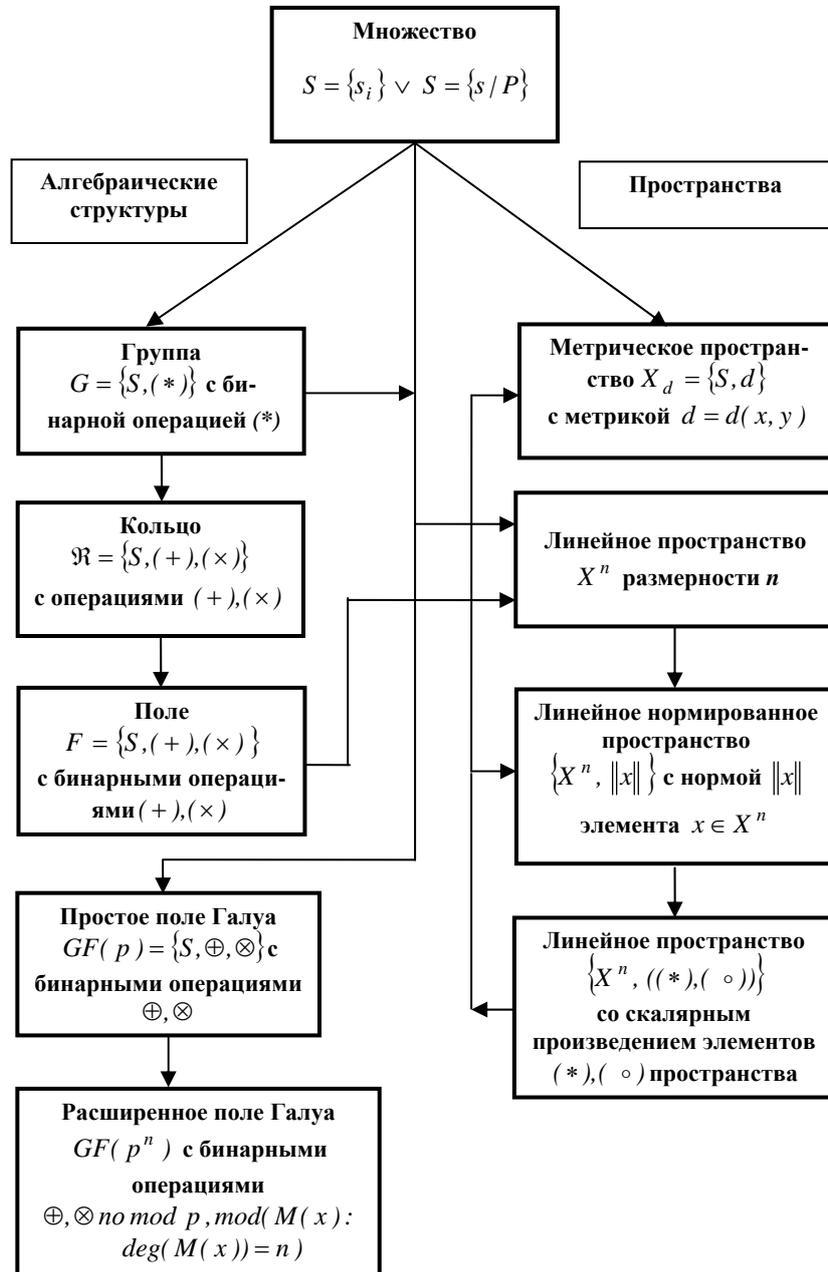


Рисунок 1.1

Определение 1.1 (O1.1). Множеством называется совокупность объектов любой природы, задаваемая путем их перечисления или указанием их характеристического свойства P :

$$S = \{s_1, s_2, s_3\} \vee S = \{s | P\}.$$

Последняя запись означает, что множество S есть совокупность элементов s , обладающих характеристическим свойством P .

Мощность множества $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$ характеризует число элементов множества и обозначается $[S]$.

Определение 1.2 (O1.2). Пусть задано множество $S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$, будем говорить, что во множестве S определена бинарная алгебраическая операция, если указано правило, по которому любой паре элементов s_i, s_j из этого множества, взятых в определенном порядке ставится в соответствие единственный элемент s_k того же множества.

Определение 1.3 (O1.3). *Алгебраической структурой* называется множество с заданными в нем алгебраической бинарной операцией (или несколькими операциями) и свойствами элементов относительно этой бинарной операции.

В курсе МОТС изучаются следующие алгебраические структуры: группа (подгруппа), кольцо, идеал, поле, простое и расширенное поля Галуа.

Определение 1.4 (O1.4). Множество G называется *группой*, если для любой пары элементов множества G определена бинарная алгебраическая операция $*$ и выполняются условия:

1. Замкнутости: для $\forall \alpha, \beta \in G$, элемент $\gamma = \alpha * \beta \in G$;
2. Ассоциативности: для $\forall \alpha, \beta, \gamma \in G$ $\alpha * (\beta * \gamma) = (\alpha * \beta) * \gamma$
3. Существования нейтрального элемента (единицы группы): G содержит единственный элемент $e : \forall \alpha \in G$ $e * \alpha = \alpha * e = \alpha$;
4. Существования обратного элемента: для $\forall \alpha \in G$ $\exists \alpha^{-1} \in G$ (единственный для $\forall \alpha$), называемый элементом, обратным α , такой, что $\alpha * \alpha^{-1} = \alpha^{-1} * \alpha = e$.

Примечание 1.1 (П1.1): Группа G называется *коммутативной* или абелевой группой, если выполняется условие коммутативности: для $\forall \alpha, \beta \in G$ $\alpha * \beta = \beta * \alpha$.

Определение 1.5 (O1.5). Подмножество G_0 группы $G (G_0 \subset G)$ называется *подгруппой*, если оно удовлетворяет всем свойствам группы относительно бинарной алгебраической операции $*$.

Определение 1.6 (O1.6). Пусть G – коммутативная группа, G_0 – подгруппа группы G . Рассмотрим множество:

$$\begin{aligned} G_0 &= \{\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \dots \quad \alpha_k\}, \\ G_1 &= \{\alpha_1 * \beta_1 \quad \alpha_2 * \beta_1 \quad \alpha_3 * \beta_1 \quad \dots \quad \alpha_k * \beta_1\} \\ &\vdots \\ G_v &= \{\alpha_1 * \beta_v \quad \alpha_2 * \beta_v \quad \alpha_3 * \beta_v \quad \dots \quad \alpha_k * \beta_v\} \end{aligned}$$

где $\beta_i \notin G_0, G_{i-1}, i = \overline{1, v}$.

Определенные таким образом множества называются смежными классами группы G по подгруппе G_0 и задают разложение группы G по подгруппе G_0 с образующими элементами β_i , так что $G = \bigcup_{i=0}^{\nu} G_i$, где число ν называется индексом подгруппы G_0 в группе G .

Определение 1.7 (О1.7). Пусть имеются две группы G_1 и G_2 с бинарными операциями « $*$ » и « \circ » соответственно одной и той же мощности и $\varphi: G_1 \rightarrow G_2$ отображение G_1 в G_2 такое, что для всех $x, y \in G_1$ имеет место равенство: $\varphi(x * y) = \varphi(x) \circ \varphi(y)$.

Отображение φ , обладающее таким свойством, называется *изоморфным*. Если между двумя группами G_1 и G_2 можно установить изоморфизм φ , то группы G_1 и G_2 называются *изоморфными*.

Определение 1.8 (О1.8). Множество R называется *кольцом*, если на нем определены бинарные алгебраические операции сложения и умножения и выполняются следующие условия:

1. Множество R является коммутативной группой относительно бинарной операции сложения;
2. Замкнутости относительно бинарной операции умножения: для $\forall \alpha, \beta \in R$ элемент $\alpha\beta \in R$;
3. Ассоциативности относительно бинарной операции умножения: для $\forall \alpha, \beta, \gamma \in R$ $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$;
4. Дистрибутивности относительно бинарных операций сложения и умножения: для $\forall \alpha, \beta, \gamma \in R$ $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$, $(\beta + \gamma)\alpha = \beta\alpha + \gamma\alpha$.

Примечание 1.2 (П1.2). Кольцо R называется *коммутативным*, если выполняется условие: $\forall \alpha, \beta \in R$ $\alpha\beta = \beta\alpha$.

Определение 1.9 (О1.9). Подгруппа J аддитивной группы R называется *идеалом*, если для $\forall \alpha \in R$ и $\beta \in J$ элемент $\alpha\beta \in J$.

Примечание 1.3 (П1.3). Идеал, состоящий из всех элементов, кратных некоторому элементу α кольца R , называется *главным идеалом*. Кольцо, в котором каждый идеал главный, называется *кольцом главных идеалов*. Элемент α называется *образующим* (или *порождающим*) элементом идеала.

Поскольку для кольца R справедливы все свойства группы, а для идеала J все свойства подгруппы относительно бинарной операции сложения, то кольцо R можно разложить подобно группе на смежные классы по идеалу J .

Определение 1.10 (О1.10). Коммутативное кольцо F называется *полем*, если выполняются следующие условия:

1. Кольцо F содержит нейтральный элемент 1 относительно бинарной операции умножения такой, что для $\forall \alpha \in F$ $1\alpha = \alpha 1 = \alpha$;
2. Для $\forall \alpha \neq 0, \alpha \in F$ существует обратный элемент $\alpha^{-1} \in F: \alpha\alpha^{-1} = \alpha^{-1}\alpha = 1$.
3. Если $\alpha, \beta \in F$, то $\alpha\beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ или $\beta = 0$.

Определение 1.11 (О1.11). Если p – простое число, то кольцо чисел по $\text{mod } p$ называется *простым полем* Галуа и обозначается $GF(p)$. $GF(p)$ состоит из элементов $0, 1, \dots, p-1$, таким образом $GF(p) = \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$.

Примечание 1.4 (П1.4). Определим на множестве $GF(p)$ две бинарные операции:

сложения по $\text{mod } p$, обозначив его \oplus , и умножения по $\text{mod } p$, обозначив его \otimes :

1. $c = a \oplus b = \text{rest} \frac{a+b}{p} \Leftrightarrow a+b = pm + c$, где $c < p, m$ – целое;
2. $d = a \otimes b = \text{rest} \frac{ab}{p} \Leftrightarrow ab = pk + d$, где $d < p, k$ – целое.

При этом c и d называются *вычетами*.

Определим понятия сравимости по $\text{mod } p$. Два целых числа a и b сравнимы по $\text{mod } p$:

$$a \equiv b \pmod{p} \Leftrightarrow a - b = pm, \text{ где } m - \text{целое.}$$

Определение 1.12 (О1.12). Полином $A(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$ называется *полиномом над полем $GF(p)$ или модулярным*, если его коэффициенты $a_i, i = \overline{0, n}$ принадлежат простому полю $GF(p)$. *Степенью полинома $A(x)$ $\deg\{A(x)\}$ называется наибольшее число $n: a_n \neq 0$.*

Примечание 1.5 (П1.5). Сравнение модулярных полиномов $A(x)$ и $B(x)$ по модулю модулярного полинома $F(x)$, производится аналогично сравнению целых чисел по $\text{mod } p$

$$A(x) \equiv B(x) \pmod{[F(x)]} \Leftrightarrow A(x) - B(x) = k(x)F(x),$$

где $\deg[k(x)] \leq \deg[F(x)]$.

Аналогично можно ввести операции суммирования (вычитания), умножения по модулю модулярного полинома, при этом приведение подобных членов производится по $\text{mod } p$. Так

$A(x) + B(x) = C(x) \pmod{[F(x)]} \Leftrightarrow A(x) + B(x) = L(x)F(x) + C(x)$, где $\deg[C(x)] \leq \deg[F(x)]$, при этом $C(x)$ называется *вычетом по $\pmod{[F(x)]}$* .

Определение 1.13. Полная система вычетов по двойному модулю $[\pmod{p}, \pmod{[F(x)]}]$ образует конечное поле, содержащее p^n элементов, которое обозначается $GF(p^n)$ и называется *расширенным полем Галуа*.

В отличие от простого поля $GF(p)$ элементами расширенного поля $GF(p^n)$ являются уже не числа, а модулярные полиномы степени не выше $(n-1)$ с коэффициентами из простого поля $GF(p)$.

Примеры и задачи

1.1.* Определить, относительно какой бинарной операции: умножения или сложения следующее числовое множество образует группу, или не образует ее вовсе.

- а) Множество всех вещественных чисел R .
- б) Множество вещественных чисел отличных от нуля.
- в) Множество положительных вещественных чисел.
- г) Множество всех комплексных чисел.
- д) Множество комплексных чисел, отличных от нуля.
- е) Множество комплексных чисел с модулем равным единице.
- ж) Множество комплексных чисел с модулем больше единицы.
- з) Множество чисел, представляющих собой целые положительные степени числа 2 $\{2, 4, 8, \dots\}$.
- и) Полное множество чисел $\{1, -1, j, -j, \dots\}$, где $j = \sqrt{-1}$.

1.2. Указать какие из обнаруженных групп в примере 1.1 являются коммутативными группами.

1.3. Дано множество чисел $S = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, задана бинарная операция \oplus – сложение по \pmod{p} . Указать, для каких значений p множество S образует группу.

1.4. Дано множество кодовых комбинаций над простым полем $GF(2) = \{0, 1\}$ с бинарной операцией сложения комбинаций по $\pmod{2}$ без переносов в старший разряд $S = \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\}$. Определить, является ли множество S группой, указать какой элемент множества S является единицей группы.

1.5. Дано множество квадратных матриц $\{A_i, i = 1, 2, \dots\}$ порядка $n \times n$.

- а) Доказать, что множество квадратных матриц A_i образует группу относительно бинарной операции сложения.

б) При каком характеристическом свойстве множество матриц A_i образует группу относительно бинарной операции умножения.

1.6. Дано множество n -мерных векторов $X = \text{col}\{x_i, i = \overline{1, n}\}, x_i \in R^n$. Выяснить, образует ли множество X группу относительно бинарной операции сложения.

1.7. Дано множество матриц перестановок P_i порядка 3×3 :

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \right\},$$

используемых при перестановках элементов векторов в соответствии с правилами $\bar{x}_i = P_i x$, где $x = (x_1, x_2, x_3)^T$. Указать, относительно какой бинарной операции умножения или сложения множество матриц перестановок образует группу.

1.8. Выяснить, изоморфны ли следующие группы:

а) Вещественных чисел с бинарной операцией сложения и степеней любого положительного целого числа с бинарной операцией умножения.

б) Комплексных чисел с бинарной операцией умножения и натуральных логарифмов комплексных чисел с бинарной операцией сложения.

1.9. Дано множество кодовых комбинаций из элементов $GF(2) = \{0, 1\}$ с бинарной операцией сложения по mod 2 без переноса в старший разряд, образующее группу

$$G = \left\{ \begin{array}{l} 0000, 0001, 0010, 0011, 0100, 0101, 0110, 0111, 1000, 1001, 1010, \\ 1011, 1100, 1101, 1110, 1111 \end{array} \right\}.$$

а) Указать все возможные подгруппы G_i группы G .

б) Построить разложение группы G по подгруппе \tilde{G} , содержащей минимальное число элементов.

1.10. Дано множество кодовых комбинаций, образующих группу относительно бинарной операции сложения по mod p без переноса в старший разряд

$$G = \{x_7, x_6, x_5, x_4, x_3, x_2, x_1\}, \text{ где } x_i \in GF(2) = \{0, 1\}, i = \overline{1, 7}.$$

а) Доказать, что подмножество кодовых комбинаций, элементы которых удовлетворяют соотношениям:

$x_1 = x_3 \oplus x_5 \oplus x_7, \quad x_2 = x_3 \oplus x_6 \oplus x_7, \quad x_4 = x_5 \oplus x_6 \oplus x_7$ образует подгруппу G_0 .

б) Разложить группу G по подгруппе G_0 , взяв в качестве образующих элементов кодовые комбинации

$\{0000001\}, \{0000010\}, \{0000100\}, \{0001000\}, \{0010000\}, \{0100000\}, \{1000000\}$

1.11. * Выяснить, образуют ли кольцо следующие множества:

- а) Множество четных чисел;
- б) Множество нечетных чисел;
- в) Множество рациональных чисел;
- г) Множество вещественных чисел;
- д) Множество комплексных чисел;
- е) Множество целых чисел, кратных данному целому числу большему $q > 0$;

ж) Множество чисел вида $a + b\sqrt{2}$, где a и b целые.

1.12. Выяснить, образуют ли кольцо множество квадратных матриц одной размерности.

1.13. Выяснить, образуют ли кольцо множество:

а) Многочленов $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^{n-i}$ где a_i – целые числа $i = \overline{0,4}$.

б) Линейных комбинаций экспоненциальных функций
 $g(t) = \sum_{i=0}^n g_i e^{it}$.

в) Линейных комбинаций гармонических функций
 $\varphi(t) = \sum_{i=0}^n \varphi_i \cos(it)$, где φ_i – действительные числа.

г) Функций $\xi(t) \in L_T^2$, где $t \in [0, T]$ и $\int_T \xi^2(t) dt < M = const$

1.14. Доказать, что множество парных чисел (a, b) с бинарными операциями, заданными равенствами

$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$ и $(a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1 a_2, b_1 b_2)$ образует кольцо.

1.15. Выяснить, образует ли множество $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ кольцо с бинарными операциями сложения и умножения по $\text{mod } p$:

- а) При $p = 2$;
- б) При $p = 3$;
- в) При $p = 4$;
- г) При $p = 8$.

1.16. Выяснить, образует ли множество многочленов $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^{n-i}$, где $a_i \in GF(p) = \{0, 1, 2, \dots, p-1\}$ с бинарными операциями умножения и сложения по двойному модулю $\text{mod } p$ и $\text{mod}(x^m + 1)$ кольцо многочленов.

1.17. Дано кольцо многочленов $f(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^{n-i}$, где $a_i \in GF(2) = \{0,1\}$ с бинарными операциями умножения и сложения по $\text{mod } 2$ и $\text{mod}(x^7 + 1)$. Построить идеалы:

а) J_1 с образующим элементом $g_1(x) = x + 1$.

б) J_2 с образующим элементом $g_2(x) = x^3 + x + 1$.

в) J_3 с образующим элементом $g_3(x) = x^3 + x^2 + 1$.

1.18. В предыдущей задаче, пользуясь многочленами степени меньшей $\deg\{g_i(x)\}$ как элементами, разложить кольцо многочленов на смежные классы по:

а) Идеалу J_1 . Если $\alpha, \beta \in F$, то $\alpha\beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ или $\beta = 0$. Если $\alpha, \beta \in F$, то $\alpha\beta = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ или $\beta = 0$.

б) Идеалу J_2 .

в) Идеалу J_3 .

1.19. * Выяснить, какие из множеств примера 1.11 образуют поле.

1.20. Выяснить, каким свойством должны обладать квадратные матрицы, чтобы их множество образовало поле.

1.21. Дано множество $\{0,1,2,3,4\}$ с бинарными операциями сложения и умножения по $\text{mod } 5$. Образует ли это множество поле? Как в этом поле осуществляется обратный элемент для каждого элемента множества?

Примеры решения вариантов задач

Решение задачи 1.1. В соответствии с определением группы G при заданной бинарной операции необходимо выполнение условий аксиом:

- замкнутости;
- ассоциативности;
- существования нейтрального элемента (единицы группы);
- существования обратного элемента.

Тогда имеем в вариантах задачи:

а) Группу относительно сложения и умножения. Действительно:

$$\forall \alpha, \beta \in R, \Rightarrow \alpha + \beta \in R, \alpha\beta \in R$$

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \Rightarrow \alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma, \alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$$

– нейтральный элемент $e = 0$ относительно сложения и $e = 1$ относительно умножения;

– обратный элемент $\alpha^{-1} \forall \alpha \in R \alpha^{-1} = -\alpha$ относительно сложения и $\alpha^{-1} = 1/\alpha$ относительно умножения, при этом $-\alpha, 1/\alpha \in R$.

б) Группу относительно умножения.

в) Группу относительно умножения.

г) Группу относительно сложения и умножения. Действительно: $\forall \alpha, \beta \in C$, где C – множество комплексных чисел, воспользуемся декартовой и полярной формами представления чисел, так, что

$$\alpha = |\alpha|e^{j\varphi_\alpha}, \beta = |\beta|e^{j\varphi_\beta}, \alpha = \operatorname{Re} \alpha + j\operatorname{Im} \alpha, \beta = \operatorname{Re} \beta + j\operatorname{Im} \beta;$$

$$\alpha + \beta = (\operatorname{Re} \alpha + \operatorname{Re} \beta) + j(\operatorname{Im} \alpha + \operatorname{Im} \beta) = (\operatorname{Re} \gamma + j\operatorname{Im} \gamma) \in C;$$

$$\alpha\beta = |\alpha|e^{j\varphi_\alpha} \cdot |\beta|e^{j\varphi_\beta} = |\alpha| \cdot |\beta|e^{j(\varphi_\alpha + \varphi_\beta)} = |\delta|e^{j\varphi_\delta} \in C;$$

$$\forall \alpha, \beta, \chi \in C \Rightarrow \alpha + (\beta + \chi) = (\alpha + \beta) + \chi, \alpha \cdot (\beta \cdot \chi) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \chi.$$

– нейтральный элемент $e = 0 + j0 = 0$ относительно сложения и $e = 1e^{j0} = 1$ относительно умножения:

– обратный элемент $\alpha^{-1} \forall \alpha \in C$ равен: $-\alpha = -\operatorname{Re} \alpha - j\operatorname{Im} \alpha$ относительно сложения и $\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{|\alpha|} \cdot e^{-j\varphi_\alpha}$ относительно умножения.

д) Группу относительно умножения.

е) Группу относительно умножения.

ж) Не образует группы ни относительно сложения, ни относительно умножения, так как не содержит единиц группы.

з) Не образует группы в обоих случаях, так как относительно сложений не включаются условия замкнутости, относительно умножения не существует α^{-1} .

и) Образует группы относительно умножения.

Решение задачи 1.11. В соответствии с определением 1.8 кольца R на элементах кольца должны быть заданы бинарные операции сложения и умножения и выполняться условия (аксиомы):

- коммутативности R как группы относительно сложения
- замкнутости относительно умножения
- ассоциативности относительно умножения
- дистрибутивности.

Тогда имеем в вариантах задачи:

а) Образует кольцо. Действительно, множество четных чисел X образует коммутативную группу относительно сложения

$$\forall \alpha, \beta \in X \Rightarrow \alpha + \beta \in X$$

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in X \Rightarrow \alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$$

$$\forall \alpha, \beta, \gamma \in X \Rightarrow \alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma, (\beta + \gamma)\alpha = \beta\alpha + \gamma\alpha$$

б) Не образует кольцо, так как не выполняются групповые свойства множества нечетных чисел.

в) Образуют кольцо.

г) Образуют кольцо.

д) Образуют кольцо.

е) Если считать, что ноль кратен целому числу q , то это множество образует кольцо.

ж) Не образует кольцо, так как не выполняются условия замкнутости по умножению. Действительно, пусть

$\alpha = a + b\sqrt{2}$, $\beta = a - b\sqrt{2}$ где a, b целые, тогда

$\gamma = \alpha\beta = a^2 - b^2 = a^2 - \frac{b^2}{\sqrt{2}} \times \sqrt{2}$, где $\frac{b^2}{\sqrt{2}}$ перестает быть целым.

Решение задачи 1.19. Напомним, что для того чтобы кольцо R образовывало поле F необходимо выполнение следующих условий:

- коммутативности кольца,
- существования единиц $1: \forall \alpha \in F, \alpha \cdot 1 = 1 \cdot \alpha = \alpha$,
- существования обратного элемента $\alpha^{-1}: \forall \alpha \in F$
 $\alpha \cdot \alpha^{-1} = \alpha^{-1} \cdot \alpha = 1$.

Тогда поля будут образовывать множества в задачах в 1.11 в), д), е).

2. ПРОСТРАНСТВА

Определение 2.1 (О2.1). Пространством называется множество объектов математической природы (точка, кривая, вектор, матрица, геометрическая фигура, многообразие и т.д.), именуемых элементами пространства, на которых заданы геометрические характеристики, определяющие расстояние между элементами, их размер, взаимное положение и т.д.

2.1. Метрические пространства. Примеры метрик

Определение 2.2 (О2.2). Пусть произвольные элементы x и y множества X образуют пару $\{x, y\}$, тогда отображение

$$d : \{x, y\} \Rightarrow R \quad (2.1)$$

во множество действительных чисел R , называется *метрикой* и обозначается $d(x, y)$, если оно удовлетворяет:

1. условию неотрицательности:
 $d(x, y) > 0$ для $\forall x, y : x \neq y$; $d(x, y) = 0$ для $\forall x, y : x \equiv y$;
2. условию симметрии: $d(x, y) = d(y, x)$ для $\forall x, y$;
3. условию неравенства «треугольника»:
 $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ для x, y, z .

Содержательно, метрика представляет собой вещественнозначную положительную величину, определяющую *расстояние* между элементами или *степень различия* элементов множества X .

Определение 2.3 (О2.3). Множество X с введенной в нем метрикой $d = d(x, y)$ образует метрическое пространство (МП), обозначаемое в одной из форм $\{X, d\}$ или X_d .

Примечание 2.1 (П2.1). Так как на элементах множества X может быть задано бесконечное число метрик $d = d(x, y)$, то на нем может быть построено бесконечное число метрических пространств $\{X, d\}$.

Рассмотрим примеры метрик и метрических пространств.

1. Если $X = R$ – множество действительных чисел, то R образует метрическое пространство $\{R, d\}$ с метрикой

$$d(x, y) = |x - y| = |y - x|; x, y \in R. \quad (2.2)$$

Эта метрика именуется обычной (простой) или абсолютной на R .

2. Если $X = R^n$, то есть оно образовано n -элементными числовыми массивами (именуемыми также n -ками, n -кортежами, n -векторами), представляемыми в виде

$x = (x_1, x_2 \dots x_n)$; $y = (y_1, y_2 \dots y_n)$; $x_i, y_j \in R$; $i, j = \overline{1, n}$; то на множестве X может быть задана обобщенная гёльдеровская векторная метрика $d_p(x, y)$, определяемая выражением

$$d_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n (|x_i - y_i|)^p \right)^{1/p} \quad (2.3)$$

где p – целое положительное число. Наиболее употребительными векторными метриками являются:

2.1. абсолютная векторная метрика $d_p(x, y)$ при $p = 1$

$$d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| ; \quad (2.4)$$

2.2. квадратичная векторная метрика $d_p(x, y)$ при $p = 2$

$$d_2(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n (|x_i - y_i|)^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}; \quad (2.5)$$

2.3. экстремальная метрика $d_p(x, y)$ при $p \Rightarrow \infty$

$$d_\infty(x, y) = \lim_{p \rightarrow \infty} \left(\sum_{i=1}^n (|x_i - y_i|)^p \right)^{1/p} = \max_i \{ |x_i - y_i|; i = \overline{1, n} \}; \quad (2.6)$$

3. Если множество X образовано n -ками вида $x = (x_1, x_2 \dots x_n)$; $y = (y_1, y_2 \dots y_n)$; где элементы x_i, y_j ; $i, j = \overline{1, n}$; принадлежат простому полю Галуа $GF(p) = \{0, 1, 2 \dots p-1\}$, то n -ки x и y именуется кодами или кодовыми векторами, при этом на множестве X может быть построена метрика Ли

$$d_L(x, y) = \sum_{i=1}^n \min\{|x_i - y_i|, p - |x_i - y_i|\}; \quad (2.7)$$

Если $p = 2$ так, что $GF(p) = GF(2) = \{0, 1\}$, то метрика Ли вырождается в метрику $d_H(x, y)$ Хэмминга

$$d_L(x, y) = d_H(x, y) = \sum_{i=1}^n \{x_i \oplus y_i\}, \quad (2.8)$$

где \oplus – знак операции суммирования по модулю два ($\text{mod } 2$). Содержательно метрика Хэмминга определяет число разрядов кодовых векторов x и y , в которых эти векторы отличаются друг от друга. Метрика $d_H(x, y)$ Хэмминга именуется также *кодовым расстоянием*.

4. Если множество X образовано множеством вещественнозначных функций времени $x(t)$ и $y(t)$, заданных на интервале $T = \{t: t_0 \leq t \leq t_k\}$, то на множестве X может быть задана p -ичная функциональная метрика $d_p(x, y)$, определяемая интегральным выра-

жением

$$d_p(x, y) = \left\{ \int_{t_0}^{t_k} (|x(t) - y(t)|)^p dt \right\}^{1/p}. \quad (2.9)$$

Наиболее употребительными функциональными метриками являются:

4.1. абсолютная функциональная метрика при $p = 1$

$$d_p(x, y) |_{p=1} = d_1(x, y) = \int_{t_0}^{t_k} (|x(t) - y(t)|) dt; \quad (2.10)$$

4.2. квадратичная функциональная метрика при $p = 2$

$$d_p(x, y) = d_2(x, y) = \left\{ \int_{t_0}^{t_k} (|x(t) - y(t)|)^2 dt \right\}^{1/2}; \quad (2.11)$$

4.3. экстремальная функциональная метрика при $p \Rightarrow \infty$

$$d_\infty(x, y) = \lim_{p \rightarrow \infty} d_p(x, y) = \sup_{t \in T} \{|x(t) - y(t)|\} \quad (2.12)$$

Определение 2.4 (O2.4). Метрическое пространство $\{X, d\}$ называется *сепарабельным*, если для любого $\varepsilon > 0$ существует счетная последовательность $\{x_1, x_2, \dots\}$ элементов множества X таких, что $d(x, x_i) < \varepsilon$ для некоторого i и любого $x \in X$.

Определение 2.5 (O2.5). Метрическое пространство $\{X, d\}$ называется *компактным*, если можно найти конечную последовательность $\{x_1, x_2, \dots, x_{n(\varepsilon)}\}$ элементов множества X таких, что $d(x, x_i) < \varepsilon$ для некоторого $i: 1 \leq i \leq n(\varepsilon)$ и любого элемента $x \in X$.

Примеры и задачи

2.1.1. Вычислить векторную метрику $d_1(x, y)$ для векторов $x = (-5, 7, -2)$, $y = (5, -7, 2)$, элементы которых принадлежат множеству действительных чисел R .

2.1.2. Вычислить векторную метрику $d_2(x, y)$ для векторов $x = (-5, 7, -2)$, $y = (5, -7, 2)$, элементы которых принадлежат множеству действительных чисел R .

2.1.3. Вычислить векторную метрику $d_\infty(x, y)$ для векторов примера 2.1.1.

2.1.4. Построить кривую зависимости значения векторной метрики $d_p(x, y)$ как функцию от $p \in [1, 2, \infty)$ для векторов примера 2.1.1.

2.1.5. Вычислить векторную метрику $d_p(x, y)$ для векторов $x = (-5, 7, -2)$, $y = (0, 0, 0)$ для значений $p = 1, 2, \infty$.

2.1.6. Построить кривые постоянных значений $d_p(x, y) = 1$ для векторов $x = (x_1, x_2)$, $y = (0, 0)$ для значений $p = 1, 2, \infty$.

2.1.7. Вычислить векторную метрику Ли $d_L(x, y)$ для векторов $x = (1, 4, 2)$, $y = (2, 1, 3)$, элементы которых принадлежат простому полю Галуа $GF(5) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

2.1.8. Вычислить векторную метрику Ли $d_L(x, y)$ для векторов примера 2.1.7. при условии, что их элементы принадлежат простому полю Галуа $GF(7) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

2.1.9. Вычислить векторную метрику $d_H(x, y)$ Хэмминга (кодовое расстояние) для кодовых векторов $x = (1011010)$ и $y = (0101101)$.

2.1.10. Вычислить функциональную метрику $d_1(x, y)$ для функций $x(t) = 1$, $y(t) = t$, $t \in T = [t: 0 \leq t \leq 1]$.

2.1.11. Вычислить функциональную метрику $d_2(x, y)$ для функций $x(t) = 1$, $y(t) = t$, $t \in T = [t: 0 \leq t \leq 1]$.

2.1.12. Вычислить функциональную метрику $d_\infty(x, y)$ для функций $x(t) = 1$, $y(t) = t$, $t \in T = [t: 0 \leq t \leq 1]$.

2.1.13. Построить кривую зависимости значения функциональной метрики $d_p(x, y)$ как функцию от $p \in [1, 2, \infty)$ для функций $x(t) = 1$, $y(t) = t$, $t \in T = [t: 0 \leq t \leq 1]$.

2.1.14. Вычислить функциональную метрику $d_p(x, y)$ для функций $x(t) = t$, $y(t) = t^2$, $t \in T = [t: -1 \leq t \leq 1]$ для значений $p = 1, 2, \infty$.

Решение вариантов задач

Вычислить векторную метрику Ли $d_L(x, y)$ для векторов $x = (1, 4, 2)$, $y = (2, 1, 3)$, элементы которых принадлежат простому полю Галуа $GF(5) = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Решение. В силу определения (2.7) метрики Ли можно записать

$$d_L(x, y) = \sum_{i=1}^n \min\{|x_i - y_i|, p - |x_i - y_i|\} = \min\{|1-2|; 5-|1-2|\} + \min\{|4-1|; 5-|4-1|\} + \min\{|2-3|; 5-|2-3|\} = \min\{1; 4\} + \min\{3; 2\} + \min\{1; 4\} = 1 + 2 + 1 = 4.$$

Ответ: $d_L(x, y) = 4$.

2.2. Линейные пространства и операторы. Матрицы линейных операторов

Определение 2.6 (О2.6). *Линейным пространством* (ЛП) \mathbf{X} над полем F называется аддитивная абелева группа элементов, именуемых векторами (при этом *сумма двух векторов* совпадает с диагональю параллелограмма, стороны которого совпадают с суммируемыми векторами), дополненная бинарной операцией умножения вектора $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ на скаляр $\alpha \in F$, удовлетворяющей условиям:

1. ассоциативности: $\forall \alpha, \beta \in F, \forall \mathbf{x} \in \mathbf{X} \quad \alpha(\beta \mathbf{x}) = \alpha\beta \mathbf{x}$;
2. дистрибутивности: $\forall \alpha, \beta \in F, \forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbf{X} \quad \alpha(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \alpha \mathbf{x}_1 + \alpha \mathbf{x}_2$;
 $(\alpha + \beta) \mathbf{x}_1 = \alpha \mathbf{x}_1 + \beta \mathbf{x}_1$;
3. умножения вектора на (ноль) $0 \in F$ и на (единицу) $1 \in F$, осуществляемых по правилам $\forall \mathbf{x} \in \mathbf{X}: 1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}, 0 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$, где $\mathbf{0} \in \mathbf{X}$, $\mathbf{0}$ – ноль-вектор.

Примечание 2.2 (П2.2). Если $F = R$ (R – множество действительных чисел), то ЛП \mathbf{X} называется действительным линейным векторным пространством (ДЛП). Если $F = C$ (C – множество комплексных чисел), то ЛП \mathbf{X} называется комплексным линейным пространством (КЛП).

Определение 2.7 (О2.7). Пусть $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$ – векторы ЛП \mathbf{X} ($\mathbf{x}_i \in \mathbf{X}; i = \overline{1, k}$) над полем F и $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k$ – скаляры из F ($\alpha_i \in F; i = \overline{1, k}$), тогда сумма

$$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_k \mathbf{x}_k = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{x}_i \quad (2.13)$$

именуется *линейной комбинацией* из k векторов $\mathbf{x}_i \in \mathbf{X}$ ($i = \overline{1, k}$) с коэффициентами $\alpha_i \in F$ ($i = \overline{1, k}$), которая задает некоторый вектор, принадлежащий ЛП \mathbf{X} .

Определение 2.8 (О2.8). Пусть вектора $\mathbf{x}_i \in \mathbf{X}$ ($i = \overline{1, k}$), тогда *линейной оболочкой* $L\{\mathbf{x}_i; i = \overline{1, k}\}$ над полем F , натянутой на вектора $\mathbf{x}_i \in \mathbf{X}$ ($i = \overline{1, k}$) называется множество линейных комбинаций из векторов $\mathbf{x}_i \in \mathbf{X}$ ($i = \overline{1, k}$) с коэффициентами $\alpha_i \in F$ ($i = \overline{1, k}$) (2.9) так, что

$$L\{\mathbf{x}_i; i = \overline{1, k}\} = \left\{ \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{x}_i; \alpha_i \in F; i = \overline{1, k} \right\}. \quad (2.14)$$

Определение 2.9 (О2.9). Множество векторов ($\mathbf{x}_i \in \mathbf{X}; i = \overline{1, k}$) ЛП \mathbf{X} называется *линейно независимым*, если равенство над полем F

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{x}_i = \mathbf{0}. \quad (2.15)$$

возможно лишь при всех $\alpha_i = 0; i = \overline{1, k}$.

Определение 2.10 (O2.10). Множество векторов $(x_i \in \mathbf{X}; i = \overline{1, k})$ ЛП \mathbf{X} называется *линейно зависимым* над полем F , если существуют $\alpha_i \in F; i = \overline{1, k}$, одновременно *не равные нулю*, для которых оказывается

справедливым равенство $\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i = 0$.

Определение 2.11 (O2.11). Если ЛП \mathbf{X} представимо линейной оболочкой, натянутой на n линейно независимых векторов $(x_i \in \mathbf{X}; i = \overline{1, n})$ так, что любое множество из $(n+1)$ -го векторов оказывается линейно зависимым, то число n называется *размерностью* пространства \mathbf{X} , обозначаемой $\dim \mathbf{X}$, при этом становится справедливой запись

$$\mathbf{X} = \left\{ \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i; \alpha_i \in F; i = \overline{1, n}; x_i \in \mathbf{X} \right\}, \dim \mathbf{X} = n. \quad (2.16)$$

Примечание 2.3 (П2.3). В случаях, когда необходимо указывать размерность ЛП \mathbf{X} $\dim \mathbf{X} = n$, может быть использовано обозначение ЛП в форме \mathbf{X}^n . Причем, если ЛП \mathbf{X} – вещественное, то вместо \mathbf{X}^n используется запись R^n ; если же ЛП \mathbf{X} – комплексное, то- C^n .

Примечание 2.4 (П2.4). Линейное пространство \mathbf{X}^n называется *конечномерным*, если $n < \infty$, и *бесконечномерным* – в противном случае.

Определение 2.12 (O2.12). Пусть $\dim \mathbf{X} = n$, тогда любая система (набор) $\{e_i \in \mathbf{X}; i = \overline{1, n}\}$ *линейно независимых* векторов e_i образует *базис* e .

Утверждение 2.1 (У2,1). Пусть $e = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ базис ЛП \mathbf{X} над полем F , тогда любой вектор $x \in \mathbf{X}$ представим в форме

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n; x_i \in F; i = \overline{1, n} \quad (2.17)$$

При этом представление (2.17) в базисе e над полем F *единственное*.

Доказательство справедливости сформулированного утверждения опирается на факт линейной независимости элементов базиса e . Действительно, допустим, что существует альтернативное представление вектора x в базисе e , задаваемое в форме

$$x = \kappa_1 e_1 + \kappa_2 e_2 + \dots + \kappa_n e_n; \kappa_i \in F; i = \overline{1, n}. \quad (2.18)$$

Вычтем равенство (2.18) из (2.17), тогда получим

$$(\kappa_1 - x_1) e_1 + (\kappa_2 - x_2) e_2 + \dots + (\kappa_n - x_n) e_n = 0. \quad (2.19)$$

Введем обозначение $\alpha_i = \kappa_i - x_i; i = \overline{1, n}$, тогда (2.19) можно записать в форме (2.14), которое для случая линейно независимых элементов $e_i; i = \overline{1, n}$ выполняется при всех $\alpha_i = \kappa_i - x_i = 0; i = \overline{1, n}$. Таким образом $\kappa_i = x_i; i = \overline{1, n}$. ■

Примечание 2.5 (П2.5). Вектор x именуется *бескоординатным* вектором ЛП \mathbf{X} . Вектор x , составленный из чисел x_i $i = \overline{1, n}$, именуемых его *координатами* в базисе e , и сформированный в виде столбца

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = [x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n]^T = \text{col}\{x_i; i = \overline{1, n}\}, \quad (2.20)$$

называется *координатным* вектором, при этом следует помнить о функциональной связи

$$x = x(e).$$

Пространство X^n , составленное из координатных векторов x (2.20), именуется *арифметическим* линейным пространством.

Определение 2.13 (О2.13). Линейная оболочка

$$\mathbf{P} = \mathbf{L}\{x_i; i = \overline{1, m}; m < n = \dim \mathbf{X}\}, \quad (2.21)$$

натянутая на систему из m векторов x_i , называется *подпространством* пространства \mathbf{X} , если \mathbf{P} обладает свойствами линейного пространства, при этом становится справедливой запись $\mathbf{P} \subset \mathbf{X}$.

Определение 2.14 (О2.14). Пусть \mathbf{P} и \mathbf{R} подпространства пространства \mathbf{X} : $\mathbf{P}, \mathbf{R} \subset \mathbf{X}$, тогда:

1. *суммой* $\mathbf{P} + \mathbf{R}$ подпространств \mathbf{P} и \mathbf{R} называется линейная оболочка $\mathbf{P} + \mathbf{R} = \mathbf{L}\{x = p + r : p \in \mathbf{P}, r \in \mathbf{R}\}$, при этом $\mathbf{P} + \mathbf{R} \subset \mathbf{X}$;

2. *пересечением* $\mathbf{P} \cap \mathbf{R}$ подпространств \mathbf{P} и \mathbf{R} называется множество элементов $x \in \mathbf{X}$, которые одновременно принадлежат подпространствам \mathbf{P} и \mathbf{R} , что записывается в форме $\mathbf{P} \cap \mathbf{R} = \{x : x \in \mathbf{P} \ \& \ x \in \mathbf{R}\}$, при этом $\mathbf{P} \cap \mathbf{R} \subset \mathbf{X}$.

Определение 2.15 (О2.15). Подпространства $\mathbf{P}, \mathbf{R} \subset \mathbf{X}$ называются *линейно независимыми*, если $\mathbf{P} \cap \mathbf{R} = \mathbf{0}$, где $\mathbf{0}$ - нулевой вектор, являющийся нейтральным элементом аддитивной группы \mathbf{X} .

Определение 2.16 (О2.16). Пусть $\{\mathbf{R}_i \subset \mathbf{X} \ ; \ i = \overline{1, k}\}$ - линейно независимые подпространства, тогда сумма этих подпространств $\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 + \dots + \mathbf{R}_k$ является *прямой суммой* подпространств, что обозначается знаком \oplus и записывается в форме

$$\mathbf{R}_1 + \mathbf{R}_2 + \dots + \mathbf{R}_k = \mathbf{R}_1 \oplus \mathbf{R}_2 \oplus \dots \oplus \mathbf{R}_k = \bigoplus_{i=1}^k \mathbf{R}_i. \quad (2.22)$$

Примечание 2.6 (П2.6). Если подпространства $\mathbf{P}, \mathbf{R} \subset \mathbf{X}$:

1. линейно независимы, то

$$\dim \{ \mathbf{P} + \mathbf{R} = \mathbf{P} \oplus \mathbf{R} \} = \dim \mathbf{P} + \dim \mathbf{R}, \quad (2.23)$$

2. произвольны, то

$$\dim \{P+R\} = \dim P + \dim R - \dim \{P \cap R\}. \quad (2.24)$$

Определение 2.17 (O2.17). Оператор A , отображающий элементы $x \in X$ ЛП X в элементы $y \in Y$ ЛП Y , где вектор $y = Ax$ именуется *образом* вектора x , а вектор x – *прообразом* вектора y , называется *линейным оператором*, если над полем F выполняются линейные соотношения

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 Ax_1 + \alpha_2 Ax_2 = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2, \quad (2.25)$$

где $\alpha_1, \alpha_2 \in F; x_1, x_2 \in X; y_1, y_2 \in Y; y_1 = Ax_1; y_2 = Ax_2$.

Рассмотрим *структуру пространства* линейного оператора (ЛО) A , для чего введем следующие определения.

Определение 2.18 (O2.18). Множество всех образов $y = Ax$, где $y \in Y, x \in X$ называется *областью значений* ЛО A или его *образом*, обозначается $\text{Im}\{A\}$ и задается в форме

$$\text{Im}\{A\} = \{y \in Y: y = Ax; x \in X\}. \quad (2.26)$$

Определение 2.19 (O2.19). Множество всех векторов $x \in X$, для которых выполняется равенство $Ax = 0$, образует *ядро* $\text{Ker}\{A\}$ или *нуль-пространство* $N\{A\}$ линейного оператора A , которое задается в форме

$$\text{Ker}\{A\} = N\{A\} = \{x \in X : Ax = 0\}. \quad (2.27)$$

Определение 2.20 (O2.20). Рангом $\text{rang}\{A\} = \text{rank}\{A\} = r_A$ линейного оператора A называется размерность $\dim \text{Im}\{A\}$ образа $\text{Im}\{A\}$ этого оператора.

Определение 2.21 (O2.21). Дефектом $\text{def}\{A\} = v_A$ линейного оператора A называется размерность $\dim \{\text{Ker}\{A\} = N\{A\}\}$ ядра (нуль-пространства) этого оператора.

Определение 2.22 (O2.22). Подпространство $\varphi \subset X$ линейного пространства X называется *инвариантным* относительно линейного оператора A , если выполняется условие

$$A\varphi \subset \varphi, \quad (2.28)$$

в том смысле, что для $\forall x \in \varphi \quad y = Ax \in \varphi$.

Определение 2.23 (O2.23). Если $\dim\{\varphi\} = 1$, то *инвариантное* подпространство φ вырождается в вектор ζ , при этом условие (2.28) получает представление

$$A\zeta = \lambda\zeta, \quad (2.29)$$

где « $A\zeta$ » означает « A действует на вектор ζ », « $\lambda\zeta$ » означает « λ умножить на ζ », λ – скаляр, именуемый *собственным* значением (числом) ЛО A , ζ – *собственный* вектор ЛО A , линейная оболочка $L\{\zeta\}$, натянутая на собственный вектор ζ , представляет собой *собственное* (инвариантное) подпространство φ .

Примечание 2.7 (П2.7). В силу соотношения (2.29) собственный вектор ζ линейного оператора A задается с точностью до мультипликативной константы.

Определение 2.24 (О2.24). Пусть в n -мерном ЛП $\mathbf{X} = \mathbf{X}^n$ выбран базис $e = \{e_i; i = \overline{1, n}\}$, а в m -мерном ЛП $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}^m$ выбран базис $f = \{f_j; j = \overline{1, m}\}$, тогда матрицей A относительно пары базисов (e, f) линейного оператора

$$A: \mathbf{X} \Rightarrow \mathbf{Y} : y = Ax ; x \in \mathbf{X} ; y \in \mathbf{Y} \quad (2.30)$$

называется *двумерный $(m \times n)$ -массив чисел*, столбцовое представление которого

$$A = [A_1 \ A_2 \ \dots \ A_n] = \text{row}\{A_i; i = \overline{1, n}\}, \quad (2.31)$$

таково, что столбцы A_i ($i = \overline{1, n}$) его составлены из числовых коэффициентов A_{ji} ($j = \overline{1, m}; i = \overline{1, n}$) представления вектора $A e_i$ в базисе f линейной комбинацией

$$A e_i = A_{i1} f_1 + A_{i2} f_2 + \dots + A_{im} f_m. \quad (2.32)$$

Примечание 2.8 (П2.8). Если вектор x записать в координатной форме в базисе $e = \{e_i; i = \overline{1, n}\}$ с помощью представления $x = \sum_{i=1}^n x_{ei} e_i$, а вектор y в координатной форме в базисе $f = \{f_j; j = \overline{1, m}\}$ с помощью представления $y = \sum_{j=1}^m y_{fj} f_j$, то введение матрицы A линейного оператора A позволяет от *векторно-операторной* формы (2.30) перейти к *векторно-матричной мультипликативной* форме

$$y_f = Ax_e, \quad (2.33)$$

в которой $y_f = \text{col}\{y_{fj}; j = \overline{1, m}\}$, $x_e = \text{col}\{x_{ei}; i = \overline{1, n}\}$.

Определение 2.25 (О2.25). Две матрицы A и \bar{A} называются *подобными*, если они задают один и тот же линейный оператор A относительно различных пар базисов (e, f) и (\bar{e}, \bar{f}) .

Примечание 2.9 (П2.9). В силу определения 2.25 линейному оператору A соответствует множество сколь угодно большой *мощности* подобных матриц, каждая из которых порождается своей парой (e, f) базисов.

Введем в рассмотрение *матричное условие подобия* двух матриц одной размерности $(m \times n)$ с помощью следующего утверждения.

Утверждение 2.2 (У2.2). Пусть линейный оператор A реализует отображение $A: \mathbf{X} \Rightarrow \mathbf{Y} : y = Ax ; x \in \mathbf{X} ; y \in \mathbf{Y} : \dim \mathbf{X} = n ; \dim \mathbf{Y} = m$. Пусть в ЛП \mathbf{X} задана пара базисов (e, \bar{e}) , каждый из которых представляет собой систему линейно независимых векторов соответственно $e = \{e_i; i = \overline{1, n}\}$ и $\bar{e} = \{\bar{e}_i; i = \overline{1, n}\}$. Базисы связаны матрицей M преобразования базисов, задаваемого соотношением

$$e = M \bar{e}, \quad (2.34)$$

где $(n \times n)$ матрица $M = \text{row}\{M_i; i = \overline{1, n}\}$ составлена из столбцов M_i , элементы которых M_{ji} представляют собой коэффициенты линейного разложения элементов $\{e_i; i = \overline{1, n}\}$ базиса e по базисным компонентам $\{\bar{e}_i; i = \overline{1, n}\}$ базиса \bar{e} , задаваемого в форме

$$e_i = M_{1i} \bar{e}_1 + M_{2i} \bar{e}_2 + \dots + M_{ni} \bar{e}_n. \quad (2.35)$$

Пусть в ЛП \mathbf{Y} задана пара базисов (f, \bar{f}) , которые составлены из m векторов $f = \{f_l; l = \overline{1, m}\}$ и $\bar{f} = \{\bar{f}_l; l = \overline{1, m}\}$ соответственно и связаны $(m \times m)$ – матрицей T преобразования базисов в форме

$$f = T \bar{f}, \quad (2.36)$$

где матрица T строится по той же схеме, что и матрица M .

Тогда подобные $(m \times n)$ матрицы A и \bar{A} , задающие линейный оператор A относительно пар базисов (e, f) и (\bar{e}, \bar{f}) соответственно связаны матричным соотношением (условием) подобия

$$T \bar{A} = A M. \quad (2.37)$$

Доказательство утверждения строится на представлении *бескоординатного* вектора $x \in \mathbf{X}$ относительно базисов e и \bar{e} в форме *координатных* векторов x и \bar{x} , связанных в силу (2.34) векторно-матричным соотношением

$$x = M \bar{x}, \quad (2.38)$$

а также *бескоординатного* вектора $y \in \mathbf{Y}$ относительно базисов f и \bar{f} в форме *координатных* векторов y и \bar{y} , связанных в силу (2.36) векторно-матричным соотношением

$$y = T \bar{y}. \quad (2.39)$$

Если теперь *векторно-операторное* соотношение $y = Ax$ записать в векторно-матричной форме, то для каждой пары базисов (e, f) и (\bar{e}, \bar{f}) соответственно получим векторно-матричные представления

$$y = Ax = A M \bar{x}, \quad (2.40)$$

$$\bar{y} = \bar{A} \bar{x}. \quad (2.41)$$

Подстановка (2.41) в (2.39) приводит к векторно-матричному соотношению

$$y = T \bar{A} \bar{x}. \quad (2.42)$$

Сравнение векторно-матричных соотношений (2.40) и (2.42) приводит к соотношению (2.37). ■

Примечание 2.9 (П2.9). Так как матрицы преобразования базисов M и T таковы, что существуют обратные им матрицы M^{-1} и T^{-1} , то (2.37) имеет следующие эквивалентные представления

$$A = T \bar{A} M^{-1}, \quad \bar{A} = T^{-1} A M. \quad (2.43)$$

Примечание 2.10 (П2.10). Если размерности линейных пространств X и Y таковы, что они совпадают ($n = m$), базисы (e, \bar{e}) и (f, \bar{f}) связаны идентичными матрицами их преобразования так, что $T = M$, то матричные условия подобия (2.37) и (2.43) принимают вид

$$M \bar{A} = A M, \quad A = M \bar{A} M^{-1}, \quad \bar{A} = M^{-1} A M, \quad (2.44)$$

где A и \bar{A} – подобные $(n \times n)$ -квадратные матрицы.

Введенная в рассмотрение матрица A линейного оператора A позволяет соотношение (2.29) записать в векторно-матричной форме

$$A \xi = \lambda \xi \quad (2.45)$$

или

$$(A - \lambda I) \xi = 0. \quad (2.46)$$

В (2.45), (2.46) ξ есть собственный вектор ζ ЛО A , записанный относительно базиса $e = \{e_i; i = \overline{1, n}\}$ в координатной форме, именуемый *собственным вектором матрицы A* .

Определение 2.26 (О2.26). Матрица $A - \lambda I$ называется *характеристической матрицей* матрицы A , определитель $\det(A - \lambda I) = \Delta(\lambda)$ не зависит от выбора базиса e и называется *характеристическим многочленом* матрицы A (ЛО A), всюду выше и ниже I – единичная матрица, согласованная по размерности с $(n \times n)$ -матрицей A .

Система уравнений (2.46) относительно компонентов собственного вектора ξ *совместна*, а потому имеет *ненулевое* решение $\xi \neq 0$, если определитель этой системы равен нулю, т.е. при выполнении равенства

$$\det(A - \lambda I) = \Delta(\lambda) = 0 \quad (2.47)$$

Уравнение (2.47) называется *характеристическим уравнением* матрицы A (ЛО A), а его корни $\{\lambda_i; i = \overline{1, n}\}$ являются собственными значениями этой матрицы (ЛО A).

Пусть λ_k – некоторое собственное значение матрицы A . Если характеристический многочлен $\Delta(\lambda)$ можно представить в виде $\Delta(\lambda) = (\lambda - \lambda_k)^{m_k} Q(\lambda_k)$, где $Q(\lambda_k) \neq 0$, то число m_k называется *алгебраической кратностью* собственного значения λ_k .

Рассмотрим случай, когда все корни характеристического уравнения (2.43) являются различными, т.е. $\Delta(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) \dots (\lambda - \lambda_n)$. Тогда собственный вектор ξ_k матрицы A , соответствующий значению λ_k , является решением уравнения

$$(A - \lambda_k I)\xi_k = 0 \quad (2.48)$$

Это означает, что вектор ξ_k принадлежит ядру матрицы $(A - \lambda_k I)$ т.е. $\xi_k \in N(A - \lambda_k I)$, таким образом, ядро $N(A - \lambda_k I)$ является *собственным* подпространством матрицы A , порожденным собственным вектором ξ_k . Это подпространство является одномерным, если дефект матрицы $(A - \lambda_k I)$ равен единице.

Собственные векторы $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, соответствующие различным собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, являются линейно независимыми, образуют базис в пространстве X^n , само пространство X^n расщепляется оператором A с матрицей A в прямую сумму одномерных собственных подпространств в форме

$$X^n = \bigoplus_{k=1}^n H_k; H_k = N(A - \lambda_k I); k = \overline{1, n}. \quad (2.49)$$

Матрица A оператора A в базисе из собственных векторов является диагональной с собственными значениями $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ на главной диагонали, при этом справедливо равенство

$$\Lambda = \text{diag}\{\lambda_k; k = \overline{1, n}\} = H^{-1}AH; H = \text{row}\{H_k; k = \overline{1, n}\}, \quad (2.50)$$

где H – матрица линейно независимых *собственных* векторов ξ_k матрицы A .

Определение 2.27 (О2.2) Оператор A и его матрица A , имеющие ровно n линейно-независимых собственных векторов, называются оператором и матрицей *простой структуры*. Таким образом, любая матрица, имеющая различные собственные значения, подобна диагональной матрице Λ и является матрицей простой структуры.

Рассмотрим случай кратных корней характеристического уравнения. Тогда $\Delta(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} (\lambda - \lambda_2)^{m_2} \dots (\lambda - \lambda_k)^{m_k}$ и все собственные векторы ξ_k , соответствующие значению λ_k , также являются решениями уравнения (2.46).

Определение 2.28 (О2.28). Число μ_k линейно-независимых собственных векторов равно размерности собственного подпространства $H_k = N(A - \lambda_k I)$ (или дефекту матрицы $A - \lambda_k I$), которое называется *геометрической кратностью* или *степенью вырожденности* собственного значения λ_k .

Ядро матрицы $A - \lambda_k I$ называется *корневым подпространством* K_k соответствующим значению λ_k . Геометрическая кратность корня μ_k больше его алгебраической кратности m_k , а собственное подпространство H_k содержится в корневом подпространстве K_k .

Для любого оператора с матрицей A существует аналогичное (2.49) разложение пространства X^n на прямую сумму его корневых подпространств:

$$X^n = K_1 \oplus K_2 \oplus \dots \oplus K_r. \quad (2.51)$$

В том случае и только тогда, когда алгебраические и геометрические кратности всех собственных значений матрицы A совпадают, совпадают и их собственные и корневые подпространства и, следовательно, матрица имеет простую структуру.

В общем случае произвольная матрица A линейного оператора преобразованием подобия может быть приведена к *нормальной жордановой форме*:

$$J = \text{diag}\{J_1, J_2, \dots, J_r\} = T^{-1}AT, \quad (2.52)$$

где блоки J_i имеют размерность $m_i \times m_i$ и могут быть представлены следующим образом: $J_i = \text{diag}\{J_{i_1}, J_{i_2}, \dots, J_{i_{\mu_i}}\}$, причем каждый подблок имеет вид

$$J_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \vdots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \lambda_i \end{bmatrix}; \quad (2.53)$$

каждый блок T_i матрицы $T = [T_1 T_2, \dots, T_r]$ состоит из столбцов координат одного из линейно-независимых векторов и других корневых векторов, соответствующих собственному значению λ_i . Если матрица имеет простую структуру разложения, то (2.52) совпадает с (2.50).

Введем в рассмотрение численную (скалярную) характеристику элементов (векторов) $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ арифметического пространства X^n , именуемую *нормой* вектора, полагая ниже, что пространство действительное, что позволяет записать $X^n = R^n$.

Определение 2.29 (O2.29). Пусть функция $\varphi(\cdot)$ сопоставляет каждому вектору $x \in R^n$ – линейного вещественного пространства вещественное число $\|x\|$, называемое *нормой* (размером) этого вектора, если выполняются условия:

- 1) $\varphi(x) = \|x\| > 0$ для $\forall x \neq 0$ и $\varphi(x) = \|x\| = 0$ при $x = 0$;
- 2) $\varphi(\alpha x) = \|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$;
- 3) $\varphi(x + y) = \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Универсальной векторной нормой является векторная норма Гельдера, задаваемая выражением:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p}; \quad p - \text{целое положительное.}$$

Наиболее употребительными векторными нормами являются нормы при $p = 1, 2$ и ∞ :

1. $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$ – абсолютная норма вектора;
2. $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2}$ – квадратичная или *евклидова* норма вектора;
3. $\|x\|_\infty = \lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p = \max_{i=1, n} |x_i|$ – бесконечная или экстремальная норма вектора.

Приведенные *векторные нормы эквивалентны* в том смысле, что для норм $\|x\|_\mu$ и $\|x\|_\nu$ существуют положительные числа β_1 и β_2 такие, что выполняются неравенства: $\beta_1 \|x\|_\mu \leq \|x\|_\nu \leq \beta_2 \|x\|_\mu$.

Так для норм $\|x\|_1$, $\|x\|_2$ и $\|x\|_\infty$ выполняются оценочные неравенства:

$$\begin{aligned} \|x\|_2 &\leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2, \\ \|x\|_\infty &\leq \|x\|_2 \leq \sqrt{n} \|x\|_\infty, \\ \|x\|_\infty &\leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_\infty. \end{aligned}$$

Линейное арифметическое пространство X^n с введенной векторной нормой $\|x\|_p$ образует линейное *нормированное* пространство, обозначаемое в одной из форм $\{X^n, \|x\|_p\}$ или X_p^n , в дальнейшем в основном рассматривается случай $p = 2$, при этом индекс нормы опускается.

Примечание 2.11 (П2.11). Линейное нормированное пространство является *метрическим* так, как выполняется цепочка равенств $\|x\| = \|x - 0\| = d(x, 0)$, где 0 -нулевой вектор.

Введем в рассмотрение численную характеристику, являющуюся оценкой *взаимного положения* элементов (векторов) линейного пространства. Такой характеристикой является *скалярное произведение* двух координатных векторов.

Определение 2.30 (О2.30). Пусть функция $\varphi\{\cdot\}$ сопоставляет каждой паре $\{\cdot\} = \{x, y\}$ векторов $x, y \in X^n = R^n$ линейного вещественного арифметического пространства вещественное *число*, обозначаемое в одной из форм (x, y) или $\langle x, y \rangle$, называемое *скалярным произведением* (СП) векторов x и y , если выполняются условия:

1. коммутативности: $(x, y) = (y, x)$;
2. дистрибутивности: $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$;
3. линейности: $(\alpha \cdot x, y) = \alpha \cdot (x, y), \alpha \in R$;

4. $(x, x) = \|x\|^2$, где $\|x\| = \|x\|_E$ – евклидова норма вектора x ;

5. неравенства Коши-Буняковского: $|(x, y)| \leq \|x\| \cdot \|y\|$;

б. оценки взаимного положения векторов x и y :

$$(x, y) = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos\{\text{ang}\{x, y\}\},$$

где $\text{ang}\{x, y\}$ – угол между векторами x и y .

Примечание 2.12 (П2.12). Вычисление скалярного произведения (x, y) векторов $x = \text{col}\{x_i; i = \overline{1, n}\}$, $y = \text{col}\{y_i; i = \overline{1, n}\}$ производится в силу соотношений

$$(x, y) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \sum_{i=1}^n y_i x_i = (y, x). \quad (2.54)$$

Соотношения (2.54) делают справедливыми следующие представления скалярного произведения

$$(x, y) = x^T y = y^T x = x^T I y = y^T I x = (x, y)_I = (y, x)_I. \quad (2.55)$$

Соотношения (2.55), содержащее представление скалярного произведения в виде мультипликативной структуры «вектор–строка – единичная матрица – вектор–столбец», позволяют ввести в рассмотрение понятие *скалярного произведения с весом* (в (2.55) с *единичным* весом, задаваемым *единичной* *весовой* матрицей I). По аналогии может быть введено скалярное произведение $(x, y)_P$ с *неединичным* *весом*, порожаемое *неединичной* *весовой* матрицей P в форме

$$(x, y)_P = (Px, y) = (x, Py) = x^T P^T y = x^T P y. \quad (2.56)$$

Весовая матрица P должна быть: *симметричной* $P = P^T$ и *положительно-определенной* так, что собственные значения этой матрицы $\{\lambda_{P_i} : \det(\lambda_{P_i} I - P) = 0; \lambda_{P_i} > 0; i = \overline{1, n}\}$ *положительны*.

Линейное арифметическое пространство со скалярным произведением в силу удовлетворения СП условию 4. определения 2.30 является *нормированным* ЛП и *метрическим*. ЛП со скалярным произведением именуется *гильбертовым* линейным пространством.

Частным случаем *гильбертова* ЛП является *евклидово* линейное пространство.

Определение 2.31 (O2.31). Векторы x и y называются *ортогональными* ($x \perp y$), если их скалярное произведение равно нулю, т.е. выполняется равенство $(x, y) = 0$.

Определение 2.32 (O2.32). Система $\{e_i; i = \overline{1, n}\}$ векторов ЛП называется *ортогональной*, если все векторы этой системы попарно ортогональны: $(e_i, e_j) = 0; i, j = \overline{1, n}; i \neq j$.

Определение 2.33 (O2.33). Система $\{e_i; i = \overline{1, n}\}$ векторов ЛП называется *ортонормированной*, если выполняется равенство:

$(e_i, e_j) = \delta_{ij}; i, j = \overline{1, n}$; где символ Кронекера δ_{ij} удовлетворяет условиям $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$ и $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

Определение 2.34 (O2.34). *Евклидовым* линейным пространством E^n называется n -мерное ЛП, в качестве базиса в котором используется система $\{e_i; i = \overline{1, n}\}$ ортонормированных векторов таких, что матрица E , имеющая своими столбцами вектора $\{e_i; i = \overline{1, n}\}$, образует единичную матрицу, т.е. выполняется матричное равенство

$$E = \text{row}\{e_i; i = \overline{1, n}\} = I. \quad (2.57)$$

Определение 2.35 (O2.35). Базис, построенный на системе $\{e_i; i = \overline{1, n}\}$ ортонормированных векторов, удовлетворяющих соотношению (2.57) образует *евклидов* или *естественный базис*.

Ортонормированные базисы обладают рядом существенных достоинств перед другими базисными системами в ЛП X^n . Переход от *произвольной исходной* базисной системы $\{e_i; i = \overline{1, n}\}$ к *ортонормированной* базисной системе $\{u_i : (u_i, u_j) = \delta_{ij}; i, j = \overline{1, n}\}$ может быть осуществлен с помощью алгоритма Грама-Шмидта. Алгоритм Грама-Шмидта является *двухшаговой рекуррентной процедурой*, при этом на *первом шаге* осуществляется переход от *произвольной исходной* базисной системы $\{e_i; i = \overline{1, n}\}$ к *ортогональной* промежуточной базисной системе $\{v_i : (v_i, v_j) = 0; i, j = \overline{1, n}; i \neq j\}$, на *втором шаге* осуществляется *нормировка* элементов построенного базиса, приводящая к искомой *ортонормированной* базисной системе. В результате, **алгоритм Грама-Шмидта** принимает вид:

$$\begin{aligned} v_1 &= e_1; u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}; \\ v_2 &= e_2 - (e_2, u_1)u_1; u_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|}; \\ &\vdots \\ v_k &= e_k - \sum_{i=1}^{k-1} (e_k, u_i)u_i; u_k = \frac{v_k}{\|v_k\|}; k = \overline{2, n}. \end{aligned} \quad (2.58)$$

В заключение раздела рассмотрим решение следующей задачи. В ЛП R^n задан некоторый базис $\{e_i; i = \overline{1, n}\}$, относительно этого базиса задан координатный вектор $x = \text{col}\{x_i; i = \overline{1, n}\}$, задан в ЛП и базис $\{f_i; i = \overline{1, n}\}$, компоненты которого f_i заданы в координатной форме от-

носителем того же базиса $\{e_i; i = \overline{1, n}\}$. Ставится задача конструирования представления вектора x относительно базиса $\{f_i; i = \overline{1, n}\}$ в форме

$$x = x_{f_1}f_1 + x_{f_2}f_2 + \dots + x_{f_n}f_n = \sum_{i=1}^n x_{f_i}f_i, \quad (2.59)$$

так что относительно базиса $\{f_i; i = \overline{1, n}\}$ вектор x получает представление

$$x_f = \text{col}\{x_{f_i}; i = \overline{1, n}\}. \quad (2.60)$$

Если умножить выражение (2.59) скалярно последовательно n раз на элементы $\{f_i; i = \overline{1, n}\}$, то будет получена система уравнений относительно искомым неизвестных $\{x_{f_i}; i = \overline{1, n}\}$, решение которой в векторно-матричной форме имеет вид

$$x_f = \text{col}\{x_{f_i}; i = \overline{1, n}\} = \Gamma^{-1}\beta, \quad (2.61)$$

где $\Gamma = \text{col}\{\text{row}\{(f_i, f_j); j = \overline{1, n}\}; i = \overline{1, n}\}$ – матрица Грама, построенная на скалярных произведениях всех пар элементов базиса $\{f_i; i = \overline{1, n}\}$ друг на друга; $\beta = \text{col}\{(x, f_i); i = \overline{1, n}\}$ – вектор–столбец из скалярных произведений вектора x на элементы базиса представления $\{f_i; i = \overline{1, n}\}$. Следует заметить, что, если базис f состоит из ортонормированных элементов, то матрица Грама становится единичной ($\Gamma = I$), при этом (2.61) принимает вид $x_f = \beta$.

Следует заметить, что невырожденность ($\exists \Gamma^{-1}$) матрицы Грама является критерием *линейной независимости* системы векторов, на скалярных произведениях которой матрица Грама построена. Более того, решение задачи в форме (2.61) *геометрически* представляет собой решение задачи проектирования исходного вектора x на пространство, натянутое на систему векторов $\{f_i; i = \overline{1, m}; m \leq n\}$.

Примеры и задачи

2.2.1*. Доказать, что для любого оператора A , действующего из \mathbf{X}^n в \mathbf{Y}^n сумма ранга r_A и дефекта n_A равна размерности n пространства \mathbf{X}^n .

2.2.2*. Привести матрицу $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$ к нормальной жордановой

форме и определить матрицу преобразования T .

2.2.3*. Определить ортогональную проекцию вектора $x = [1 \ 1]^T$ на линейную оболочку $L(y)$ натянутую на вектор $y = [\sqrt{3} \ 1]^T$.

2.2.4. Выяснить, являются ли системы векторов арифметических пространств линейно зависимыми.

а) $x_1 = [-3 \ 1 \ 5]^T, x_2 = [6 \ -2 \ 15]^T$;

б) $x_1 = [1 \ 2 \ 3]^T, x_2 = [2 \ 5 \ 7]^T, x_3 = [3 \ 7 \ 10]^T$.

2.2.5. Проверить, что векторы

$e_1 = [2 \ 2 \ -1]^T, e_2 = [2 \ -1 \ 2]^T, e_3 = [-1 \ 2 \ 2]^T$ образуют базис пространства R^3 и найти координаты вектора $x = [1 \ 1 \ 1]^T$ в этом базисе.

2.2.6. Вектор x в естественном базисе пространства R^2 имеет координаты $x = [1 \ 1]^T$, а оператору A в этом базисе соответствует матрица $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Определить координаты векторов x и Ax в базисе, элементами которого являются столбцы матрицы A .

2.2.7. Определить область значений и ядро оператора с матрицей $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ в естественном базисе R^2 .

2.2.8. Применить алгоритм ортогонализации Грамма–Шмидта к следующим системам векторов:

а) $e_1 = [1 \ -2 \ 2]^T, e_2 = [-1 \ 0 \ -1]^T, e_3 = [5 \ -3 \ -7]^T$;

б) $q_1 = [2 \ 3 \ -4 \ -6]^T, q_2 = [1 \ 8 \ -2 \ -16]^T,$

$q_3 = [12 \ 5 \ -14 \ 5]^T, q_4 = [3 \ 11 \ 4 \ -7]^T$.

2.2.9. Найти матрицу A оператора A в R^3 , отображающего векторы:

$x_1 = [0 \ 0 \ 1]^T$ в $y_1 = [2 \ 3 \ 5]^T$;

$x_2 = [0 \ 1 \ 1]^T$ в $y_2 = [1 \ 0 \ 0]^T$;

$x_3 = [1 \ 1 \ 1]^T$ в $y_3 = [0 \ 1 \ -1]^T$;

а) в естественном базисе;

б) в базисе x_1, x_2, x_3 .

2.2.10. Найти базис ортогонального дополнения L^\perp линейной оболочки L системы векторов пространства R^4 :

$e_1 = [1, 3, 0, 2]^T, e_2 = [3, 7, -1, 2]^T, e_3 = [2, 4, -1, 0]^T$.

2.2.11. Вычислить собственные значения и собственные векторы следующих матриц:

$$\text{а) } A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}; \quad \text{б) } A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{в) } A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

2.2.12. Привести следующие матрицы к нормальной жордановой форме и определить матрицы преобразования координат:

$$\text{а) } A = \begin{bmatrix} 8 & -8 & -2 \\ 4 & -3 & -2 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{б) } A = \begin{bmatrix} 1 & 0.6 & -0.8 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2.2.13*. Показать, что матрица ортогонального проектирования на линейную оболочку линейно независимых векторов $L(u_1, u_2, \dots, u_k)$ равна $P = U(U^T U)^{-1}$, где U – матрица, составленная из столбцов координат векторов u_1, u_2, \dots, u_k . Как выглядит матрица P , когда векторы u_1, u_2, \dots, u_k образуют ортонормированную систему?

Решение вариантов задач

Решение задачи 2.2.1. Разложим пространство X^n в прямую сумму пространства $X^n = N(A) + L_A$, где $N(A)$ – ядро (нуль–пространство) матрицы A , L_A – любое дополнительное к $N(A)$ подпространство. Тогда для любого $x \in X^n$ имеет место единственное представление $x = x_N + x_L$, где $x_N \in N(A)$, $x_L \in L_A$.

Поскольку $y = Ax = A(x_N + x_L) = Ax_L \in Jm(A)$, так как $Ax_N = 0$, то любой вектор $y \in Jm(A)$ имеет прообраз из подпространства L_A , причем единственный, откуда следует, что размерности подпространств $Jm(A)$ и L_A совпадают. Но $\dim X^n = \dim N(A) + \dim L_A$ и $\dim L_A = r_A$, откуда $n = n_A + r_A$.

Решение задачи 2.2.2. Решение характеристического уравнения $\Delta(\lambda) = 0$ исходной матрицы A дает для нее три одинаковых собственных значения $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = -1$, следовательно, алгебраическая кратность корня равна трем. Дефект матрицы

$$A - \lambda I = A - (-1)I = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 24 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

равен единице, следовательно, собственное подпространство $N\{A - (-1)I\}$ является одномерным.

Поскольку собственное пространство, соответствующее собственному значению $\lambda = -1$, является одномерным, форма Жордана J со-

стоит из единственного блока, отвечающего этому значению $\lambda = -1$ и принимает вид

$$J = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Уравнение (2.52) $TJ = AT$, записанное в столбцовой форме

$$\begin{bmatrix} T_1 & T_2 & T_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} T_1 & T_2 & T_3 \end{bmatrix} \text{ порождает систему соотноше-}$$

ний

$$AT_1 = \lambda T_1; \quad AT_2 = \lambda T_2 + T_1; \quad AT_3 = \lambda T_3 + T_2.$$

Последовательное решение этих уравнений *без использования процедуры обращения* позволяет сконструировать матрицу T в форме

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & T_2 & T_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \text{ в результате чего уравнение подо-}$$

бия (2.52) приводит к искомому результату

$$J = T^{-1}AT = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Решение задачи 2.2.3. Если \hat{x} – ортогональная проекция вектора x на оболочку $L(y)$, то $\hat{x} = \alpha y$, где $\alpha = const$. Поскольку $(x - \hat{x}) \perp L$, то

имеем $(x - \hat{x}, y) = 0$, или $x^T y = x^T \hat{x}$, откуда получим

$$x = \frac{x^T y}{(y, y)} y = \frac{x^T y}{\|y\|^2} y = \left[\frac{3 + \sqrt{3}}{4}, \frac{1 + \sqrt{3}}{4} \right]^T. \text{ Задача может быть также ре-}$$

шена с использованием матрицы Грама.

3. МАТРИЧНЫЕ ИНВАРИАНТЫ И НЕИНВАРИАНТЫ. СИНГУЛЯРНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ МАТРИЦ

Рассматриваются подобные матрицы A и \bar{A} размерности $(n \times n)$, задающие один и тот же линейный оператор A относительно различных пар базисов. Для этих матриц существует невырожденная $(n \times n)$ – матрица M , связывающая матрицы A и \bar{A} матричным соотношением подобия

$$M\bar{A} = AM. \quad (3.1)$$

Матричное соотношение подобия (3.1) имеет два матричных аналога

$$\bar{A} = M^{-1}AM \text{ и } A = M\bar{A}M^{-1}. \quad (3.2)$$

Возникает вопрос: *какие характеристик* подобных матриц A и \bar{A} при преобразованиях подобия вида (3.2) *сохраняются*, а *какие – нет?*

Определение 3.1 (ОЗ.1). Характеристики матриц размерности $(n \times n)$, принадлежащих классу подобных, то есть задающих один и тот же линейный оператор A , которые *сохраняются* неизменными на всем классе подобных представлений, называются *матричными инвариантами*.

Определение 3.2 (ОЗ.2). Характеристики матриц размерности $(n \times n)$, принадлежащих классу подобных, то есть задающих один и тот же линейный оператор A , которые для каждой реализации подобной матрицы оказываются *своими*, называются *матричными неинвариантами*.

Рассмотрим *матричные инварианты* на примере двух подобных матриц A и \bar{A} вида (3.2).

1. Первым матричным *инвариантом* являются характеристические полиномы $\det(I - A)$ и $\det(I - \bar{A})$ подобных матриц A и \bar{A} . В этой связи сформулируем и докажем следующее утверждение.

Утверждение 3.1 (УЗ.1). Характеристические полиномы подобных матриц A и \bar{A} совпадают так, что выполняется соотношение

$$\det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = \det(\lambda I - \bar{A}). \quad \square(3.3)$$

Доказательство. Подставим в (3.3) матрицу A с использованием представления (3.2), а также представление единичной матрицы в форме $I = MM^{-1} = MIM^{-1}$, тогда получим скалярно-матричное соотношение

$$\det(\lambda MIM^{-1} - M\bar{A}M^{-1}) = \det\{M(\lambda I - \bar{A})M^{-1}\} \quad (3.4)$$

Воспользуемся положением о том, что детерминант произведения матриц равен произведению детерминантов, с учетом которого (3.4) принимает вид

$$\det\{M(\lambda I - \bar{A})M^{-1}\} = \det(M)\det(\lambda I - \bar{A})\det(M^{-1}).$$

Если учесть, что детерминант это скаляр, и воспользоваться свойством детерминанта произведения матриц в обратном порядке так, что произведение детерминантов равняется детерминанту произведения матриц, согласованных по размерности, то получим

$$\det(M)\det(M^{-1})\det(\lambda I - \bar{A}) = \det(MM^{-1} = I)\det(\lambda I - \bar{A}) = \det(\lambda I - \bar{A}).$$

Таким образом, установлено равенство $\det(\lambda I - A) = \det(\lambda I - \bar{A})$. ■

2. Вторым матричным *инвариантом* являются алгебраические спектры $\sigma\{A\}$ и $\sigma\{\bar{A}\}$ собственных значений подобных матриц A и \bar{A} , что записывается в форме

$$\sigma\{A\} = \sigma\{\bar{A}\} = \{\lambda_i : \lambda_i^n + a_1\lambda_i^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda_i + a_n = 0; i = \overline{1, n}\}. \quad (3.5)$$

3. Третьим матричным инвариантом являются детерминанты $\det(A)$ и $\det(\bar{A})$ подобных матриц A и \bar{A} , определяемые соотношением

$$\det(A) = \det(\bar{A}) = \prod_{i=1}^n \lambda_i = \lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_{n-1} \lambda_n \quad (3.6)$$

4. Четвертым матричным *инвариантом* являются следы $tr(A)$ и $tr(\bar{A})$ подобных матриц A и \bar{A} , определяемые выражением

$$tr(A) = tr(\bar{A}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{n-1} + \lambda_n, \quad (3.7)$$

и вычисляемые с помощью соотношений

$$tr(A) = \sum_{i=1}^n A_{ii} = A_{11} + A_{22} + \dots + A_{n-1, n-1} + A_{nn}, \quad (3.8)$$

$$tr(\bar{A}) = \sum_{i=1}^n \bar{A}_{ii} = \bar{A}_{11} + \bar{A}_{22} + \dots + \bar{A}_{n-1, n-1} + \bar{A}_{nn}. \quad (3.9)$$

Примечание 3.1 (ПЗ.1). Матричным *инвариантом* являются также ранги $rang(A)$ и $rang(\bar{A})$ подобных матриц A и \bar{A} , как число линейно независимых столбцов, как размерности $\dim(\text{Im}(A))$ и $\dim(\text{Im}(\bar{A}))$ образов этих матриц, определяемые числом *ненулевых* собственных значений подобных матриц A и \bar{A} .

Примечание 3.2 (ПЗ.2). Необходимым, но недостаточным условием подобия двух матриц A и \bar{A} являются равенства (3.6) детерминантов матриц и (3.7) следов матриц. Достаточным условием подобия матриц A и \bar{A} являются равенства (3.3) равенства характеристических полиномов матриц и (3.5) совпадения алгебраических спектров собственных значений этих матриц.

Рассмотрим *матричные неинварианты* на примере двух подобных матриц A и \bar{A} вида (3.2).

1. Первым матричным инвариантом являются геометрические спектры $\{\xi_i; i = \overline{1, n}\}$ и $\{\bar{\xi}_i; i = \overline{1, n}\}$ собственных векторов ξ_i и $\bar{\xi}_i$ подобных матриц A и \bar{A} , задаваемых в форме

$$\xi_i = \arg \left\{ A\xi_i = \lambda_i \xi_i; \lambda_i \in \sigma \{A\}; i = \overline{1, n} \right\}, \quad (3.10)$$

$$\bar{\xi}_i = \arg \left\{ A\bar{\xi}_i = \lambda_i \bar{\xi}_i; \lambda_i \in \sigma \{\bar{A}\}; i = \overline{1, n} \right\}. \quad (3.11)$$

При этом (как правило) выполняется отношение неравенства

$$\xi_i \neq \bar{\xi}_i. \quad (3.12)$$

2. Вторым матричным инвариантом являются нормы $\|A\|_{(*)}$ и $\|\bar{A}\|_{(*)}$ подобных матриц A и \bar{A} , которые в зависимости от индекса (*) нормы задаются в формах.

2.1. Евклидова (Фробениусова) норма

$$\|A\|_E = \|A\|_F = \left\{ \sum_{i,j=1}^n |A_{ij}|^2 \right\}^{1/2}; \|\bar{A}\|_E = \|\bar{A}\|_F = \left\{ \sum_{i,j=1}^n |\bar{A}_{ij}|^2 \right\}^{1/2} \quad (3.13)$$

При этом (как правило) выполняется отношение неравенства

$$\|A\|_E (\|A\|_F) \neq \|\bar{A}\|_E (\|\bar{A}\|_F) \quad (3.14)$$

2.2. Операторные (индуцированные) нормы

$$\|A\|_p = \max_x \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}; \|\bar{A}\|_p = \max_x \frac{\|\bar{A}x\|_p}{\|x\|_p} \quad (3.15)$$

2.2.1. При $p = 1$ $\|A\|_{p=1}; \|\bar{A}\|_{p=1}$ – столбцовые нормы A и \bar{A} ;

2.2.2. При $p \Rightarrow \infty$ $\|A\|_{p=\infty}; \|\bar{A}\|_{p=\infty}$ – строчные нормы A и \bar{A} ;

2.2.3. При $p = 2$ $\|A\|_{p=2}; \|\bar{A}\|_{p=2}$ – спектральные нормы A и \bar{A} , вы-

числяемые в силу соотношений

$$\|A\|_2 = \max_x \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \alpha_M(A); \alpha_M(A) = \left| \mu_M^{1/2} \right|; \det(\mu I - A^T A) = 0;$$

$$\|\bar{A}\|_2 = \max_x \frac{\|\bar{A}x\|_2}{\|x\|_2} = \alpha_M(\bar{A}); \alpha_M(\bar{A}) = \left| \mu_M^{1/2} \right|; \det(\mu I - \bar{A}^T \bar{A}) = 0,$$

где $\alpha_M(A)$ и $\alpha_M(\bar{A})$ – соответственно максимальные сингулярные числа матриц A и \bar{A} . Приведенные матричные нормы удовлетворяют оценочным неравенствам, конструируемым на примере матрицы A :

$$\|A\|_2 \leq \|A\|_1 \leq \sqrt{n} \|A\|_2;$$

$$\max_{i,j} |A_{ij}| \leq \|A\|_2 \sqrt{nm} \max_{i,j} |A_{ij}|;$$

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \|A\|_\infty \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{m} \|A\|_\infty;$$

$$\frac{1}{\sqrt{m}} \|A\|_\infty \leq \|A\|_2 \leq \sqrt{n} \|A\|_\infty;$$

$$\|A\|_2 \leq (\|A\|_1 \|A\|_\infty)^{1/2}.$$

При этом (как правило) выполняется отношение неравенства

$$\|A\|_p \neq \|\bar{A}\|_p \text{ при } p = 1, 2, \infty. \quad (3.16)$$

3. Третьим матричным *неинвариантом* являются алгебраические спектры $\sigma_\alpha \{A\}$ и $\sigma_\alpha \{\bar{A}\}$ сингулярных чисел подобных матриц A и \bar{A} . С понятием сингулярное число связана процедура сингулярного разложения матриц (процедура *SVD-разложения*), которую рассмотрим для общего случая.

Определение 3.3 (О3.3). Сингулярным разложением вещественно-значной матрицы N размерности $(m \times n)$ называется ее факторизация,

задаваемая в виде

$$N = U \Sigma V^T, \quad (3.17)$$

где U – ортогональная $(m \times m)$ матрица, V – ортогональная $(n \times n)$ матрица, образующие соответственно левый и правый сингулярные базисы и обладающие свойствами:

$$U U^T = U^T U = I, \quad V V^T = V^T V = I. \quad (3.18)$$

Σ – матрица сингулярных чисел α_i , которая принимает вид

$$\Sigma = \text{diag} \{ \alpha_i; i = \overline{1, m} \} \text{ при } m = n, \quad (3.19)$$

$$\Sigma = [\text{diag} \{ \alpha_i; i = \overline{1, m} \} \mid 0_{m, n-m}] \text{ при } m < n, \quad (3.20)$$

$$\Sigma = \left[\begin{array}{c} \text{diag} \{ \alpha_i; i = \overline{1, n} \} \\ \hline 0_{m-n, n} \end{array} \right] \text{ при } m > n. \quad (3.21)$$

Положим пока $m = n$ и протранспонируем матричное выражение (3.17), тогда получим

$$N^T = V \Sigma^T U^T \Big|_{n=m} = V \Sigma U^T \quad (3.22)$$

Умножим (3.17) на (3.22), тогда с использованием свойства (3.18) получим цепочку равенств

$$N N^T = U \Sigma V^T V \Sigma U^T = V \Sigma^2 U^T. \quad (3.23)$$

Теперь умножим (3.22) слева на (3.17), получим:

$$N^T N = V \Sigma U^T U \Sigma V^T = V \Sigma^2 V^T. \quad (3.24)$$

Умножим матричное уравнение (3.23) на матрицу U справа, тогда с учетом (3.18) получим матричное соотношение:

$$NN^T U = U \Sigma^2. \quad (3.25)$$

Перейдем в (3.25) к столбцовой форме записи правых матричных компонентов:

$$NN^T \{col(U_i; i = \overline{1, m})\} = U \{col(\Sigma^2)_i; i = \overline{1, m})\},$$

что эквивалентно матрично-векторному представлению

$$NN^T U_i = U (\Sigma^2)_i; i = \overline{1, m}. \quad (3.26)$$

Если учесть, что столбец $(\Sigma^2)_i$ имеет вид

$$(\Sigma^2)_i = \left[0_{1 \times (i-1)} \mid \alpha_i^2 \mid 0_{1 \times (m-i)} \right]^T, \quad (3.27)$$

то с учетом (3.27) соотношение (3.26) записывается

$$NN^T U_i = \alpha_i^2 U_i; i = \overline{1, m}. \quad (3.28)$$

Векторно-матричное соотношение (3.28) представляет собой полное решение проблемы собственных значений α_i^2 и собственных векторов U_i матрицы NN^T . В результате чего получаем, что $\alpha_i^2 (i = \overline{1, m})$ ищутся как решения характеристического уравнения

$$\det(\alpha^2 I - NN^T) = 0, \quad (3.29)$$

а матрица U оказывается составленной из собственных векторов U_i матрицы NN^T единичной нормы в форме

$$U = row\{U_i : \|U_i\| = 1; i = \overline{1, m}\}. \quad (3.30)$$

Умножим теперь матричное уравнение (3.24) на матрицу V справа, тогда с учетом (3.18) получим:

$$N^T N V = V \Sigma^2. \quad (3.31)$$

По аналогии с (3.26) ÷ (3.29) соотношение (3.31) запишем в форме m матрично-векторных выражений:

$$N^T N V_i = \alpha_i^2 V_i; i = \overline{1, m}, \quad (3.32)$$

которые представляют собой задачу на собственные значения α_i^2 и собственные векторы V_i матрицы $N^T N$. Последнее позволяет составить характеристическое уравнение

$$\det(\alpha^2 I - N^T N) = 0, \quad (3.33)$$

позволяющее вычислить все $\alpha_i^2 (i = \overline{1, m})$, знание которых в силу (3.32) позволяет найти собственные векторы V_i единичной нормы матрицы $N^T N$. Матрица V правого сингулярного базиса в итоге по аналогии с (3.30) записывается в форме:

$$V = row\{V_i : \|V_i\| = 1; i = \overline{1, m}\}. \quad (3.34)$$

Следует заметить, что в случае $m = n$ матрицы NN^T и $N^T N$ обладают одним и тем же спектром собственных значений так, что

$\sigma\{NN^T\} = \sigma\{N^T N\} = \{\alpha_i^2; i = \overline{1, m}\}$. Если $m \neq n$, то спектр $\sigma\{N^T N\}$ содержит n собственных значений, а спектр $\sigma\{NN^T\}$ содержит m собственных значений, причем количество *ненулевых* элементов этих спектров оказываются равными.

Дадим теперь *геометрическую* интерпретацию сингулярного разложения матрицы N (3.17). Для этой цели умножим (3.17) на матрицу V справа и воспользуемся свойствами (3.18), тогда получим:

$$NV = U\Sigma. \quad (3.35)$$

Запишем (3.35) по аналогии с (3.28) и (3.32) в столбцовой форме

$$NV_i = \alpha_i U_i; i = \overline{1, m}. \quad (3.36)$$

Сконструируем теперь на векторно-матричном соотношении (3.36) согласованные тройки $\{V_i, \alpha_i, U_i; i = \overline{1, m}\}$, которые несут информацию о том, что в силу (3.36) эффект действия оператора с матрицей N на i -й элемент V_i правого сингулярного базиса V состоит в умножении на i -ое сингулярное число α_i i -го элемента U_i левого сингулярного базиса U .

Если теперь с помощью матрицы N в силу линейного векторно-матричного соотношения:

$$\eta = N\chi \quad (3.37)$$

отобразить *сферу* $\|\chi\| = 1$, то она отобразится в *эллипсоид*, положение полуосей которого *определяется* элементами U_i левого сингулярного базиса U , а *длины* этих полуосей в силу (3.36) будут равны $\alpha_i \|\chi\|$.

В заключение заметим, что в англоязычной литературе сингулярное разложение матриц именуется SVD-разложением (SVD-процедурой). Во всех версиях пакета MATLAB существует функция SVD(N), которая выводит матричные компоненты факторизации (3.17).

Возвращаясь к проблеме матричных *неинвариантов*, следует констатировать, что если в качестве $(n \times n)$ – матрицы N взять подобные матрицы A и \bar{A} , то, как правило, на спектрах их сингулярных чисел выполняется отношение неравенства $\sigma_\alpha\{A\} \neq \sigma_\alpha\{\bar{A}\}$.

4. Четвертым матричным *неинвариантом* являются числа обусловленности $cond\{A\} = C\{A\}$, $cond\{\bar{A}\} = C\{\bar{A}\}$ подобных матриц A и \bar{A} .

Дадим определение числу обусловленности произвольной $(n \times n)$ – матрице N , первое из них будет *геометрическим*, а второе – *алгебраическим*.

Определение 3.4 (ОЗ.4). Числом обусловленности $cond\{A\} = C\{A\}$ произвольной $(n \times n)$ – матрицы N называется положительнозначная скалярная характеристика этой матрицы, задаваемая в форме

$$C\{N\} = \|N\|_p \|N^{-1}\|_p \quad (3.38)$$

Примечание 3.3 (ПЗ.3). Численно значение числа обусловленности матрицы зависит от типа используемой в (3.38) матричной нормы. Если в (3.38) используется спектральная норма матриц ($p = 2$), то выполняются соотношения

$$\|N\|_{p=2} = \alpha_M(N), \quad \|N^{-1}\|_{p=2} = \alpha_m^{-1}(N). \quad (3.39)$$

Число обусловленности (3.38), построенное на спектральных нормах (3.39), принимает вид

$$C\{N\} = \|N\|_{p=2} \|N^{-1}\|_{p=2} = \alpha_M(N) \alpha_m^{-1}(N). \quad (3.40)$$

Выражение (3.40) показывает, что число обусловленности матрицы N линейной алгебраической задачи (3.37) *геометрически* характеризует степень *сплющивания* эллипсоида, получаемого при отображении сферы $\|\chi\| = 1$ единичного радиуса.

Алгебраическое определение числа обусловленности $C\{N\}$ матрицы N введем на базе следующего утверждения.

Утверждение 3.2 (УЗ.2). Число обусловленности матрицы N , заданное в форме (3.38), содержательно представляет собой *коэффициент усиления относительных погрешностей* задания (знания) компонентов правой части ЛАЗ (3.37) в относительную погрешность ее левой части. \square

Доказательство. Введем в рассмотрение помимо номинальной версии ЛАЗ (3.37) ее возмущенную версию

$$\eta + \Delta\eta = (N + \Delta N)(\chi + \Delta\chi). \quad (3.41)$$

Перейдем от задачи (3.41) к задаче в абсолютных приращениях, которая с использованием (3.37) и (3.41) запишется в форме

$$\Delta\eta = \Delta N\chi + N\Delta\chi + \Delta N\Delta\chi \quad (3.42)$$

Переход в (3.42) к согласованным матричным и векторным нормам позволяет записать

$$\|\Delta\eta\| \leq \|\Delta N\| \|\chi\| + \|N\| \|\Delta\chi\| + \|\Delta N\| \|\Delta\chi\|. \quad (3.43)$$

Введем в рассмотрение относительные погрешности представления компонентов ЛАЗ и ее решения, определив их следующими соотношениями:

$$\delta_\eta = \frac{\Delta\|\eta\|}{\|\eta\|}; \quad \delta_N = \frac{\Delta\|N\|}{\|N\|}; \quad \delta_\chi = \frac{\Delta\|\chi\|}{\|\chi\|}. \quad (3.44)$$

Свяжем относительные погрешности (3.44) аналитической зависимостью, опираясь на соотношение (3.43). Для этих целей представим номинальную версию ЛАЗ (3.37) в форме

$$\chi = N^{-1}\eta,$$

которая в согласованных матричных и векторных нормах позволяет записать

$$\|\eta\| \geq \frac{1}{\|N^{-1}\|} \|\chi\|. \quad (3.45)$$

Деление левой части неравенства (3.43) на левую часть второго неравенства (3.45) и соответственно правой части неравенства (3.43) на правую часть второго неравенства (3.45) усиливает выполнение условий исходного неравенства (3.43) и принимает вид

$$\frac{\|\Delta\eta\|}{\|\eta\|} \leq \|N\| \|N^{-1}\| \left\{ \frac{\|\Delta N\|}{\|N\|} + \frac{\|\Delta\chi\|}{\|\chi\|} + \frac{\|\Delta N\|}{\|N\|} \frac{\|\Delta\chi\|}{\|\chi\|} \right\}. \quad (3.46)$$

Если в (3.46) учесть (3.38), а также выражение для относительных погрешностей (3.44), то неравенство (1.8) примет вид

$$\delta_\eta \leq C_N (\delta_N + \delta_\chi + \delta_N \delta_\chi). \quad \blacksquare (3.47)$$

Таким образом, алгебраическое определение числа обусловленности матрицы совпадает с выдвинутым положением утверждения 3.2 и имеет следующую формулировку.

Определение 3.5 (О3.5). Число обусловленности, заданное в форме (3.38), произвольной квадратной матрицы N , порождающей линейную алгебраическую задачу вида (3.37), содержательно представляет собой коэффициент усиления относительных погрешностей задания (знания) компонентов правой части ЛАЗ (3.37) в относительную погрешность ее левой части. \square

В заключение заметим, что числа обусловленности $C\{A\}$ и $C\{\bar{A}\}$ подобных матриц A и \bar{A} , являясь матричными инвариантами, как правило, связаны отношением неравенства $C\{A\} \neq C\{\bar{A}\}$.

Примеры и задачи

Выбрать из приводимых ниже матриц пару подобных путем вычисление матричных инвариантов, в случае положительного исхода выбора вычислить все матричные инварианты и неинварианты этих матриц.

$$3.1. \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$3.2. \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix}$$

$$3.3. \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$$

$$3.4. \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$$

$$3.5. \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 7 & -5 \end{bmatrix}$$

$$3.6. \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 21 & 4 \end{bmatrix}$$

$$3.7. \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$$

$$3.8. \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 12 & 4 \end{bmatrix}$$

$$3.9. \begin{bmatrix} -3 & 9 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$$

3.10.	$\begin{bmatrix} 0 & 21 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$	3.11.	$\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$	3.12.	$\begin{bmatrix} 0 & 12 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$
3.13.	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -15 & -8 \end{bmatrix}$	3.14.	$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$	3.15.	$\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$
3.16.	$\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$	3.17.	$\begin{bmatrix} 0 & -15 \\ 1 & -8 \end{bmatrix}$	3.18.	$\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 8 & -3 \end{bmatrix}$
3.19.	$\begin{bmatrix} -3 & 8 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$	3.20.	$\begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$	3.21.	$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -8 & -7 \end{bmatrix}$
3.22.	$\begin{bmatrix} 5 & 16 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$	3.23.	$\begin{bmatrix} 5 & -8 \\ 5 & -9 \end{bmatrix}$	3.24.	$\begin{bmatrix} 12 & -7 \\ 12 & -8 \end{bmatrix}$
3.25.	$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 24 & -9 \end{bmatrix}$	3.26.	$\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$	3.27.	$\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ -5 & -9 \end{bmatrix}$
3.28.	$\begin{bmatrix} 12 & 3.5 \\ 24 & -8 \end{bmatrix}$	3.29.	$\begin{bmatrix} -15 & 4 \\ -30 & 7 \end{bmatrix}$	3.30.	$\begin{bmatrix} 21 & -16 \\ 21 & -17 \end{bmatrix}$
3.31.	$\begin{bmatrix} 5 & -4 \\ 10 & -9 \end{bmatrix}$	3.32.	$\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$	3.33.	$\begin{bmatrix} -15 & 8 \\ -15 & 7 \end{bmatrix}$
3.34.	$\begin{bmatrix} 21 & 16 \\ -21 & -17 \end{bmatrix}$	3.35.	$\begin{bmatrix} -3 & 267 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$	3.36.	$\begin{bmatrix} -3.33 & -5.33 \\ 2.33 & 7.33 \end{bmatrix}$
3.37.	$\begin{bmatrix} -0.5 & 0.5 \\ -22.5 & -7.5 \end{bmatrix}$	3.38.	$\begin{bmatrix} 21 & -8 \\ 42 & -17 \end{bmatrix}$	3.39.	$\begin{bmatrix} 2.5 & -4.5 \\ 2.5 & -6.5 \end{bmatrix}$
3.40.	$\begin{bmatrix} 7.33 & -4.67 \\ -2.67 & -3.33 \end{bmatrix}$				

Решение вариантов задач

Решение задачи на примере пары матриц 3.15 и 3.7. Выдвинем *гипотезу*, что матрицы

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \text{ и } \bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} \text{ подобны.}$$

Вычислим матричные *инварианты* этих матриц:

1. Характеристические полиномы, которые принимают вид

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda + 1 & -4 \\ -2 & \lambda + 3 \end{bmatrix} = (\lambda + 1)(\lambda + 3) = \lambda^2 + 4\lambda - 5;$$

$$\det(\lambda I - \bar{A}) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ -5 & \lambda + 4 \end{bmatrix} = \lambda(\lambda + 4) - 5 = \lambda^2 + 4\lambda - 5.$$

Гипотеза верна, так как $\det(\lambda I - A) = \det(\lambda I - \bar{A})$, поэтому выбранные матрицы A и \bar{A} подобны.

2. Алгебраические спектры собственных значений матриц

$$\sigma\{A\} = \sigma\{\bar{A}\} = \{\lambda_1 = 1; \lambda_2 = -5 : \lambda^2 + 4\lambda - 5 = 0\};$$

3. Определители (детерминанты) матриц

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = (-1)(-3) - (2)(4) = 4 - 8 = -5,$$

$$\det(\bar{A}) = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} = (0)(-4) - (1)(5) = -5,$$

$$\det(A) = \det(\bar{A}) = \lambda_1 \lambda_2 = (1)(-5) = -5,$$

$$\det(A) = \det(\bar{A}).$$

4. Следы матриц

$$\text{tr}(A) = \text{tr} \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n A_{ii} = A_{11} + A_{22} = (-1) + (-3) = -4,$$

$$\text{tr}(\bar{A}) = \text{tr} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n \bar{A}_{ii} = \bar{A}_{11} + \bar{A}_{22} = (-1) + (-3) = -4,$$

$$\text{tr}(A) = \text{tr}(\bar{A}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i = \lambda_1 + \lambda_2 = (1) + (-5) = -4.$$

Вычислим матричные инварианты этих матриц:

1. Спектры собственных векторов $\{\xi_i; i = \overline{1, n}\}$ и $\{\bar{\xi}_i; i = \overline{1, n}\}$

$$A \xi_i = \lambda_i \xi_i \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \xi_i = \lambda_i \xi_i \mid_{\lambda_1=1, \lambda_2=-5} \Rightarrow \xi_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \xi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix};$$

$$\bar{A} \bar{\xi}_i = \lambda_i \bar{\xi}_i \Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} \bar{\xi}_i = \lambda_i \bar{\xi}_i \mid_{\lambda_1=1, \lambda_2=-5} \Rightarrow \bar{\xi}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \bar{\xi}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \end{bmatrix}.$$

$$\{\xi_i; i = \overline{1, n}\} \neq \{\bar{\xi}_i; i = \overline{1, n}\}.$$

2. Нормы $\|A\|_{(*)}$ и $\|\bar{A}\|_{(*)}$.

2.1. Евклидовы (Фробениусовы) матричные нормы

$$\|A\|_E = \|A\|_F = \left\{ \sum_{i,j=1}^n |A_{ij}|^2 \right\}^{1/2} = \{1^2 + 2^2 + 4^2 + 3^2\}^{1/2} = 30^{1/2}$$

$$\|\bar{A}\|_E = \|\bar{A}\|_F = \left\{ \sum_{i,j=1}^n |\bar{A}_{ij}|^2 \right\}^{1/2} = \{0^2 + 5^2 + 1^2 + 4^2\}^{1/2} = 42^{1/2}$$

2.2. Операторные (индуцированные) нормы

$$\|A\|_p = \max_x \frac{\|Ax\|_p}{\|x\|_p}; \quad \|\bar{A}\|_p = \max_x \frac{\|\bar{A}x\|_p}{\|x\|_p}$$

2.2.1. При $p=1$ $\|A\|_{p=1}; \|\bar{A}\|_{p=1}$ – столбцовые нормы.

$$\|A\|_{p=1} = \max_i \{ \|A_i\|_1 \} = \max \{ (|1-1| + |2|), (|4| + |-3|) \} = 7,$$

$$\|\bar{A}\|_{p=1} = \max_i \{ \|\bar{A}_i\|_1 \} = \max \{ (|0| + |5|), (|1| + |-4|) \} = 5.$$

2.2.2. При $p=\infty$ $\|A\|_{p=\infty}; \|\bar{A}\|_{p=\infty}$ – строчные нормы.

$$\|A\|_{p=\infty} = \max_j \{ \|A^j\|_1 \} = \max \{ (|-1| + |4|), (|2| + |-3|) \} = 5,$$

$$\|\bar{A}\|_{p=\infty} = \max_j \{ \|\bar{A}^j\|_1 \} = \max \{ (|0| + |1|), (|5| + |-4|) \} = 9.$$

2.2.3. При $p=2$ $\|A\|_{p=2}; \|\bar{A}\|_{p=2}$ – спектральные нормы A и \bar{A} , вы-

числяемые в силу соотношений

$$\|A\|_2 = \max_x \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \alpha_M(A); \quad \alpha_M(A) = \left| \mu_M^{1/2} \right| : \det(\mu I - A^T A) = 0;$$

$$A^T A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -10 \\ -10 & 25 \end{bmatrix};$$

$$\det(\mu I - A^T A) = \mu^2 - 30\mu + 25 = 0;$$

$$\mu_1 = 29.42; \quad \mu_2 = 0.858; \quad \alpha_M(A) = \alpha_1 = 5.424, \quad \alpha_m(A) = \alpha_2 = 0.9263,$$

$$\|A\|_2 = \max_x \frac{\|Ax\|_2}{\|x\|_2} = \alpha_M(A) = 5.424.$$

$$\|\bar{A}\|_2 = \max_x \frac{\|\bar{A}x\|_2}{\|x\|_2} = \alpha_M(\bar{A}); \quad \alpha_M(\bar{A}) = \left| \bar{\mu}_M^{1/2} \right| : \det(\bar{\mu} I - \bar{A}^T \bar{A}) = 0.$$

$$\bar{A}^T \bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & -20 \\ -20 & 17 \end{bmatrix};$$

$$\det(\bar{\mu} I - \bar{A}^T \bar{A}) = \bar{\mu}^2 - 42\bar{\mu} + 25 = 0;$$

$$\bar{\mu}_1 = 41.396; \quad \bar{\mu}_2 = 0.604; \quad \alpha_M(\bar{A}) = \bar{\alpha}_1 = 6.434, \quad \alpha_m(\bar{A}) = \bar{\alpha}_2 = 0.7772,$$

$$\|\bar{A}\|_2 = \max_x \frac{\|\bar{A}x\|_2}{\|x\|_2} = \alpha_M(\bar{A}) = 6.434.$$

3. Алгебраические спектры $\sigma_\alpha\{A\}$ и $\sigma_\alpha\{\bar{A}\}$ сингулярных чисел подобных матриц A и \bar{A} вычислены в предыдущем пункте и имеют представления

$$\sigma_{\alpha}\{A\} = \{\alpha_1 = 5.424; \alpha_2 = 0.9263\},$$

$$\sigma_{\alpha}\{\bar{A}\} = \{\bar{\alpha}_1 = 6.434; \bar{\alpha}_2 = 0.7772\}.$$

4. Спектральные числа обусловленности подобных матриц A и \bar{A} , вычисляемые в силу соотношений

$$C_{\lambda}\{A\} = C_2\{A\} = \alpha_M(A)\alpha_m^{-1}(A) = 5.424(0.9263)^{-1} = 5.8557,$$

$$C_{\lambda}\{\bar{A}\} = C_2\{\bar{A}\} = \alpha_M(\bar{A})\alpha_m^{-1}(\bar{A}) = 6.434(0.7772)^{-1} = 8.2787. \quad \blacksquare$$

4. КАНОНИЧЕСКИЕ ФОРМЫ МАТРИЦ. МАТРИЦЫ ПРИВЕДЕНИЯ ПОДОБИЯ

Рассматриваются подобные матрицы A и \bar{A} , связанные матричным условием подобия (3.1) с матрицей M приведения подобия. Будем полагать, что $(n \times n)$ -матрица A задана в произвольном базисе (имеет произвольную форму), а $(n \times n)$ -матрица \bar{A} задана в каноническом базисе (имеет каноническую форму). В связи со сказанным встают два вопроса. *Первый вопрос:* как формируются матрицы в канонической форме? *Второй вопрос:* как формируется матрица M приведения подобия, позволяющая с помощью матричного соотношения

$$\bar{A} = M^{-1}AM \quad (4.1)$$

осуществить переход от матрицы A , заданной в произвольном базисе к матрице \bar{A} , задаваемой в некотором каноническом базисе?

Дадим *ответ* на *первый* из поставленных вопросов, то есть построим матрицы ЛО A в канонических формах.

Определение 4.1 (О4.1). Канонической формой $(n \times n)$ матрицы линейного оператора A будем называть форму $(n \times n)$ матрицы линейного оператора (ЛО), которая построена в соответствии с некоторым правилом (законом, *канон*) с тем, чтобы решить одну из возможных задач: сокращение объема матричных вычислений путем минимизации числа *ненулевых* элементов матрицы; облегчение анализа *структуры пространства* ЛО A , обеспечение вычислительной устойчивости всех матричных процедур путем уменьшения числа обусловленности матрицы ЛО и т.д.

К настоящему моменту сконструировано большое число канонических форм задания $(n \times n)$ матрицы линейного оператора A , ниже рассматриваются только базовые канонические формы.

Базовые канонические формы $(n \times n)$ матрицы линейного оператора A строятся на двух алгебраических спектрах исходной матрицы A , заданной в произвольном базисе.

Первый алгебраический спектр

$$\sigma\{A\} = \{\lambda_i : A\xi_i = \lambda_i\xi_i : \det(\lambda_i I - A) = 0 : i = \overline{1, n}\}$$

представляет собой спектр собственных значений $\{\lambda_i : i = \overline{1, n}\}$ матрицы A .

Второй алгебраический спектр

$$\sigma_a\{A\} = \{a_i : \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n ; i = \overline{1, n}\}$$

представляет спектр коэффициентов $\{a_i : i = \overline{1, n}\}$ характеристического полинома $D(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ матрицы A .

Рассмотрим канонические представления \bar{A} исходной матрицы A , которые конструируются на алгебраическом спектре собственных значений матриц, для различных случаев его реализации.

1. *Диагональная каноническая форма* матрицы может быть построена, когда алгебраический спектр собственных значений имеет реализацию

$$\sigma\{A\} = \{\lambda_i : \text{Im}(\lambda_i) = 0; \lambda_i \neq \lambda_l; i \neq l; i, l = \overline{1, n}\}. \quad (4.2)$$

Алгебраический спектр вида (4.2) порождает множество подобных матриц линейного оператора A , именуемых матрицами *простой структуры*.

В случае реализации алгебраического спектра $\sigma\{A\}$ в форме (4.2), когда все собственные значения *вещественные и простые (различные, не кратные)*, может быть построена диагональная матрица Λ с элементами λ_i на главной диагонали и нулями на остальных позициях этой матрицы так, что она принимает вид

$$\bar{A} = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} = \text{diag}\{\lambda_i, i = \overline{1, n}\}. \quad (4.3)$$

2. *Блочно-диагональная каноническая форма* матрицы может быть построена, когда алгебраический спектр собственных значений имеет реализацию

$$\sigma\{A\} = \{\text{Im}(\lambda_{2i-1, 2i}) \neq 0; \lambda_{2i-1} = \alpha_i + j\beta_i; \lambda_{2i} = \alpha_i - j\beta_i; \lambda_i \neq \lambda_l; i \neq l; i, l = \overline{1, n/2}\} \quad (4.4)$$

В случае реализации алгебраического спектра $\sigma\{A\}$ в форме (4.4), когда все собственные значения *комплексно-сопряженные и простые (не кратные)*, может быть построена блочно-диагональная матрица $\tilde{\Lambda}$

с вещественнозначными матричными блоками $\tilde{\Lambda}_{ii} = \begin{bmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ -\beta_i & \alpha_i \end{bmatrix}$ на главной диагонали и нулями на остальных позициях этой матрицы так, что она принимает вид

$$\bar{A} = \tilde{\Lambda} = \text{diag}\left\{\tilde{\Lambda}_{ii} = \begin{bmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ -\beta_i & \alpha_i \end{bmatrix}; i = \overline{1, n/2}\right\}. \quad (4.5)$$

3. *Комбинированная блочно-диагональная каноническая форма* матрицы может быть построена, когда алгебраический спектр собственных значений содержит только *простые* собственные значения, часть которых числом n_R являются *вещественными*, а другая часть числом

$n_c = 2m_c$ – комплексно-сопряженными, при этом выполняется соотношение $n = n_c + n_R$.

Комбинированная блочно-диагональная матрица имеет на своей главной диагонали диагональную матрицу вида (4.3) размерности $(n_R \times n_R)$ и блочно-диагональную матрицу вида (4.5) размерности $(n_c \times n_c)$ так, что она примет вид

$$\bar{A} = \tilde{\Lambda} = \text{diag} \left\{ \Lambda_{(n_R \times n_R)}; \tilde{\Lambda}_{(n_c \times n_c)} \right\}. \quad (4.6)$$

Матричные блоки на диагонали комбинированной блочно-диагональной матрицы можно менять местами, так что наряду с формой (4.6) матрица \bar{A} может иметь представление

$$\bar{A} = \tilde{\Lambda} = \text{diag} \left\{ \tilde{\Lambda}_{(n_c \times n_c)}; \Lambda_{(n_R \times n_R)} \right\}. \quad (4.7)$$

Так, например, если алгебраический спектр собственных значений матриц ЛО A имеет реализацию

$$\sigma\{A\} = \left\{ \lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta; \lambda_i : \text{Im}(\lambda_i) = 0; \lambda_i \neq \lambda_l; i \neq l; i, l = \overline{3, n} \right\}, \quad (4.8)$$

то комбинированное блочно-диагональное представление канонической матрицы \bar{A} принимает вид

$$\bar{A} = \tilde{\Lambda} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} & [0_{2 \times (n-2)}] \\ [0_{(n-2) \times 2}] & [\Lambda_{(n-2) \times (n-2)}] \end{bmatrix}, \quad (4.9)$$

где $0_{2 \times (n-2)}$, $0_{(n-2) \times 2}$, $\Lambda_{(n-2) \times (n-2)}$ – соответственно нулевые матрицы размерности $2 \times (n-2)$ и $(n-2) \times 2$ и диагональная матрица размерности $(n-2) \times (n-2)$.

4. *Жорданова каноническая форма* матрицы может быть построена, когда алгебраический спектр собственных значений имеет реализацию

$$\sigma\{A\} = \left\{ \lambda_k - \text{кратности } \mu_k, k = \overline{1, p}; \sum_{k=1}^p \mu_k = n; \text{Im}(\lambda_k) = 0 \right\}. \quad (4.10)$$

Тогда *жорданова каноническая форма* матрицы \bar{A} , максимально близкая к диагональной форме для случая вещественных кратных собственных значений матриц ЛО A , в соответствии со структурой алгебраического спектра (4.10) примет вид

$$\bar{A} = J = \text{diag} \left\{ J_{kk} = \begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ & \lambda_k & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \lambda_k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & \lambda_k \end{bmatrix}_{(\mu_k \times \mu_k)} ; k = \overline{1, p} \right\}. \quad (4.11)$$

Жорданова каноническая форма (4.11) представляет собой блочно-диагональную матрицу, составленную из *жордановых блоков* J_{kk} размерности $(\mu_k \times \mu_k)$, имеющих на своей главной диагонали собственное значение λ_k кратности μ_k , единицы на первой *наддиагонали* и нули на остальных позициях блока. *Жорданова каноническая форма* (4.11) является верхней жордановой формой, наряду с которой может быть построена *нижняя жорданова каноническая форма*, которая характеризуется тем, что единицы в жордановых блоках размещаются на первой *поддиагонали*. Следует заметить, что *жорданова каноническая форма* может быть построена и для случая матриц ЛО, алгебраический спектр собственных значений которых содержит кратные комплексно-сопряженные элементы, причем возможны как комплексно-значная так и вещественно-значная формы.

5. Рассмотрим теперь *канонические представления* \bar{A} исходной матрицы A , которые конструируются на алгебраическом спектре $\sigma_a\{A\}$ коэффициентов характеристического полинома

$$D(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + \sum_{i=1}^n a_i \lambda^{n-i} \quad (4.12)$$

матриц линейного оператора A . Этих представлений два, они совпадают с точностью до транспонирования. Канонические представления имеют вид

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdot & -a_2 & -a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{(n-1) \times 1} & I_{(n-1) \times (n-1)} \\ & -a \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

и

$$\bar{A}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & -a_n \\ 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & -a_{n-1} \\ 0 & 1 & \cdot & \cdot & 0 & -a_{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & 1 & -a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{1 \times (n-1)} \\ & -a^T \\ & & I_{(n-1) \times (n-1)} \end{bmatrix}. \quad (4.14)$$

В *канонических формах* (4.13) и (4.14) a – n -мерный вектор–строка коэффициентов, записанных в обратном по отношению их размещения в характеристическом полиноме порядке так, что он принимает вид

$$a = [a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_2, a_1] = \text{row}\{a_{n+1-i} : i = \overline{1, n}\}, \quad (4.15)$$

$0_{(n-1) \times 1}; 0_{1 \times (n-1)}; I_{(n-1) \times (n-1)}$ – соответственно $(n-1)$ -мерные матрица–столбец и матрица–строка, а также $(n-1) \times (n-1)$ – единичная матрица.

Обе канонические формы (4.13) и (4.14) именуется *нормальной, сопровождающей* (свой характеристический полином) и *фробениусовой канонической* формой. С тем, чтобы их различать текстуально форма (4.13) названа *строчной* нормальной, сопровождающей или фробениусовой, а (4.14) – *столбцовой*. Для канонической формы (4.13) используется обозначение $\bar{A} = A_F$.

Строчная сопровождающая каноническая форма матрицы ЛО A имеет в последней строке коэффициенты характеристического полинома, записанные с обратными знаками и в обратном порядке, первую *наддиагональ*, заполненную единицами, остальные позиции матрицы заполнены нулями. При использовании этой формы матрицы для модельных представлений динамических объектов она именуется *канонической управляемой фробениусовой (сопровождающей) формой*.

Столбцовая сопровождающая каноническая форма матрицы ЛО A имеет в последнем столбце коэффициенты характеристического полинома, записанные с обратными знаками и в обратном порядке, первую *поддиагональ*, заполненную единицами, остальные позиции матрицы, заполненные нулями. При использовании этой формы матрицы для модельных представлений динамических объектов она именуется *канонической наблюдаемой фробениусовой (сопровождающей) формой*.

Теперь дадим ответ на *второй* вопрос, поставленный в начале раздела, то есть построим матрицы приведения подобия произвольной матрицы ЛО A к каноническим формам.

Приведение матрицы A простой структуры ЛО A к диагональной форме (4.3) строится на положениях следующих утверждений.

Утверждение 4.1 (У4.1). Матрица M , приводящая произвольную $(n \times n)$ квадратную матрицу A простой структуры ЛО A к диагональной форме Λ в силу соотношения (4.1), принимающего для $\bar{A} = \Lambda$ представление

$$\Lambda = M^{-1} A M, \quad (4.16)$$

имеет своими столбцами собственные векторы матрицы A .

Доказательство. Запишем базовое уравнение матричного подобия для рассматриваемого случая

$$M \Lambda = A M \quad (4.17)$$

в столбцовой форме

$$M [\Lambda_1 \quad \Lambda_2 \quad \dots \quad \Lambda_i \quad \dots \quad \Lambda_n] = A [M_1 \quad M_2 \quad \dots \quad M_i \quad \dots \quad M_n] \quad (4.18)$$

где Λ_i, M_i – i -ые столбцы соответственно матриц Λ и $M, (i = \overline{1, n})$.

Перейдем теперь от матричного уравнения (4.18) к n -векторно-матричным уравнениям вида

$$M\Lambda_i = AM_i; (i = \overline{1, n}), \quad (4.19)$$

где i – i -ый столбец Λ_i диагональной матрицы Λ имеет вид

$$\Lambda_i = [0 \ \dots \ 0 \ \lambda_i \ 0 \ \dots \ 0]^T. \quad (4.20)$$

Нетрудно видеть, что с учетом (4.20) векторно-матричное уравнение (4.19) принимает вид

$$\lambda_i M_i = AM_i; i = \overline{1, n}. \quad (4.21)$$

Векторно-матричное соотношение (4.21) является определением собственного вектора матрицы A , откуда следует, что M_i – собственный вектор матрицы A . ■

Утверждение 4.2 (У4.2). Пусть матрица A ЛО A является матрицей простой структуры, тогда ее каноническая строчная фробениусова форма A_F , имеющая представление (4.13), обладает собственными векторами

$$\xi_i = \arg\{A_F \xi_i = \lambda_i \xi_i; i = \overline{1, n}\}, \quad (4.22)$$

которые строятся по *схеме* Вандермонда так, что они принимают вид

$$\xi_i = [1 \ \lambda_i \ \lambda_i^2 \ \dots \ \lambda_i^{n-1}]^T; i = \overline{1, n}. \quad (4.23)$$

Доказательство сформулированного утверждения строится на непосредственной подстановке в (4.22) представлений (4.13) и (4.23), в результате получается следующая цепочка векторно-матричных равенств

$$A_F \xi_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda_i \\ \lambda_i^2 \\ \dots \\ \lambda_i^{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_i \\ \lambda_i^2 \\ \lambda_i^3 \\ \dots \\ -\sum_{l=1}^n a_l \lambda_i^{n-l} \end{bmatrix}. \quad (4.24)$$

Но в силу характеристического уравнения матриц ЛО A оказывается справедливой запись

$$\lambda_i^n + \sum_{l=1}^n a_l \lambda_i^{n-l} = 0, \quad (4.25)$$

из которой следует справедливость представления

$$-\sum_{l=1}^n a_l \lambda_i^{n-l} = \lambda_i^n, \quad (4.26)$$

подстановка которого в (4.24) приводит последнее к виду

$$A_F \xi_i = \lambda_i [1 \ \lambda_i \ \lambda_i^2 \ \dots \ \lambda_i^{n-1}]^T. \quad (4.27)$$

Соотношение (4.27) делает справедливым утверждение 4.2. ■

Доказательство утверждения 4.2. и положения утверждения 4.1 содержат доказательство утверждения 4.3.

Утверждение 4.3 (У4.3). Пусть матрица A_F является канонической строчной фробениусовой формой матриц ЛО A простой структуры, тогда матрица A_F может быть приведена к канонической диагональной форме (4.3) с помощью матрицы Вандермонда M_B , столбцы которой M_{Bi} ($i = \overline{1, n}$) суть собственные вектора вида (4.23) так, что она принимает вид

$$M_B = \text{row} \left\{ M_{Bi} = \xi_i = \begin{bmatrix} 1 & \lambda_i & \lambda_i^2 & \dots & \lambda_i^{n-1} \end{bmatrix}^T; i = \overline{1, n} \right\} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix} \quad \blacksquare(4.28)$$

Рассмотрим теперь задачу конструирования матрицы \tilde{M} приведения исходной матрицы A , обладающей комплексно-значным спектром собственных значений (4.4), к канонической блочно-диагональной форме (4.5) в силу матричного соотношения $\tilde{\Lambda} = \tilde{M}^{-1} A \tilde{M}$.

Утверждение 4.4 (У4.4). Пусть $(n \times n)$ -матрица A такова, что алгебраический спектр ее собственных значений составлен из комплексно-сопряженных чисел так, что он имеет вид (4.4). Геометрический спектр собственных векторов этой матрицы составлен из комплексно-сопряженных векторов так, что он имеет вид

$$\{\xi_{2i-1}; \xi_{2i}; i = \overline{1, n/2}\} = \left\{ \begin{array}{l} \xi_{2i-1} = \xi_{R, 2i-1} + j \xi_{J, 2i-1}; \xi_{2i} = \xi_{R, 2i} - j \xi_{J, 2i}; \\ A \xi_{2i-1} = \lambda_{2i-1} \xi_{2i-1}; A \xi_{2i} = \lambda_{2i} \xi_{2i}; i = \overline{1, n/2}. \end{array} \right\}.$$

Тогда матрица

$$\tilde{M} = \text{arg} \left\{ \tilde{\Lambda} = \tilde{M}^{-1} A \tilde{M} = \text{diag} \left\{ \tilde{\Lambda}_{ii} = \begin{bmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ -\beta_i & \alpha_i \end{bmatrix}; i = \overline{1, n/2}; \right\} \right\} =$$

$$= \text{row} \left\{ \left[\tilde{M}_{2i-1} : \tilde{M}_{2i} \right]; i = \overline{1, n/2}; \right\}$$

имеет своими столбцами $\tilde{M}_{2i-1}, \tilde{M}_{2i}$ соответственно вещественный и мнимый компоненты собственных векторов, что записывается в форме

$$\tilde{M}_{2i-1} = \xi_{R, 2i-1}, \tilde{M}_{2i} = \xi_{J, 2i-1}. \quad \square$$

Доказательство утверждения строится на непосредственной подстановке в векторно-матричные соотношения для собственных векторов

$$A \xi_{2i-1} = \lambda_{2i-1} \xi_{2i-1}; A \xi_{2i} = \lambda_{2i} \xi_{2i}; i = \overline{1, n/2}$$

представлений собственных значений и векторов в форме

$$\{\lambda_{2i-1} = \alpha_i + j\beta_i; \lambda_{2i} = \alpha_i - j\beta_i : i = \overline{1, n/2}\}$$

$$\xi_{2i-1} = \xi_{R,2i-1} + j\xi_{J,2i-1}; \xi_{2i} = \xi_{R,2i} - j\xi_{J,2i}; i = \overline{1, n/2}.$$

и последующем разделении полученных выражений на вещественный и мнимый компоненты, что в итоге приводит к двум векторно-матричным равенствам

$$(A - \alpha_i I)\xi_{Ri} = -\beta_i \xi_{Ji} ; (A - \alpha_i I)\xi_{Ji} = \beta_i \xi_{Ri}. \quad (4.29)$$

В свою очередь, если записать уравнение подобия $\tilde{M}\tilde{\Lambda} = A\tilde{M}$, в котором выделить блоки соответствующие собственным значениям λ_{2i-1} и λ_{2i} то получим

$$[\tilde{M}_{2i-1} : \tilde{M}_{2i}] \begin{bmatrix} \alpha_i & \beta_i \\ -\beta_i & \alpha_i \end{bmatrix} = A[\tilde{M}_{2i-1} : \tilde{M}_{2i}]$$

Решение последнего матричного уравнения относительно матриц-столбцов $\tilde{M}_{2i-1}, \tilde{M}_{2i}$ приводит к соотношениям

$$(A - \alpha_i I)\tilde{M}_{2i-1} = -\beta_i \tilde{M}_{2i} ; (A - \alpha_i I)\tilde{M}_{2i} = \beta_i \tilde{M}_{2i-1}.$$

Сравнение последних соотношений с соотношениями (4.29) делает справедливыми положения утверждения. ■

Примечание 4.1 (ПР4.1). Если спектр собственных значений матриц ЛО A является комбинированным так, что он содержит как вещественные некрратные собственные значения, так и комплексно-сопряженные некрратные собственные значения, при этом примера ради имеет реализацию вида (4.8) $\sigma\{A\} = \{\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta; \lambda_i : \text{Im}(\lambda_i) = 0; \lambda_i \neq \lambda_j; i \neq j; i, j = \overline{3, n}\}$, то исходная матрица A приводима к блочно диагональной канонической форме вида (4.9) с помощью обобщенной матрицы \tilde{M} , имеющей своими столбцами собственные вектора, а также их вещественные и мнимые компоненты, согласованные с вещественными и комплексно-значными собственными значениями. Так в случае, когда исходная матрица A ЛО A имеет каноническую строчную фробениусову форму A_F , то \tilde{M} является обобщенной матрицей Вандермонда \tilde{M}_B , имеющей представление

$$\tilde{M}_B = \begin{bmatrix} \text{Re}(\lambda_1^0) & \text{Im}(\lambda_1^0) & \lambda_3^0 & \dots & \lambda_n^0 \\ \text{Re}(\lambda_1^1) & \text{Im}(\lambda_1^1) & \lambda_3^1 & \dots & \lambda_n^1 \\ \text{Re}(\lambda_1^2) & \text{Im}(\lambda_1^2) & \lambda_3^2 & \dots & \lambda_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \text{Re}(\lambda_1^{n-1}) & \text{Im}(\lambda_1^{n-1}) & \lambda_3^{n-1} & \dots & \lambda_n^{n-1} \end{bmatrix}. \quad (4.30)$$

В заключение покажем, что матрица Вандермонда M_B и матрица M собственных векторов произвольной матрицы A простой структуры

ЛО A позволяют приводить матрицу A к канонической строчной фробениусовой форме A_F . Действительно, обе матрицы M и M_B решают задачу диагонализации матриц A и A_F в формах

$$\Lambda = M^{-1}AM \quad \Lambda = M_B^{-1}A_F M_B. \quad (4.31)$$

Приведенные матричные соотношения позволяют составить матричное равенство

$$M_B^{-1}A_F M_B = M^{-1}AM,$$

которое в разрешенном относительно матрицы A_F виде записывается

$$A_F = M_B M^{-1} A M M_B^{-1} = M_F^{-1} A M_F, \quad (4.32)$$

$M_F = M M_B^{-1}$ – матрица приведения произвольной матрицы A простой структуры к матрице A_F , являющейся канонической строчной фробениусовой формой матриц ЛО A .

Примеры и задачи

Приводимые ниже матрицы *простой структуры* привести к канонической *диагональной и строчной сопровождающей (фробениусовой)* формам, построить матрицы приведения подобия к указанным каноническим базисам.

$$4.1. \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 7 & -5 \end{bmatrix} \quad 4.2. \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 21 & 4 \end{bmatrix} \quad 4.3. \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} \quad 4.4. \begin{bmatrix} 0 & 12 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$4.5. \begin{bmatrix} -3 & 9 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \quad 4.6. \begin{bmatrix} 0 & 21 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \quad 4.7. \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \quad 4.8. \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$$

$$4.9. \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 8 & 5 \end{bmatrix} \quad 4.10. \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \quad 4.11. \begin{bmatrix} 0 & -15 \\ 1 & -8 \end{bmatrix} \quad 4.12. \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 8 & -3 \end{bmatrix}$$

$$4.13. \begin{bmatrix} -3 & 8 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad 4.14. \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad 4.15. \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -8 & -7 \end{bmatrix} \quad 4.16. \begin{bmatrix} 5 & 16 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$4.17. \begin{bmatrix} 5 & -8 \\ 5 & -9 \end{bmatrix} \quad 4.18. \begin{bmatrix} 12 & -7 \\ 12 & -8 \end{bmatrix} \quad 4.19. \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 24 & -9 \end{bmatrix} \quad 4.20. \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Решение вариантов задач

В качестве примера произвольной матрицы A ЛО A возьмем матрицу 4.10, воспользовавшись при этом результатами изучения ее в предыдущем разделе в виде спектров собственных значений и векторов так, что можно записать

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}; \sigma\{A\} = \{\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -5\}; \xi_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \xi_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Задача 1: Привести матрицу A к диагональной форме $\Lambda = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}$

с помощью матричного соотношения $\Lambda = M^{-1}AM$, где

$$M = [M_1 = \xi_1 \quad M_2 = \xi_2] = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}; M^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{bmatrix},$$

тогда

$$\Lambda = M^{-1}AM = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & -2/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

Задача 2: Привести матрицу A к строчной сопровождающей (фробениусовой) форме, для построения которой составим характеристический полином матрицы A

$$D(\lambda) = \det(\lambda I - A) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = (\lambda - 2)(\lambda + 5) = \lambda^2 + 4\lambda - 5.$$

Сопровождающая форма A_F исходной матрицы A принимает вид

$$A_F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}, \text{ решим задачу ее диагонализации с помощью матрицы}$$

Вандермонда.

$$\begin{aligned} \Lambda &= M_B^{-1}A_F M_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix}^{-1} A_F \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} 5/6 & 1/6 \\ 1/6 & -1/6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Теперь приведем исходную матрицу A к сопровождающей (фробениусовой) форме A_F с помощью матричных соотношений

$$A_F = M_B M^{-1} A M M_B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$$

Поставленная задача решена.

5. ЛИНЕЙНЫЕ И КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ ОТ ВЕКТОРОВ И МАТРИЦ ПО СКАЛЯРНЫМ, ВЕКТОРНЫМ И МАТРИЧНЫМ ПЕРЕМЕННЫМ

Определение 5.1 (О5.1). Пусть каждому вектору x линейного действительного пространства R^n ставится в соответствие вполне определенное число из R . Тогда говорят, что в линейном пространстве R^n определена *скалярная функция от вектора* $F(x): R^n \rightarrow R$.

Определение 5.2 (О5.2). Функция $F_1(x)$, областью определения которой является линейное пространство R^n , а областью значений – совокупность действительных чисел R , называется *действительной линейной формой* (линейным функционалом), если выполняется соотношение

$$F_1(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 F_1(x_1) + \alpha_2 F_1(x_2) \quad (5.1)$$

для любых векторов x_1 и x_2 и любых действительных чисел α_1 и α_2 .

Пусть $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ – естественный базис в пространстве R^n , $x = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$ – вектор–столбец координат вектора x в этом базисе, тогда любая линейная форма $F_1(x)$ может быть представлена в следующем виде:

$$F_1(x) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n, \quad (5.2)$$

где $\alpha_k = F_1(e_k), k = \overline{1, n}$. Наоборот, при любых действительных числах $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ выражение (5.2) определяет некоторую линейную форму в R^n .

Определение 5.3 (О5.3). Множество всех векторов $x \in R^n$, для которых $F_1(x) = 0$, называется *ядром* линейной формы (функционала) и обозначается $N(F_1)$:

$$N(F_1) = \{x \in R^n : F_1(x) = 0\} \quad (5.3)$$

Линейную форму (5.2) можно записать в E^n как скалярное произведение

$$F_1(x) = (x, \alpha), \quad (5.4)$$

где $\alpha = [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]^T$.

Определение 5.4 (О5.4). Пусть L – некоторое подпространство пространства R^n . Выберем в R^n произвольный вектор u , тогда множество векторов $z = u + v$, где $v \in L$ называют *плоскостью* в пространстве

R^n . Вектор u называется вектором сдвига, а подпространство L – направляющим подпространством этой плоскости.

Определение 5.5 (О.5). Гиперплоскостью H в пространстве R^n называется плоскость размерностью $n-1$. Если L^\perp – ортогональное дополнение направляющего подпространства L гиперплоскости H и N – любой его базисный вектор, то уравнение гиперплоскости можно записать в следующем виде:

$$(x, N) = (N, x) = b, \quad (5.5)$$

где вектор $N \in L^\perp$ есть нормаль к гиперплоскости H , b – действительное число.

Определение 5.6 (О5.6). Квадратичной формой от n действительных переменных x_1, x_2, \dots, x_n называется функция вида

$$F_2(x) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j, \quad (5.6)$$

где a_{ij} – действительные числа.

Если составить симметричную матрицу A из коэффициентов a_{ij} , называемую матрицей квадратичной формы, и рассматривать величины x_1, x_2, \dots, x_n как координаты вектора $x \in E^n$ в некотором ортонормированном базисе (например, естественном), то квадратичная форма может быть записана как *скалярное произведение* или *квадрат евклидовой векторной нормы* с весом A :

$$F_2(x) = (Ax, x) = x^T Ax = (\|x\|_A)^2. \quad (5.7)$$

Рангом квадратичной формы $F_2(x)$ называется ранг ее матрицы A . При замене переменных $x = Ty$ форма $F_2(x)$ становится квадратичной формой $F_2(y)$ новых переменных y_1, y_2, \dots, y_n , причем матрица B в этой форме связана с матрицей A соотношением

$$B = T^T A T, \quad (5.8)$$

при этом если матрица T неособенная, то ранг квадратичной формы не меняется.

Любую квадратичную форму $F_2(x)$ ранга r можно неособенным линейным преобразованием привести к *каноническому* виду.

$$F_2(y) = \alpha_1 y_1^2 + \alpha_2 y_2^2 + \dots + \alpha_r y_r^2, \quad (5.9)$$

где $\alpha_k, k = \overline{1, r}$ – все отличные от нуля числа. Канонический вид называется *нормальным* видом, если все коэффициенты α_k в (5.9) равны 1 или -1 . Число положительных коэффициентов в выражении (5.9) называется *положительным индексом инерции*, число отрицательных коэффициентов – *отрицательным индексом инерции*, а разность между ними – *сигнатурой* квадратичной формы.

Симметричная матрица A квадратичной формы имеет ортонормированную систему собственных векторов в евклидовом пространстве E^n , соответствующих собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ матрицы A , которые все являются действительными числами. Поэтому матрица A квадратичной формы ортогонально подобна матрице с действительными собственными значениями матрицы A :

$$\Lambda = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\} = T^T A T, (T^{-1} = T^T), \quad (5.10)$$

где $T = [T_1, T_2, \dots, T_n]$ – ортогональная матрица, составленная из столбцов координат ортонормированных собственных векторов матрицы A в том же базисе, в котором задана A .

Определение 5.7 (O5.7). Квадратичная форма $F_2(x) = (Ax, x)$ называется *положительно определенной*, если $(Ax, x) > 0$ при $x \neq 0$, и *неотрицательно определенной* если $(Ax, x) \geq 0$ при любых $x \in E^n$. Аналогично, определяются *отрицательно определенная* и *неположительно определенная* квадратичные формы. Если форма $F_2(x)$ принимает разные знаки при некоторых $x \in E^n$, то она называется *неопределенной*. Для того, чтобы квадратичная форма была положительно определенной, необходимо и достаточно, чтобы все главные миноры матрицы этой формы были положительны (критерий Сильвестра).

Пусть $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$ – собственные значения положительно определенной матрицы A , тогда для всех векторов $x \in E^n$ справедливы неравенства

$$\lambda_n \leq \frac{x^T A x}{x^T x} \leq \lambda_1. \quad (5.11)$$

Определение 5.8 (O5.8). Если все собственные значения матрицы квадратичной формы имеют одинаковый знак, то форма называется *эллиптической*, а уравнение $x^T A x = c$, где $c - \text{const}$, определяет в пространстве E^n гиперэллипсоид постоянного значения (уровня) c .

Рассмотрим основные правила дифференцирования функций от векторов и матриц по *скалярным, векторным и матричным переменным*.

1. Пусть $A = A(q)$ – матрица, элементы которой суть функции $A_{ij} = A_{ij}(q)$ скалярной переменной q . Тогда производной $A_q = \frac{\partial A(q)}{\partial q}$ от матрицы $A(q)$ по q является матрица, составленная из производных $A_{ij,q} = \frac{\partial A_{ij}(q)}{\partial q}$ ее элементов по переменной q , что может быть записано в форме

$$A_q = \text{row}\{\text{col}(A_{ij}; i = \overline{1, m}); j = \overline{1, n}\}.$$

Для производной от суммы и произведения матриц, зависящих от скалярной переменной q по этой переменной справедливы представления

$$C_q = \frac{\partial}{\partial q} \{C(q) = A(q) + B(q)\} = A_q + B_q;$$

$$D_q = \frac{\partial}{\partial q} \{D(q) = A(q) \cdot B(q)\} = A_q \cdot B(q) + A(q) \cdot B_q.$$

Для степенной матричной функции $f(A(q)) = (A(q))^p$ от квадратной $(n \times n)$ – матрицы $A(q)$, где p – целое положительное число, производная по скалярной переменной q вычисляется в силу соотношения

$$\frac{\partial}{\partial q} \{(A(q))^p\} = A_q (A(q))^{p-1} + (A(q)) A_q (A(q))^{p-2} + \dots + (A(q))^{p-1} A_q.$$

Для вычисления производной от обратной матрицы $(A(q))^{-1}$ сформулируем и докажем следующее утверждение.

Утверждение 5.1 (У5.1). Производная $\frac{\partial}{\partial q} (A(q))^{-1}$ от обратной матрицы $(A(q))^{-1}$ по скалярной переменной q вычисляется по формуле

$$\frac{\partial}{\partial q} (A(q))^{-1} = -(A(q))^{-1} A_q (A(q))^{-1}. \quad \square \quad (5.12)$$

Доказательство утверждения строится на дифференцировании по скалярному параметру q матричного уравнения $(A(q))^{-1} \cdot (A(q)) = I$, где I – единичная матрица, в результате которого получим

$$\frac{\partial}{\partial q} \{(A(q))^{-1} \cdot (A(q)) = I\} = \frac{\partial}{\partial q} (A(q))^{-1} \cdot A(q) + (A(q))^{-1} \cdot A_q = 0.$$

Разрешение полученного матричного уравнения относительно производной $\frac{\partial}{\partial q} (A(q))^{-1}$ приводит к (5.12). ■

2. Пусть $J = J(x)$ – скалярная функция векторного аргумента $x = [x_1, \dots, x_n]^T$. Тогда, обозначив символом ∇ оператор градиента, для производной $\frac{\partial J}{\partial x}$ от этой функции по векторному аргументу и градиента можно записать следующие представления:

$$\nabla_x J = \left(\frac{\partial J}{\partial x} \right)^T = \left[\frac{\partial J}{\partial x_1}, \frac{\partial J}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial J}{\partial x_n} \right]^T \text{ – вектор–столбец;}$$

$$(\nabla_x J)^T = \frac{\partial J}{\partial x} = \left[\frac{\partial J}{\partial x_1}, \frac{\partial J}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial J}{\partial x_n} \right] - \text{вектор-строка};$$

$$\nabla_{xx} J = \frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial J}{\partial x} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 J}{\partial x_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 J}{\partial x_n \partial x_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 J}{\partial x_1 \partial x_n} & \dots & \frac{\partial^2 J}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} - (n \times n) - \text{матрица}.$$

3. Пусть $y = [y_1(x), y_2(x), \dots, y_m(x)]^T$ – вектор-столбец скалярных функций от вектора x (векторная функция от векторного аргумента), тогда

$$\nabla_x y = [\nabla_x y_1, \nabla_x y_2, \dots, \nabla_x y_m] = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_1}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \quad (5.13)$$

– матрица размерами $(n \times m)$. Аналогично определяется производная

$$(\nabla_x y)^T = [\nabla_x y_1, \nabla_x y_2, \dots, \nabla_x y_m]^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}. \quad (5.14)$$

4. Пусть $z = z(x)$ и $y = y(x)$ – векторы-столбцы размерности m , и x – вектор-столбец размерности n . Тогда производная по x от скалярного произведения векторов z и y (градиент скалярного произведения) определяется следующим образом:

$$\nabla_x (y, z) = (\nabla_x y)^T z + (\nabla_x z)^T y. \quad (5.15)$$

Примеры и задачи

5.1.* Записать квадратичную форму $F_2(x) = 2x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_1x_2$ с симметричной матрицей этой формы.

5.2.* Привести матрицу $A = \begin{bmatrix} 3/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1/2 & 0 & 3/2 \end{bmatrix}$ квадратичной формы

ортогональным преобразованием к каноническому виду.

$$TT^T = I. \quad (5.16)$$

5.3.* Найти значение x , при котором положительно определенная форма $F_2(x) = (R_x, x) + 2(x, Sb) + C$, где $R > 0$, $C = const$ принимает минимальное значение. Вычислить это значение.

5.4.* Вычислить производные от следующих скалярных функций от вектора x :

а) $J = \lambda^T Ax$; б) $J = x^T x$; в) $J = x^T Ax$.

5.5.* Пусть X – квадратная матрица размером $(n \times n)$ и $J(X) = trX$ – след этой матрицы, равный сумме ее диагональных элементов. Показать, что

$$\text{а) } \nabla_x trX = \frac{\partial trX}{\partial X} = I; \quad \text{б) } \frac{\partial tr(AX)}{\partial X} = A^T. \quad (5.17)$$

5.6. Определить дефект линейной формы $F_1(x)$ на пространстве R^n .

5.7. Показать, что любой вектор z пространства R^n может быть представлен единственным образом в виде $z = \alpha x + y$, где $y \in N(F_1)$, x – фиксированный вектор R^n , α – действительное число.

5.8. Определить расстояние $\mu(x, H)$ от произвольного вектора $z \in E^n$ до гиперплоскости $(n, x) = b$.

5.9. Для каждой из квадратичных форм найти ортогональное преобразование T неизвестных, приводящее эту форму к каноническому виду, и записать полученный канонический вид:

а) $2x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$;

б) $-3x_2^2 + 4x_1x_2 + 10x_1x_3 - 4x_2x_3$;

в) $-x_1^2 + x_2^2 - 5x_3^2 + 6x_1x_3 + 4x_2x_3$;

г) $2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$.

5.10. Выяснить, являются ли положительно определенными следующие квадратичные формы:

а) $x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2^2 + 4x_2x_3 + 2x_3^2$;

б) $5x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$;

в) $3x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3$.

5.11. Доказать, что положительно определенная матрица является неособенной.

5.12. Доказать, что если A – положительно определенная симметричная матрица, то A^{-1} – также положительно определенная матрица.

5.13. Доказать, что если $|A| \neq 0$, то $A^T A$ и AA^T – положительно определенные матрицы; если $|A| = 0$, $A^T A$ и AA^T – неотрицательно определенные матрицы.

5.14. Привести матрицу $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ квадратичной формы к ка-

ноническому виду и записать полученный канонический вид.

5.15. Доказать справедливость для любой симметричной матрицы A спектрального разложения:

$A = \lambda_1 \xi_1 \xi_1^T + \lambda_2 \xi_2 \xi_2^T + \dots + \lambda_n \xi_n \xi_n^T$, где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ – собственные значения матрицы A ; $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ – ортонормированная система собственных векторов этой матрицы.

5.16. Доказать, что $x^T A x = \text{tr}(A x x^T)$, где tr обозначает след матрицы.

5.17. Вычислить производные от следующих функций:

а) $J(x) = (y - Ax)^T Q(y - Ax)$, где $Q^T = Q > 0$;

б) $J(X) = \text{tr}(AX^T)$;

в) $J(X) = \text{tr}(X^T AX)$;

г) $J(X) = \text{tr}(X^{-1})$;

д) $J(X) = |X|$.

5.18. Определить минимальное значение квадратичной формы $F_2(x) = (Rx, x) + 2(x, Su) + (u, Tu)$, где $R > 0$; S, T – матрицы, u – не зависящий от x вектор.

Решение вариантов задач

Решение задачи 5.1. Матрица A исходной формы: $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$.

Любая действительная матрица может быть представлена в виде:

$A = A^c + A^k$, где $A^c = \frac{1}{2}(A + A^T)$ – симметричная матрица,

$A^k = \frac{1}{2}(A - A^T)$ – кососимметричная матрица. Поскольку для любого

вектора x $A^k x \perp x$, то $x^T A^k x = 0$, поэтому имеем $F_2(x) = x^T A^c x$, где

A^c в данном случае равна $A^c = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$.

Решение задачи 5.2. Вычисление корней характеристического уравнения $\det[A - \lambda I] = 0$ дает следующие собственные значения матрицы A квадратичной формы: $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 2$. Решив систему уравнений $(A - I)t = 0$, получим два ортонормированных собственных вектора,

соответствующих собственному значению $\lambda = 1$:

$\xi_1 = \left[\sqrt{2/2} : 0 : \sqrt{2/2} \right]^T$, $\xi_2 = [0 : 1 : 0]^T$. Решив систему уравнений

$(A - 2I)\xi = 0$, получим третий вектор ортонормированной системы, соответствующий собственному значению $\lambda = 2$:

$\xi_3 = \left[\sqrt{2/2} : 0 : -\sqrt{2/2} \right]^T$. В итоге матрица ортогонального преобразова-

ния равна $T = [\xi_1, \xi_2, \xi_3] = \begin{bmatrix} \sqrt{2/2} & 0 & \sqrt{2/2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2/2} & 0 & -\sqrt{2/2} \end{bmatrix}$.

Матрица канонического вида формы равна $\Lambda = \text{diag}\{1, 1, 2\}$ так что $\Lambda = T^T A T$, при этом $T^T T = I$.

Решение задачи 5.3. Рассмотрим решение данной задачи методом, не связанным с вычислением производных. Дополним форму $F_2(x)$ до полного квадрата:

$$\begin{aligned} x^T R x + 2x^T S b + c &= x^T R x + 2x^T R R^{-1} S b + b^T S^T R^{-1} S b + c - \\ &- b^T S^T R^{-1} S b = (x + R^{-1} S b)^T R (x + R^{-1} S b) + c - b^T S^T R^{-1} S b \end{aligned} \quad (5.18)$$

Из выражения (5.18) и положительной определенности матрицы R следует, что данная квадратичная форма принимает минимальное значение при $x + R^{-1} S b = 0$, откуда получим $x_{\min} = -R^{-1} S b$ и $F_{2\min} = c - b^T S^T R^{-1} S b$.

Решение задачи 5.4.

а) Положим $A^T \lambda = C$, тогда исходную функцию можно записать в виде $J = C^T x$. Согласно выражению (5.13) имеем

$$\nabla_x J = \nabla_x (C^T x) = \nabla_x (C_1 x_1 + \dots + C_n x_n) = C,$$

откуда получаем

$$\nabla_x J = A^T \lambda \quad (5.19)$$

б) Поскольку $x^T x = (x, x)$ то

$$\nabla_x (x, x) = (\nabla_x x^T) x + (\nabla_x x^T) x = 2(\nabla_x x^T) x. \text{ Но } \nabla_x x^T = I, \text{ поэтому}$$

окончательно получим

$$\nabla_x J = 2x \quad (5.20)$$

в) Положим $y = Ax$, тогда можем записать

$J = x^T Ax = (Ax, x) = (y, x)$. Согласно выражению (5.15)

$$\nabla_x J = \nabla_x (y^T x) = (\nabla_x y^T) x + (\nabla_x x^T) y.$$

Но $\nabla_x y^T = \nabla_x (Ax)^T = [\nabla_x y_1, \dots, \nabla_x y_n] = A^T$ по формуле (5.13), а $\nabla_x x^T = I$, поэтому в итоге получим $\nabla_x J = A^T x + Ax$. Если матрица A симметричная, то будем иметь

$$\nabla_x J = 2Ax. \quad (5.21)$$

Решение задачи 5.5.

а) Поскольку, $trX = x_{11} + \dots + x_{nn}$, то из формулы (5.13) имеем

$$\nabla_x trX = \nabla_x x_{11} + \dots + \nabla_x x_{nn} = I.$$

б) Поскольку $tr(AX) = a_{11}x_{11} + a_{12}x_{21} + \dots + a_{nn}x_{nn}$, то

$$\nabla_x tr(AX) = a_{11}\nabla_x x_{11} + \dots + a_{nn}\nabla_x x_{nn}. \quad (5.22)$$

Но $\nabla_x x_{ij}$ есть матрица размером $(n \times n)$, имеющая единственный отличный от нуля и равный единице элемент, стоящий в i -й строке и j -м столбце. Сложив все слагаемые правой части выражения (5.22), получим требуемый результат.

6. ФУНКЦИИ ОТ МАТРИЦ, МАТРИЧНАЯ ЭКСПОНЕНТА И ЕЕ СВОЙСТВА

Рассматривается $(n \times n)$ – квадратная матрица A , на которой конструируются функции от матрицы $f(A)$ трех типов: *скалярная* функция от матрицы, *векторная* функция от матрицы и *матричная* функция от матрицы.

Определение 6.1 (Об.1). *Скалярной функцией* (СФМ) от квадратной матрицы A называется функция $f(A)$, которая реализует отображение $f(A): R^{n \times n} \Rightarrow R$, где R – множество действительных чисел.

Примерами скалярных функций от матрицы являются: $f(A) = \det(A)$, $f(A) = \text{tr}(A)$, $f(A) = C\{A\}$, $f(A) = \|A\|$ – детерминант, след, число обусловленности и норма матрицы соответственно, СФМ является квадратичная форма $f(A) = x^T A x$.

Определение 6.2 (Об.2). *Векторной функцией* от квадратной матрицы A называется функция $f(A)$, которая реализует отображение $f(A): R^{n \times n} \Rightarrow R^n$, где R^n – n -мерное действительное пространство.

Примерами векторных функций от матрицы (ВФМ) являются такие, как $f(A) = \text{col}\{\lambda_i; i = \overline{1, n}\}$, $f(A) = \text{col}\{\alpha_i; i = \overline{1, n}\}$ – векторы, построенные на элементах алгебраических спектров соответственно собственных значений $\{\lambda_i; i = \overline{1, n}\}$ и сингулярных чисел $\{\alpha_i; i = \overline{1, n}\}$ матрицы A .

Матричная функция от матрицы (МФМ) реализует отображение $f(A): R^{n \times n} \Rightarrow R^{n \times n}$. *Исходное определение* матричной функции от матрицы задается следующим образом.

Определение 6.3 (Об.3). Пусть $f(\alpha)$ – скалярный степенной ряд (многочлен) относительно скалярной переменной α .

$$f(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \dots + a_p\alpha^p. \quad (6.1)$$

Тогда скалярный ряд $f(\alpha)$ порождает матричную функцию $f(A)$ от матрицы A в виде матричного ряда, если в представлении (6.1) для $f(\alpha)$ скалярную переменную α заменить на матрицу A так, что $f(A)$ запишется в форме

$$f(A) = a_0I + a_1A + a_2A^2 + \dots + a_pA^p. \quad (6.2)$$

Поставим задачу построения перехода от исходного представления МФМ $f(A)$ в форме (6.2) к ее *минимальному представлению*, то есть к представлению матричным многочленом минимальной степени. Начнем решение этой задачи с *теоремы Гамильтона–Кэли*.

Утверждение 6.1 (Уб.1) (Теорема Гамильтона–Кэли).

Квадратная $(n \times n)$ - матрица A с характеристическим полиномом

$$D(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n, \quad \text{обнуляет}$$

свой характеристический полином так, что выполняется матричное соотношение

$$D(A) = A^n + a_1 A^{n-1} + a_2 A^{n-2} + \dots + a_{n-1} A + a_n I = 0, \quad (6.3)$$

где 0 – $(n \times n)$ нулевая матрица. \square

Доказательство справедливости сформулированного утверждения осуществим для случая матрицы A простой структуры, характеризующейся алгебраическим спектром

$\sigma\{A\} = \{\lambda_i : \lambda_i \neq \lambda_j; i \neq j; \text{Im } \lambda_i = 0; i = \overline{1, n}\}$ вещественных и некратных собственных значений так, что на нем может быть сконструирована диагональная матрица $\Lambda = \text{diag}\{\lambda_i; i = \overline{1, n}\}$. Если теперь воспользоваться матричным соотношением подобия (2.30), то матрицу A можно представить в форме $A = M \Lambda M^{-1}$, что в свою очередь для (6.3) позволяет записать

$$\begin{aligned} D(A) &= M \left\{ \Lambda^n + a_1 \Lambda^{n-1} + a_2 \Lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \Lambda + a_n I \right\} M^{-1} = \\ &= M \text{diag} \left\{ \lambda_i^n + a_1 \lambda_i^{n-1} + a_2 \lambda_i^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda_i + a_n I; i = \overline{1, n} \right\} M^{-1} = 0. \end{aligned} \quad \blacksquare$$

Теорема Гамильтона-Кэли позволяет ввести следующие определения.

Определение 6.4 (Об.4). Многочлен (степенной ряд) $\varphi(\alpha)$ относительно скалярной переменной α называется *аннулирующим многочленом* квадратной матрицы A , если выполняется условие

$$\varphi(A) = 0. \quad (6.4)$$

Очевидно, *аннулирующим многочленом* матрицы A в силу теоремы Гамильтона-Кэли является в первую очередь ее *характеристический полином*. Ясно, что существует множество аннулирующих многочленов матрицы A степени большей, чем n . Но могут существовать аннулирующие многочлены степени $m < n$.

Определение 6.5 (Об.5). Аннулирующий многочлен $\psi(\alpha)$ наименьшей степени m со старшим коэффициентом при α^m , равным единице, называется *минимальным многочленом* матрицы A .

Построим разложение многочлена $f(\alpha)$ (6.1), задающего матричную функцию $f(A)$ от матрицы в форме (6.2), по модулю минимального многочлена $\psi(\alpha)$ матрицы A , представив его выражением

$$f(\alpha) = \varphi(\alpha) \psi(\alpha) + r(\alpha), \quad (6.5)$$

где многочлен $r(\alpha)$ имеет степень $\deg(r(\alpha))$ меньше степени $\deg(\psi(\alpha)) = m$ минимального многочлена $\psi(\alpha)$ матрицы A . Выраже-

ние (6.5) позволяет дать следующее определение матричной функции от матрицы.

Определение 6.6 (Об.6). Пусть многочлен $f(\alpha)$ относительно скалярной переменной α допускает представление в форме (6.5), тогда матричная функция $f(A)$ может быть задана в *минимальной* форме

$$f(A) = r(A). \quad (6.6)$$

Заметим, что основной проблемой при задании матричной функции от матрицы в форме (6.6) является вычисление многочлена $r(\alpha)$.

Основной способ вычисления многочлена $r(\alpha)$ в силу (6.5) опирается на то, что $r(\alpha)$ является остатком от деления $f(\alpha)$ на минимальный многочлен

$$r(\alpha) = \text{rest} \frac{f(\alpha)}{\psi(\alpha)}. \quad (6.7)$$

Если $f(\alpha)$ не является рядом или многочленом вида (6.1), а является произвольной аналитической функцией со значениями на алгебраическом спектре собственных значений матрицы A , то формирование матричной функции $f(A)$ от матрицы A , опирается на представление $f(\alpha)$ в соответствии с интерполяционной схемой Лагранжа в виде мультипликативной структуры из двучленов $(\alpha - \lambda_i)$ или в соответствии с интерполяционной схемой Ньютона в виде ряда по степеням двучленов $(\alpha - \lambda_i)$, число членов которых определяется минимальным многочленом $\psi(\lambda)$. Для реализации интерполяционной схемы Лагранжа, которая в случае размещения интерполяционных узлов на собственных значениях λ_i матрицы A приобретает название интерполяционной схемы Лагранжа–Сильвестра, требуется знание значений $f(\lambda_i)$. Для реализации интерполяционной схемы Ньютона требуется знание значений $f(\lambda_i), f'(\lambda_i) \dots f^{(m_i-1)}(\lambda_i)$.

Если минимальный многочлен $\psi(\alpha)$ степени m в силу его определения записать в форме

$$\Psi(\alpha) = (\alpha - \lambda_1)^{m_1} (\alpha - \lambda_2)^{m_2} \dots (\alpha - \lambda_r)^{m_r}, \quad (6.8)$$

где $m_1 + m_2 + \dots + m_r = m$, $\{\lambda_i; i = \overline{1, r}\} \in \sigma\{A\}$,

то можно построить представление для функции $f(\alpha)$ в форме

$$f(\alpha) = r(\alpha), \quad (6.9)$$

где $r(\alpha)$ – интерполяционный многочлен Лагранжа–Сильвестра или Ньютона, сформированный на алгебраическом спектре $\sigma\{A\}$ собственных значений $\{\lambda_i; i = \overline{1, r}\}$ матрицы A , характеризующийся степенью

меньшей степени m минимального многочлена $\psi(\alpha)$, а потому удовлетворяющий условиям (6.5), (6.7).

Рассмотрим случай, когда нули минимального многочлена (6.8) являются простыми, т.е. при $m_1 = m_2 = \dots = m_r = 1$, минимальный многочлен и характеристический совпадают так, что выполняются равенства $\psi(\alpha) = D(\alpha)$ и $r = n$, тогда представление $f(\alpha) = r(\alpha)$ в форме *интерполяционного многочлена* Лагранжа–Сильвестра принимает вид

$$r(\alpha) = \sum_{i=1}^n \frac{(\alpha - \lambda_1) \dots (\alpha - \lambda_{i-1})(\alpha - \lambda_{i+1}) \dots (\alpha - \lambda_n)}{(\lambda_i - \lambda_1) \dots (\lambda_i - \lambda_{i-1})(\lambda_i - \lambda_{i+1}) \dots (\lambda_i - \lambda_n)} f(\lambda_i). \quad (6.10)$$

Матричная функция от матрицы для случая некратных собственных значений матрицы A принимает с использованием (6.10) вид

$$f(A) = r(A) = \sum_{i=1}^n \frac{(A - \lambda_1 I) \dots (A - \lambda_{i-1} I)(A - \lambda_{i+1} I) \dots (A - \lambda_n I)}{(\lambda_i - \lambda_1) \dots (\lambda_i - \lambda_{i-1})(\lambda_i - \lambda_{i+1}) \dots (\lambda_i - \lambda_n)} f(\lambda_i). \quad (6.11)$$

Теперь допустим, что характеристический многочлен $D(\alpha)$ имеет кратные корни, но *минимальный* многочлен $\psi(\alpha)$, являясь делителем $D(\alpha)$, имеет только простые корни

$$\psi(\alpha) = (\alpha - \lambda_1)(\alpha - \lambda_2) \dots (\alpha - \lambda_m).$$

В этом случае интерполяционный многочлен $r(\alpha)$ совпадает с точностью до замены числа членов n на m с представлением (6.10). Как следствие матричная функция $f(A)$ от матрицы A принимает вид

$$f(A) = r(A) = \sum_{i=1}^m \frac{(A - \lambda_1 I) \dots (A - \lambda_{i-1} I)(A - \lambda_{i+1} I) \dots (A - \lambda_m I)}{(\lambda_i - \lambda_1) \dots (\lambda_i - \lambda_{i-1})(\lambda_i - \lambda_{i+1}) \dots (\lambda_i - \lambda_m)} f(\lambda_i). \quad (6.12)$$

В заключение рассмотрим общий случай, когда минимальный многочлен матрицы A имеет вид (6.8). Для случая кратных нулей минимального многочлена, то есть когда он имеет вид (6.8), представление $r(\alpha)$ в форме *интерполяционного многочлена* Лагранжа–Сильвестра, содержащего элементы интерполяционной схемы Ньютона, принимает вид

$$r(\alpha) = \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^{m_i} \frac{1}{(j-1)!} \left[\frac{\partial^{(j-1)}}{\partial \alpha^{(j-1)}} \frac{f(\alpha)}{\psi_i(\alpha)} \right]_{\alpha=\lambda_i} \frac{\psi(\alpha)}{(\alpha - \lambda_i)^{m_i}}, \quad (6.13)$$

где для компактности записи использовано обозначение

$$\psi_i(\lambda_i) = \frac{\psi(\alpha)}{(\alpha - \lambda_i)^{m_i}} \Big|_{\alpha=\lambda_i}.$$

Если ввести обозначение

$$\alpha_{i,j} = \frac{1}{(j-1)!} \left[\frac{\partial^{(j-1)}}{\partial \alpha^{j-1}} \frac{f(\alpha)}{\psi_k(\alpha)} \right]_{\alpha=\lambda_i}, \quad (6.14)$$

то выражение (6.13) для $f(\alpha) = r(\alpha)$ принимает вид

$$r(\alpha) = \sum_{i=1}^r \left\{ \alpha_{i,1} + \alpha_{i,2}(\alpha - \lambda_i) + \dots + \alpha_{i,m_i}(\alpha - \lambda_i)^{m_i-1} \right\} \psi_i(\alpha). \quad (6.15)$$

Если воспользоваться представлением (6.15), то для МФМ можно записать

$$f(A) = r(A) = \sum_{i=1}^r \left\{ \alpha_{i,1}I + \alpha_{i,2}(A - \lambda_i I) + \dots + \alpha_{i,m_i}(A - \lambda_i I)^{m_i-1} \right\} \psi_i(A). \quad (6.16)$$

Если матрица A представляет собой $(n \times n)$ – жорданову клетку, порождаемую собственным значением λ_0 кратности n , так что матрица A принимает вид

$$A = J = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_0 \end{bmatrix}, \quad (6.17)$$

то интерполяционный многочлен $r(\alpha)$, так как минимальный многочлен матрицы A (6.17) имеет вид $\psi(\alpha) = (\alpha - \lambda_0)^n$, для функции $f(\alpha)$ полностью строится по интерполяционной схеме Ньютона и определяется выражением

$$r(\alpha) = f(\lambda_0) + \frac{f'(\lambda_0)}{1!}(\alpha - \lambda_0) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(\lambda_0)}{(n-1)!}(\alpha - \lambda_0)^{n-1}. \quad (6.18)$$

В силу (6.18), (6.5), (6.7) матричная функция $f(A)$ от матрицы $A = J$ принимает вид

$$\begin{aligned} r(J) &= f(\lambda_0)I + \frac{f'(\lambda_0)}{1!}(J - \lambda_0 I) + \dots + \frac{f^{(n-1)}(\lambda_0)}{(n-1)!}(J - \lambda_0 I)^{n-1} = \\ &= \begin{bmatrix} f(\lambda_0) & \frac{f'(\lambda_0)}{1!} & \frac{f''(\lambda_0)}{2!} & \dots & \frac{f^{(n-1)}(\lambda_0)}{(n-1)!} \\ 0 & f(\lambda_0) & \frac{f'(\lambda_0)}{1!} & \dots & \frac{f^{(n-2)}(\lambda_0)}{(n-2)!} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{f'(\lambda_0)}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f(\lambda_0) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (6.19)$$

Рассмотрим теперь случай, когда матрица A имеет вид $A = \text{diag} \left\{ J_i; \sum_{i=1}^r m_i = n \right\}$, где $J_i - (m_i \times m_i)$ – жорданова клетка, порож-

даемая собственным значением λ_i кратности m_i , так что матрица A принимает вид

$$A = \text{diag} \left\{ J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i \end{bmatrix}; \sum_{i=1}^r m_i = n \right\}, \quad (6.20)$$

тогда в силу (6.18) и (6.19) матричная функция $f(A)$ от матрицы A (6.20) принимает вид

$$f(A) = \text{diag} \left\{ f(J_i) = \begin{bmatrix} f(\lambda_i) & \frac{f'(\lambda_i)}{1!} & \frac{f''(\lambda_i)}{2!} & \dots & \frac{f^{(n-1)}(\lambda_i)}{(n-1)!} \\ 0 & f(\lambda_i) & \frac{f'(\lambda_i)}{1!} & \dots & \frac{f^{(n-2)}(\lambda_i)}{(n-2)!} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{f'(\lambda_i)}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & f(\lambda_i) \end{bmatrix}; \sum_{i=1}^r m_i = n \right\}. \quad (6.21)$$

Из определения матричной функции от матрицы во всех формах следуют ее основные свойства:

Свойство 6.1 (СВ6.1). Матричная функция от матрицы $f(A)$ сохраняет геометрический спектр $\{\xi_i; i = \overline{1, n}\}$ собственных векторов ξ_i матрицы A : $A\xi_i = \lambda_i\xi_i$, так что выполняется соотношение

$$f(A)\xi_i = f(\lambda_i)\xi_i, \quad (6.22)$$

где $f(\lambda_i) = \lambda_{f_i}$ – собственные значения матрицы $f(A)$, удовлетворяющие ее характеристическому уравнению $\det\{\lambda_f I - f(A)\} = 0$ и вычисляемые как функция $f(\lambda)$ на спектре $\sigma\{A\} = \{\lambda_i; i = \overline{1, n}\}$ собственных значений матрицы $f(A)$.

Свойство 6.2 (СВ6.2). Матричная функция от матрицы $f(A)$ сохраняет матричное отношение подобия в том смысле, что если матрицы A и B подобны, т.е. $B = T^{-1}AT$, то

$$f(B) = T^{-1}f(A)T. \quad (6.23)$$

Свойство 6.3 (СВ6.3). Матричная функция от матрицы $f(A)$ сохраняет блочно-диагональную форму матрицы A в том смысле, что, если $A = \text{diag}\{A_1 A_2 \dots A_\mu\}$, то

$$f(A) = \text{diag}\{f(A_1) f(A_2) \dots f(A_\mu)\}. \quad (6.24)$$

Теперь распространим полученные результаты на задачи формирования способов аналитического представления и вычисления *матричной экспоненты* e^{At} , параметризованной непрерывным временем t , исходное задание которой в форме (6.1) порождено скалярной экспонентой $e^{\alpha t}$ или $\exp(\alpha t)$, записанной в форме бесконечного скалярного ряда

$$e^{\alpha t} = 1 + \alpha t + \frac{(\alpha t)^2}{2!} + \frac{(\alpha t)^3}{3!} + \dots + \frac{(\alpha t)^p}{p!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\alpha t)^k}{k!},$$

и принимает вид

$$e^{At} = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \dots + \frac{(At)^p}{p!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!}. \quad (6.25)$$

Следует заметить, что аналогичным образом может быть задана любая матричная функция от матрицы, для скалярного прототипа которой известен ряд ее представляющий.

В связи со сказанным и проведенными выше исследованиями, а также упомянутыми свойствами матричных функций от матриц, перечислим основные способы вычисления и построения аналитических представлений матричной экспоненты.

1. *Численный способ*, основанный на переходе от непрерывного времени t к дискретному k , выраженному в числе интервалов дискретности длительности Δt так, что $t = (\Delta t)k$, в результате чего матричная экспонента e^{At} получает представление

$$e^{At} = e^{A\Delta t k} = (e^{A\Delta t})^k = (\bar{A})^k, \quad (6.26)$$

где матрица $\bar{A} = e^{A\Delta t}$ при правильном выборе интервала дискретности Δt задается конечным числом $(p+1)$ членов степенного матричного представления

$$\bar{A} = e^{A\Delta t} = I + A\Delta t + \frac{1}{2!}(A\Delta t)^2 + \frac{1}{3!}(A\Delta t)^3 + \dots + \frac{1}{p!}(A\Delta t)^p. \quad (6.27)$$

При чем, если $p \geq n$, то с помощью (6.7) ряд (6.27) может быть приведен к *минимальной форме*, т.е. матричному ряду степени $m-1$, а в случае $\psi(\alpha) = D(\alpha)$ – к матричному ряду степени $n-1$. Для вычисления интервала дискретности Δt можно воспользоваться соотношением

$$\Delta t = 0.05n \left(|tr(A)| \right)^{-1}. \quad (6.28)$$

2. *Способ диагонализации* матрицы A , именуемый иначе способом собственных значений. Способ применим к матрицам A простой структуры так, что ее спектр собственных значений имеет вид $\sigma\{A\} = \{\lambda_i : \lambda_i \neq \lambda_j; i \neq j; Jm\lambda_i = 0; i = \overline{1, n}\}$, а потому оказывается спра-

ведливым матричное соотношение приведения подобия $MA = AM$, где $A = \text{diag}\{\lambda_i; i = \overline{1, n}\}$.

Тогда матричная экспонента принимает вид

$$e^{At} = M e^{At} M^{-1} = M \text{diag}\{e^{\lambda_i t}; i = \overline{1, n}\} M^{-1}, \quad (6.29)$$

где

$$M = \text{row}\{M_i = \xi_i = \arg(A\xi_i = \lambda_i\xi_i); i = \overline{1, n}\}, \quad (6.30)$$

то есть M – матрица собственных векторов матрицы A .

3. *Способ, основанный на приведении к нормальной форме Жордана* матрицы A . Способ применим к матрицам A , спектр собственных значений которых $\sigma\{A\} = \left\{ \lambda_i; i = \overline{1, r}; \sum_{i=1}^r m_i = n \right\}$ содержит r кратных соб-

ственных значений λ_i кратности m_i каждый. Для этого случая оказывается справедливым матричное соотношение приведения подобия $TJ = AT$, где

$$T = \text{row}\{T_i = [T_{i1} = \xi_i; T_{i2} = (A - \lambda_i I)^+ T_{i1} \dots T_{im_i} = (A - \lambda_i I)^+ T_{im_i - 1}]; i = \overline{1, r}\},$$

здесь ξ_i – собственный вектор матрицы A , соответствующий собственному значению λ_i : $\xi_i = \arg\{A\xi_i = \lambda_i\xi_i; i = \overline{1, r}\}$; $(*)^+$ – операция псевдообращения матрицы $(*)$.

$$J = \text{diag}\left\{ J_i = \begin{bmatrix} \lambda_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_i & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_i \end{bmatrix}; \sum_{i=1}^r m_i = n \right\}.$$

В результате для матричной экспоненты e^{At} можно записать $e^{At} = Te^{Jt}T^{-1}$, где матричная экспонента e^{Jt} имеет вид

$$e^{Jt} = \text{diag}\left\{ e^{J_i t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_i t} & \frac{te^{\lambda_i t}}{1!} & \frac{t^2 e^{\lambda_i t}}{2!} & \dots & \frac{t^{n-1} e^{\lambda_i t}}{(n-1)!} \\ 0 & e^{\lambda_i t} & \frac{te^{\lambda_i t}}{1!} & \dots & \frac{t^{n-2} e^{\lambda_i t}}{(n-2)!} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{te^{\lambda_i t}}{1!} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & e^{\lambda_i t} \end{bmatrix}; \sum_{i=1}^r m_i = n \right\}. \quad (6.31)$$

4. *Способ преобразования Лапласа* заключается в вычислении обратного преобразования Лапласа от резолвенты $(sI - A)^{-1}$ в форме

$$e^{At} = L^{-1}\{(sI - A)^{-1}\} \quad (6.32)$$

Способ поддерживается алгоритмом Фаддеева–Леверье разложения резолвенты без ее обращения на основе представления

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{\det(sI - A)} [\Delta(sI - A)]^T = \frac{s^{n-1}H_0 + s^{n-2}H_1 + \dots + H_{n-1}}{s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n},$$

где $(n \times n)$ – матрицы H_i ($i = \overline{0, n-1}$) и коэффициенты характеристического уравнения вычисляются с помощью рекуррентной процедуры алгоритма Фаддеева–Леверье:

$$\begin{aligned} H_0 &= I, & a_1 &= -tr(AH_0) \\ H_1 &= AH_0 + a_1I, & a_2 &= -tr(AH_1)/2 \\ &\dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \\ H_k &= AH_{k-1} + a_kI, & a_{k+1} &= -tr(AH_k)/k \end{aligned} \quad (6.33)$$

С использованием матриц H_k ($k = \overline{0, n-1}$) для резолвенты $(sI - A)^{-1}$ можно записать в форме

$$(sI - A)^{-1} = \frac{s^{n-1}}{D(s)}H_0 + \frac{s^{n-2}}{D(s)}H_1 + \dots + \frac{s}{D(s)}H_{n-2} + \frac{1}{D(s)}H_{n-1}. \quad (6.34)$$

Матричная экспонента (6.32) с использованием (6.34) получает представление

$$e^{At} = L^{-1} \left\{ \frac{s^{n-1}}{D(s)} \right\} H_0 + L^{-1} \left\{ \frac{s^{n-2}}{D(s)} \right\} H_1 + \dots + L^{-1} \left\{ \frac{1}{D(s)} \right\} H_{n-1}. \quad (6.35)$$

Запишем характеристический многочлен $D(s)$ в форме

$$D(s) = (s - \lambda_1)^{m_1} (s - \lambda_2)^{m_2} \dots (s - \lambda_r)^{m_r},$$

тогда становится справедливым представление

$$\frac{s^k}{D(s)} = \sum_{i=1}^r \left\{ \frac{\beta_{k1}}{s - \lambda_i} + \frac{\beta_{k2}}{(s - \lambda_i)^2} + \dots + \frac{\beta_{km_i}}{(s - \lambda_i)^{m_i}} \right\}; k = \overline{0, n-1}. \quad (6.36)$$

Тогда

$$L^{-1} \left\{ \frac{s^k}{D(s)} \right\} = \sum_{i=1}^r \left\{ \beta_{k1} + \beta_{k2}t + \frac{\beta_{k3}}{2!}t^2 + \dots + \frac{\beta_{km_i}}{(m_i - 1)!}t^{m_i-1} \right\} e^{\lambda_i t}; k = \overline{0, n-1}. \quad (6.37)$$

Подставляя (6.37) в (6.35) окончательно получим

$$e^{At} = \sum_{k=n-1}^0 H_{n-1-k} \left\{ \sum_{i=1}^r \left\{ \beta_{k1} + \beta_{k2}t + \dots + \frac{\beta_{km_i}}{(m_i - 1)!}t^{m_i-1} \right\} e^{\lambda_i t}; k = \overline{0, n-1} \right\}.$$

5. *Способ Лагранжа–Сильвестра.* Интерполяционный многочлен Лагранжа–Сильвестра в зависимости от свойств минимального многочлена $\psi(\alpha)$ определяется выражениями (6.11), (6.12), (6.16), которые

после замены функции $f(\lambda_i)$ на $e^{\lambda_i t}$, A на At , λ_i на $\lambda_i t$ дают представление матричной экспоненты e^{At} .

Примеры и задачи

6.1. Найти матричную экспоненту e^{At} способом, основанным на приведении к нормальной форме Жордана для матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -8 & -12 & -6 \end{bmatrix}.$$

6.2. Найти e^{At} методами собственных значений (диагонализации матрицы A) и с помощью преобразования Лапласа для матриц:

$$\text{а) } A = \begin{bmatrix} 8 & -8 & -2 \\ 4 & -3 & -2 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{б) } A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

6.3. Найти e^{At} методом собственных значений (диагонализации матрицы A) и с помощью преобразования Лапласа для матриц:

$$\text{а) } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \text{б) } A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix};$$

$$\text{в) } A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \text{г) } A = \begin{bmatrix} \sigma & \omega \\ -\omega & \sigma \end{bmatrix}.$$

6.4. Вычислить e^{At} любым методом для матриц примера 6.3.

6.5. Вычислить e^{At} численным методом для матриц:

$$\text{а) } A = \begin{bmatrix} 8 & -8 & -2 \\ 4 & -3 & -2 \\ 3 & -4 & 1 \end{bmatrix}; \quad \text{б) } A = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix};$$

$$\text{в) } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \text{г) } A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix};$$

$$\text{д) } A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

подготовив схему вычислений в соответствии с соотношениями (6.26), (6.27) и (6.28), положив в разложении матричной экспоненты $e^{A\Delta t}$

(6.28) $p = 4$ и построив его минимальное представление с использованием (6.7), полагая $\psi(\alpha) = D(\alpha)$.

6.6. При каких свойствах матриц A и B справедливо $e^A \cdot e^B = e^B \cdot e^A$?

6.7. Доказать справедливость следующих равенств:

а) $e^{A(t+\tau)} = e^{At} \cdot e^{A\tau}$

б) $e^{-At} = (e^{At})^{-1}$

в) $\frac{d}{dt} e^{At} = A e^{At} = e^{At} A$.

г) $e^{(A+B)t} = e^{At} \cdot e^{Bt}$, если $AB = BA$.

д) $\int_0^t e^{At} dt = A^{-1}(e^{At} - I) = (e^{At} - I)A^{-1}$ при $\det(A) \neq 0$.

Решение вариантов задач

Решение задачи 6.1. Характеристический многочлен $D(\alpha)$ матрицы A имеет вид $D(\alpha) = (\alpha + 2)^3$ так, что собственное значение $\lambda = -2$ характеризуется кратностью $m = n = 3$. В свою очередь характеристическая матрица $A - \lambda I = A + 2I$ обладает нуль-пространством $N\{A + 2I\}$ размерности $r_N = 1$, которому принадлежит один собственный вектор $\xi = (1, -2, 4)^T$. В связи со сказанным нормальная форма Жордана матрицы A принимает канонический вид (6.17) и записывается в форме

$$J = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}. \text{ Матрица } T \text{ отношения подобия } TJ = AT, \text{ так}$$

что $A = TJT^{-1}$, имеет представление

$$T = \begin{bmatrix} T_1 = \xi; T_2 = (A+2I)^+ T_1; T_3 = (A+2I)^+ T_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.8573 & 0.5442 \\ -2 & -0.7142 & -0.2314 \\ 4 & -0.5713 & -0.2517 \end{bmatrix}.$$

Тогда в силу свойства 6.2, а также представления (6.31) e^{Jt} искомая матричная экспонента e^{At} принимает вид

$$e^{At} = T e^{Jt} T^{-1} = T \begin{bmatrix} e^{-2t} & te^{-2t} & \frac{1}{2}t^2 e^{-2t} \\ 0 & e^{-2t} & te^{-2t} \\ 0 & 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} T^{-1} =$$

$$\begin{aligned}
&= T \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} e^{-2t} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} t e^{-2t} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{2} t^2 e^{-2t} \right\} T^{-1} = \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0.857 & 0.544 \\ -2 & -0.714 & -0.231 \\ 4 & -0.571 & -0.252 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} e^{-2t} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} t e^{-2t} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{2} t^2 e^{-2t} \right\} \\
&= \begin{bmatrix} 0.048 & -0.095 & 0.190 \\ -1.430 & -2.431 & -0.838 \\ 4.004 & 4.005 & 1.001 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} e^{-2t} + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -8 & -12 & -4 \end{bmatrix} t e^{-2t} + \begin{bmatrix} 4 & 4 & 1 \\ -8 & -8 & -2 \\ 16 & 16 & 4 \end{bmatrix} \frac{1}{2} t^2 e^{-2t} \right\}.
\end{aligned}$$

Поставленная задача решена.

7. МОДЕЛИ «ВХОД-СОСТОЯНИЕ-ВЫХОД» ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ

Определение 7.1. (О7.1) Динамическим объектом (объектом управления) называется восьмикомпонентный макровектор

$$\Sigma = \{U, X, Y, \Omega, \Gamma, T, \lambda, \delta\}, \quad (7.1)$$

где U – множество мгновенных значений r -мерных входных (управляющих) воздействий $U \subset R^r$; X – множество n -мерных состояний $X \subset R^n$; Y – множество мгновенных значений m -мерных выходов $Y \subset R^m$; T – множество моментов времени, образующих интервал управления и наблюдения; $\Omega = \{U \times T\}$ – множество допустимых входных воздействий; $\Gamma = \{Y \times T\}$ – множество выходных величин; $\lambda: X \times T \times U \times T \Rightarrow X$ – функция перехода объекта из некоторого предыдущего состояния x в момент $\tau \in T$ в последующее состояние x в момент t при помощи входного воздействия $U \times (\tau, t), (\tau, t) \in T$; $\delta: X \times T \times U \times T \Rightarrow Y$ – функция выхода объекта, которая определяет правило получения мгновенного значения выхода Y в момент $t \in T$ при переходе объекта из некоторого предыдущего состояния x в момент $\tau \in T$ под воздействием входного воздействия $U \times (\tau, t), (\tau, t) \in T$.

В дальнейшем будем пользоваться редуцированным определением динамического объекта, опуская описание множеств Ω и Γ , т.е. определять динамический объект как шестикомпонентный макровектор

$$\Sigma = \{U, X, Y, T, \lambda, \delta\}. \quad (7.2)$$

В зависимости от структуры множеств и функций λ и δ все динамические объекты делятся на непрерывные динамические объекты (НДО); дискретные динамические объекты (ДДО); динамические объекты над конечными полями Галуа (конечные автоматы).

Определение 7.2 (О7.2). *Непрерывные динамические объекты (НДО)* характеризуются бесконечностью множеств U, X и Y и непрерывностью множеств моментов времени управления и наблюдения, $T = \{t: t_0 \leq t \leq t_k\}$.

Функции перехода (λ) и выхода (δ) в непрерывных динамических объектах задаются в следующей форме:

$$\lambda: \dot{x}(t) = \lambda[x(t), u(t)], \quad (7.3)$$

$$\delta: y(t) = \delta[x(t), u(t)], \quad (7.4)$$

где $x \in X \subset R^n, u \in U \subset R^r, y \in Y \subset R^m, \dot{x}(t) = \frac{d}{dt}x(t)$.

Определение 7.3 (О7.3). *Дискретные динамические объекты*

(ДДО) характеризуются той же, что и в непрерывном случае, структурой множеств U, X и Y , но множество моментов времени управления и наблюдения T становится дискретным (счетным) так, что $T = \{t : t = t_0 + k\Delta t, k = \overline{1, N}\}$, где Δt есть интервал дискретности, $N = (t_k - t_0)/\Delta t$ – максимальное число дискретных моментов времени управления и наблюдения на T . Если время на интервале управления и наблюдения измерять в числе k интервалов дискретности Δt , то T может быть задано в форме

$$T = \{k : k = k_0 + i, i = \overline{0, N}\}.$$

Функции перехода λ и выхода δ в дискретных динамических объектах управления задаются в следующей форме:

$$\lambda : x(k+1) = \lambda[x(k), u(k)], \quad (7.5)$$

$$\delta : y(k) = \delta[x(k), u(k)]. \quad (7.6)$$

В выражениях (7.5) и (7.6) время t выражено в числе k интервалов дискретности длительности Δt или, что то же самое, в числе тактов управления (наблюдения).

Определение 7.4 (О7.4). *Конечные автоматы (КА).* Если мощности множеств входов U , состояний X и выходов Y конечны, а множество моментов времени управления и наблюдения дискретно (счетно) так, что выраженное в числе интервалов дискретности (тактов) оно записывается в виде $T = \{k : k = k_0 + i, i = \overline{0, N}\}$, то такой дискретный динамический объект называется *конечным автоматом (КА)*.

При этом векторные компоненты модельного представления КА

$$u = (u_1, u_2, \dots, u_r)^T \in U;$$

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in X;$$

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_m)^T \in Y,$$

характеризуются принадлежностью их элементов простому полю Галуа $GF(p)$

$$u_i, x_j, y_l \in GF(p) = \{0, \overline{p-1}\}, \quad i = \overline{1, r}, \quad j = \overline{1, n}, \quad l = \overline{1, m}.$$

В силу конечности простого поля Галуа мощности множеств U, X и Y также конечны и характеризуются значениями $[U] = p^r, [X] = p^n, [Y] = p^m$. В большинстве практических случаев характеристика p простого поля Галуа принимает значение $p=2$ так, что $GF(p) = GF(2) = \{0, 1\}$, при этом конечные автоматы становятся двоичными динамическими системами (ДДС), имеющими две реализационные версии: *нелинейные ДДС (НДДС)* и *линейные ДДС (ЛДДС)*.

В теории конечных автоматов векторы входа u , состояния x и выхода y принято называть кодовыми последовательностями, кодовыми словами или просто кодами: код входа u , код состояния x , код

выхода y .

Функции перехода и выхода λ и δ конечных автоматов формально задаются в виде (7.5)–(7.6):

$$\lambda : x(k+1) = \lambda[x(k), u(k)], \quad (7.7)$$

$$\delta : y(k) = \delta[x(k), u(k)]. \quad (7.8)$$

Аналитическое представление функций λ и δ в форме (7.7) и (7.8) при $p=2$ для НДДС – версии задается с использованием аппарата *булевых функций*, который опирается на исходное задание функций λ и δ в форме графов переходов и выходов автомата, а также их табличных аналогов. Аналитическое представление функций λ и δ в форме (7.7) и (7.8) при $p=2$ для ЛДДС – версии конструируется с использованием аппарата D - преобразования последовательностей над простым полем Галуа, позволяющего построить модельные представления в форме передаточных функций и векторно-матричных описаний «вход–состояние–выход» (ВСВ).

Если правила λ и δ в описании непрерывных или дискретных объектов представимы в виде композиции линейных операций сложения и умножения матриц на вектор, то такие НДО и ДДО являются *линейными*.

Так, для линейных непрерывных динамических объектов описание функций λ и δ принимает вид:

$$\lambda : \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t); \quad (7.9)$$

$$\delta : y(t) = Cx(t) + Du(t). \quad (7.10)$$

Для линейных дискретных динамических объектов векторно-матричное описание функций λ и δ записывается в форме:

$$\lambda : x(k+1) = Ax(k) + Bu(k); \quad (7.11)$$

$$\delta : y(k) = Cx(k) + Du(k). \quad (7.12)$$

где в (7.9)–(7.12): A – $(n \times n)$ – матрица состояния; B – $(n \times r)$ – матрица входа; C – $(m \times n)$ – матрица выхода; D – $(m \times r)$ – матрица передачи со входа на выход (матрица «вход–выход»). Следует заметить, что в большинстве физических объектов управление u является энергетически самой слабой переменной, в то время как выход объекта y требует заметных энергетических затрат, поэтому прямые связи со входа на выход, представленные матрицей D , чаще всего отсутствуют. В связи со сказанным в большинстве практических случаев матрица $D = 0$ и в дальнейшем при рассмотрении моделей объектов будет опускаться.

Очевидно, если в соответствии с (7.3)–(7.6) или (7.9)–(7.12) построить графы, используя для общего случая: 1) *интеграторы* для НДО и *элементы задержки* для ДДО; 2) нелинейные блоки $\lambda[x, u]$ и $\delta[x, u]$, а для линейного случая: 1) интеграторы для НДО и элементы задержки для ДДО; 2) линейные блоки в виде матричных усилителей и суммато-

ров, то получим графические представления непрерывных и дискретных динамических объектов в виде структурных схем.

Модели вида (7.3)÷(7.6) или в линейном случае (7.9)÷(7.12) носят название канонических моделей ВСВ динамических объектов. Для непрерывных объектов эта модель является *дифференциальной*, а для дискретных – *рекуррентной*.

Линейные модели состояния (7.9)–(7.12) непрерывных и дискретных динамических объектов характеризуют динамическое отношение «вход–состояние–выход», поэтому они позволяют построить модели «вход–выход» в виде передаточной матрицы, (i, j) -ый элемент которой представляет собой передаточную функцию сепаратного канала, связывающего i -ый выход $y_i(t)$ с j -ым входом $u_j(t)$.

Так, для *непрерывных линейных объектов* имеем передаточную матрицу

$$\Phi(s) = C(sI - A)^{-1}B; \quad \Phi(s): Y(s) = \Phi(s)U(s) \quad (7.13)$$

с передаточной функцией (i, j) -го сепаратного канала

$$\Phi_{ij}(s) \triangleq \frac{y_i(s)}{u_j(s)} = C^i (sI - A)^{-1} B_j; \quad (7.14)$$

Для *линейных дискретных объектов* управления соответственно можно записать

$$\Phi(z) = C(zI - A)^{-1}B; \quad \Phi(z): Y(z) = \Phi(z)U(z) \quad (7.15)$$

$$\Phi_{ij}(z) \triangleq \frac{y_i(z)}{u_j(z)} = C^i (zI - A)^{-1} B_j. \quad (7.16)$$

Здесь в (7.14) и (7.16) C^i – i -ая строка матрицы C , B_j – j -ый столбец матрицы B .

Рассмотрим линейный непрерывный динамический объект (ЛНДО), описываемый уравнениями (7.9)–(7.10), задающими модель ВСВ в *дифференциальной форме* с нулевой матрицей D :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0); \quad y(t) = Cx(t).$$

Поставим задачу – отыскать *интегральную форму* модели ВСВ ЛНДО

$$x(t) = x[x(0), u(t), t]; \quad y(t) = Cx(t).$$

Если воспользоваться *принципом суперпозиции*, который справедлив для линейных объектов, то можно записать

$$x(t) = x_{св}(t) + x_{в}(t),$$

где $x_{св}(t)$ – свободная составляющая движения, порожденная $x(0) \neq 0$, так что $x_{св}(t) = x[x(0), u(t) \equiv 0, t]$, $y_{св}(t) = Cx_{св}(t)$; $x_{в}(t)$ – вынужденная составляющая движения, порожденная $u(t) \neq 0$ так, что

$$x_{в}(t) = x[u(t), x(0) \equiv 0, t], \quad y_{в}(t) = Cx_{в}(t).$$

Для вычисления $x_{св}(t)$ положим в исходной модели $u(t) \equiv 0$ и получим однородное уравнение состояния $\dot{x} = Ax, x(0)$. Будем искать $x(t)$ в форме $x(t) = \Phi(t)x(0)$, где $\Phi(t) - (n \times n)$ – матрица, удовлетворяющая начальному условию $\Phi(0) = I$.

Подстановка $x(t)$ в исходное однородное уравнение дает матричное дифференциальное уравнение для отыскания матрицы $\Phi(t)$:

$$\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t) \quad \Phi(0) = I.$$

Решение для $\Phi(t)$ будем искать в виде $\Phi(t) = e^{At}\Phi(0) = e^{At}$. Прямая подстановка последнего выражения в матричное дифференциальное уравнение относительно $\Phi(t)$ приводит к тождеству

$$Ae^{At} = Ae^{At}.$$

Таким образом,

$$x_{св}(t) = \Phi(t)x(0) = e^{At}x(0),$$

$$y_{св}(t) = Cx_{св}(t) = C\Phi(t)x(0) = Ce^{At}x(0)$$

Для отыскания вынужденной составляющей движения в исходном уравнении положим $x(0) \equiv 0$, при этом будем искать составляющую в виде $x(t) = \Phi(t)z(t)$, где $z(t)$ – неизвестная *вектор-функция* со значениями из R^n . Если последнее выражение подставить в исходную модель ВСВ, то получим

$$\dot{\Phi}(t)z(t) + \Phi(t)\dot{z}(t) = A\Phi(t)z(t) + Bu(t).$$

Если теперь учесть, что $\dot{\Phi}(t) = A\Phi(t)$, то нетрудно для $z(t)$ получить векторно-матричное уравнение в дифференциальной форме

$$\dot{z}(t) = \Phi^{-1}(t)Bu(t)$$

и соответственно в интегральной форме

$$z(t) = \int_0^t \Phi^{-1}(\tau)Bu(\tau)d\tau,$$

что позволяет для вынужденной составляющей движения непрерывного линейного объекта управления записать

$$x_{в}(t) = \Phi(t)z(t) = \int_0^t \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)Bu(\tau)d\tau = \int_0^t \Phi(t, \tau)Bu(\tau)d\tau,$$

где $\Phi(t, \tau) \triangleq \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)$.

Для вынужденной составляющей $y_{в}(t)$ переменной выхода линейного непрерывного динамического объекта оказывается справедливым представление

$$y_{в}(t) = Cx_{в}(t) = \int_0^t C\Phi(t, \tau)Bu(\tau)d\tau.$$

Общий вид интегральной модели «вход–состояние–выход» линейного непрерывного динамического объекта принимает вид

$$x(t) = \Phi(t)x(0) + \int_0^t \Phi(t, \tau)Bu(\tau)d\tau,$$

$$y(t) = C\Phi(t)x(0) + \int_0^t C\Phi(t, \tau)Bu(\tau)d\tau,$$

где $\Phi(t) = e^{At}$, $\Phi(t, \tau) = \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau) = e^{A(t-\tau)}$.

Интегральная запись модели ВСВ ЛНДО позволяет ввести в рассмотрение три основные динамические матрицы линейного непрерывного объекта:

1. $\Phi(t)$ – фундаментальная матрица объекта
2. $\Phi(t, \tau) = \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)$ – переходная матрица объекта
3. $w(t) = C\Phi(t, 0)B = C\Phi(t)B$ – весовая матрица объекта

Отметим основные свойства переходной матрицы линейного динамического объекта $\Phi(t, \tau)$:

1. $\Phi(\tau, \tau) = \Phi(t, t) = \Phi(\tau)\Phi^{-1}(\tau) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t) = I$;
2. $\Phi(t, \tau) = \Phi(t, t_1)\Phi(t_1, \tau)$, $\forall t, t_1, \tau$;
3. $\det \Phi(t, \tau) \neq 0$, $\forall t, \tau$;
4. $\Phi(t, \tau): \dot{\Phi}(t, \tau) = A\Phi(t, \tau)$, $\Phi(\tau, \tau) = I$;
5. $\Phi^{-1}(t, \tau) = \Phi(\tau, t)$, $\forall t, \tau$;

матрица $\Phi^T(\tau, t)$ удовлетворяет сопряженному уравнению

$$\dot{\Phi}^T(\tau, t) = -A^T(t)\Phi^T(\tau, t), \quad \Phi^T(\tau, \tau) = I.$$

Очевидно, что ключевым моментом при изучении свойств интегральной модели «вход–состояние–выход» линейных непрерывных объектов является матричная экспонента e^{At} .

Интегральная форма записи модели ВСВ непрерывного объекта позволяет получить выражения для матриц состояния и входа рекуррентной модели «вход–состояние–выход» линейного дискретного объекта. Напомним содержательное отличие непрерывных и дискретных динамических объектов. Дискретный динамический объект реализует дискретную по времени с интервалом длительности Δt выборку из управляемых переменных по состоянию и выходу непрерывного динамического процесса. При этом переменные состояния между моментами выборки изменяются в соответствии с интегральной моделью состояния непрерывного объекта, переменные выхода изменяются по такому же закону, а переменные входа (управления) между моментами выборки фиксируются на уровне значений в предыдущий момент выборки.

Учитывая сказанное, используя интегральную запись модели ВСВ непрерывного динамического объекта, нетрудно получить связь между матрицами модели ВСВ *дискретного* и *непрерывного объектов* в форме

$$\bar{A} = \Phi(\Delta t) = e^{A\Delta t}, \bar{B} = \Phi(\Delta t) \int_0^{\Delta t} \Phi^{-1}(\tau) d\tau B, \bar{C} = C.$$

Здесь черточкой сверху отмечены матрицы дискретного динамического объекта.

Если в выражении для матрицы входа дискретного объекта осуществить интегрирование, то получим связь между матрицами ЛДДО и ЛНДО в виде

$$\bar{A} = e^{A\Delta t}, \bar{B} = \bar{A}[-A^{-1}e^{-A\tau} \Big|_0^{\Delta t}]B = (\bar{A} - I)A^{-1}B, \bar{C} = C.$$

Остановимся на *важных структурных свойствах* динамических объектов как непрерывных, так и дискретных, которые удалось установить специалистам по теории систем лишь при изучении моделей ВСВ этих объектов. Ниже ограничимся рассмотрением двух *базовых* структурных свойств объектов управления (ОУ): *управляемости* и *наблюдаемости*.

Определение 7.5 (О7.5). Объект с матрицами (A, B) называется *полностью управляемым*, если его можно из произвольного начального состояния $x_0 = x(t)|_{t=t_0}$ перевести за конечное время в произвольное конечное состояние $x_k = x(t)|_{t=t_k}$, применив *подходящим образом* выбранное *управляющее воздействие* (возможно, даже неограниченное).

Определение 7.6 (О.7.6). Объект с матрицами (A, C) называется *полностью наблюдаемым* на интервале наблюдения $T = \{t : t_0 \leq t \leq t_k\}$, если его состояние $x(t)$ может быть определено на основе наблюдений за выходом $y(t)$ (а возможно, и входом $u(t)$) в течение интервала наблюдения.

Приведенные определения *управляемости* и *наблюдаемости* носят общесистемный характер и построены без учета специфики объектов (непрерывный или дискретный). Ниже приводятся *критерии управляемости* и *наблюдаемости*, которые инвариантны относительно специфики динамических объектов.

Утверждение 7.1 (У7.1). (*Критерий управляемости 1 (КУ1)*) Объект с парой матриц (A, B) является полностью управляемым тогда и только тогда, когда *матрица управляемости объекта*, построенная в силу матричного соотношения

$$W_y = \begin{bmatrix} B \\ AB \\ \dots \\ A^{n-1}B \end{bmatrix} \quad (7.17)$$

имеет ранг, равный $n = \dim x$, т.е.

$$\text{rang } W_y = \dim x = n. \quad \square \quad (7.18)$$

Доказательство сформулированного утверждения проведем на примере дискретного объекта управления с использованием его *рекуррентного* модельного представления

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k); x(0). \quad (7.19)$$

Поставим задачу перевода дискретного ОУ (7.19) из произвольного ненулевого начального состояния $x(0)$ за $n = \dim x$ – интервалов дискретности (тактов управления) в желаемое конечное $x(n)$. Вычислим последовательность управляющих воздействий, образующих «стратегию управления», осуществляющих этот перевод. Для этой цели построим суммарную модель дискретного объекта, которая опирается на базу индукции, конструируемую на основе модели (7.19)

$$x(1) = Ax(0) + Bu(0); x(0);$$

$$x(2) = Ax(1) + Bu(1) = A^2x(0) + ABu(0) + Bu(1);$$

$$x(3) = Ax(2) + Bu(2) = A^3x(0) + A^2Bu(0) + ABu(1) + Bu(2);$$

⋮

$$x(k) = A^k x(0) + A^{k-1}Bu(0) + A^{k-2}Bu(1) + \dots + ABu(k-2) + Bu(k-1).$$

Запишем последнее выражение для $k = n$ в следующей форме, поменяв при этом порядок суммирования компонентов,

$$x(n) - A^n x(0) = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^T(n-1) \\ u^T(n-2) \\ \dots \\ u^T(0) \end{bmatrix}^T.$$

Разрешим полученное выражение относительно вектора «стратегии управления», осуществляющего перевод за n тактов ОУ из начального состояния $x(0)$ в желаемое конечное $x(n)$, в результате получим

$$\begin{bmatrix} u^T(n-1) \\ u^T(n-2) \\ \dots \\ u^T(0) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} B & AB & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix}^{-1} [x(n) - A^n x(0)].$$

Нетрудно видеть, что ключевым моментом, гарантирующим существование искомого управления является *обратимость матрицы*, которая имеет место только при выполнении условия (7.18). ■

Критерий управляемости 2 (КУ2). Пара матриц (A, B) является полностью управляемой тогда и только тогда, когда матрица

$$Q = W_y W_y^T \quad (7.20)$$

является положительно определенной, т.е. имеет все *строго* положительные собственные значения

$$\mu_{yi} > 0, \mu_{yi} \in \sigma\{Q\}, : \det(\mu_y I - Q) = 0; \quad i = \overline{1, n}.$$

Примечание 7.1 (ПР7.1). Критерий управляемости 2 обладает *содержательной геометрической прозрачностью*, состоящей в том, что, если вычисление собственных значений μ_{yi} матрицы Q (7.20) дополнить вычислением ее собственных векторов ζ_{yi} ($i = \overline{1, n}$), то появляется возможность пространство X^n состояний ОУ разбить на подпростран-

ства, натянутые на собственные вектора ζ_{yi} ($i = \overline{1, n}$). При этом подпространство *неуправляемости* объекта оказывается натянутым на собственные вектора матрицы Q , которые соответствуют нулевым (минимальным по величине) собственным значениям, а подпространство *наилучшей* управляемости совпадает с собственным вектором, которому соответствует наибольшее собственное значение.

Утверждение 7.2 (У7.2). (*Критерий наблюдаемости I (КН1)*). Объект с парой матриц (A, C) являются полностью наблюдаемым тогда и только тогда, когда *матрица наблюдаемости объекта*, построенная в силу матричного соотношения

$$W_n \stackrel{\Delta}{=} [C^T : A^T C^T : \dots : (A^T)^{n-1} C^T]^T \quad (7.21)$$

имеет ранг, равный n , т.е. $\text{rang} W_n = n = \dim x$. \square

Доказательство сформулированного утверждения проведем на примере непрерывного объекта с использованием его дифференциального модельного описания

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t); y(t) = x(t).$$

Для получения n условий для вычисления n -компонентного вектора состояния x по *результатам измерения* векторов выхода $y(t)$ и управления $u(t)$, а возможно и производных продифференцируем $(n-1)$ раз по времени вектор выхода $y(t)$, что породит следующий состав измерения

$$y(t) = Cx(t);$$

$$\dot{y}(t) = C\dot{x}(t) = CAx(t) + CBu(t);$$

$$\ddot{y}(t) = CA\dot{x}(t) + CB\dot{u}(t) = CA^2x(t) + CABu(t) + CB\dot{u}(t);$$

$$\ddot{\ddot{y}}(t) = CA^2\dot{x}(t) + CAB\dot{u}(t) + CB\ddot{u}(t) = \\ = CA^3x(t) + CA^2Bu(t) + CAB\dot{u}(t) + CB\ddot{u}(t) ;$$

\vdots

$$y^{(n-1)}(t) = CA^{(n-1)}x(t) + CA^{(n-2)}Bu(t) + \dots + CABu^{(n-1)}(t) + CBu^{(n-2)}(t)$$

Сформируем на основе полученных соотношений вектор измерений $z(t)$ в форме

$$z(t) = \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) - CBu(t) \\ \ddot{y}(t) - CABu(t) - CB\dot{u}(t) \\ \vdots \\ y^{(n-1)}(t) - CA^{(n-2)}Bu(t) - \dots - CABu^{(n-1)}(t) - CBu^{(n-2)}(t) \end{bmatrix}.$$

Вектор измерений $z(t)$ позволяет систему уравнений, построенных

на производных вектора выхода $y(t)$ и управления $u(t)$ привести к виду

$$z(t) = [C^T : A^T C^T : \dots : (A^T)^{n-1} C^T]^T x(t) = W_n x(t). \quad (7.22)$$

Уравнение (7.22) позволяет для искомого вектора $x(t)$ состояния объекта записать

$$x(t) = W_n^{-1} z(t). \quad (7.23)$$

Нетрудно видеть, что ключевым моментом, гарантирующим *восстановление* искомого вектора $x(t)$ состояния объекта является обратимость матрицы наблюдаемости W_n , которая имеет место только при выполнении условия $\text{rang} W_n = n = \dim x$. ■

Критерий наблюдаемости 2 (КН2). Пара матриц (A, C) является полностью наблюдаемой тогда и только тогда, когда матрица

$$P = W_n^T W_n \quad (7.23)$$

является положительно определенной ($P > 0$), т.е. имеет все *строго* положительные собственные значения.

Примечание 7.2 (ПР7.2). Критерий наблюдаемости 2 обладает *содержательной геометрической прозрачностью*, состоящей в том, что, если вычисление собственных значений матрицы P (7.23) дополнить вычислением ее собственных векторов, то появляется возможность пространство X^n состояний ОУ разбить на подпространства, натянутые на собственные вектора. При этом подпространство *ненаблюдаемости* объекта оказывается натянутым на собственные вектора матрицы P , которые соответствуют нулевым собственным значениям, а подпространство *наилучшей* наблюдаемости совпадает с собственным вектором, которому соответствует наибольшее собственное значение. Движение в подпространствах *ненаблюдаемости* не проектируются на выход объекта, а движение в подпространстве *наилучшей* наблюдаемости характеризуются максимальной нормой его проекции на выход.

Введение понятий *управляемости* и *наблюдаемости* позволяет представить исходный объект управления ОУ в виде объединения его структурных компонентов

$$OU = \{OU_y^H \cup OU_y^{HH} \cup OU_{ny}^H \cup OU_{ny}^{HH}\}. \quad (7.24)$$

В представлении (7.24), которое носит название *каноническое представление ОУ* Р.Калмана:

OU_y^H – полностью управляемая и наблюдаемая часть ОУ; OU_y^{HH} – полностью управляемая, но *ненаблюдаемая* часть ОУ; OU_{ny}^H – *неуправляемая*, но полностью наблюдаемая часть ОУ; OU_{ny}^{HH} – *неуправляемая* и *ненаблюдаемая* часть ОУ.

Следует заметить, что все модели «вход–выход» (ВВ) описывают поведение только полностью управляемой и наблюдаемой $OУ_y^H$ части ОУ при нулевом начальном состоянии объекта в целом. Таким образом модели ВВ оказываются модельно менее полными, чем модели «вход–состояние–выход» (ВСВ). Очевидно, размерность вектора состояния модельного компонента $OУ_y^H$ объекта меньше размерности объекта управления в целом, как следствие модель ВВ ОУ имеет меньшую размерность, чем модель ВСВ объекта. Аналитически редуцирование размерности модели ВВ происходит путем сокращения общих сомножителей полиномов числителя и знаменателя сепаратных передаточных функций ВВ.

Модели ВСВ предоставляют исследователю объектов управления и динамических систем, построенных на их основе, непрерывного и дискретного описаний хорошие технологические возможности конструирования моделей ВВ в виде дифференциальных (рекуррентных) уравнений отношения «вход–выход» (ДУВВ). Технологию конструирования моделей ДУВВ, опирающуюся на алгоритм Фаддеева–Леверье разложения резолвенты, проиллюстрируем на примере непрерывного линейного ОУ, задаваемого векторно-матричной моделью ВСВ в виде соотношений (7.9)–(7.10)

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t); y(t) = Cx(t) + Du(t). \quad (7.25)$$

Передаточная функция $\Phi(s) : Y(s) = \Phi(s)U(s)$ ОУ (7.25) имеет вид

$$\Phi(s) = C(sI - A)^{-1}B + D. \quad (7.26)$$

Воспользуемся представлением резолвенты $(sI - A)^{-1}$ в форме

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{\det(sI - A)} [\Delta(sI - A)]^T = \frac{s^{n-1}H_0 + s^{n-2}H_1 + \dots + H_{n-1}}{s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n},$$

где $(n \times n)$ – матрицы H_i ($i = \overline{0, n-1}$) и коэффициенты характеристического уравнения вычисляются с помощью рекуррентной процедуры алгоритма Фаддеева–Леверье (6.33). Приведенные соотношения позволяют уравнение «вход-выход» $Y(s) = \Phi(s)U(s)$ записать в форме

$$(s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n)Y(s) = \left\{ \begin{array}{l} C(s^{n-1}H_0 + s^{n-2}H_1 + \dots + H_{n-1})B + \\ + (s^n + a_1s^{n-1} + \dots + a_{n-1}s + a_n)D \end{array} \right\} U(s),$$

что на основе применения обратного преобразования Лапласа с учетом его свойств приводит к дифференциальному уравнению «вход-выход» с матричными коэффициентами относительно производных по времени векторных переменных $y(t)$ и $u(t)$:

$$y^n(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1} \dot{y}(t) + a_n y(t) = D u^n(t) + (CH_0 B + a_1 D) u^{(n-1)}(t) + \dots + (CH_{n-2} B + a_{n-1} D) \dot{u}(t) + (CH_{n-1} B + a_n D) u(t)$$

Если возникает необходимость составления дифференциального уравнения, связывающего i -й выход $y_i(t)$ с j -м входом $u_j(t)$, то для этого в левой части векторно-матричного дифференциального уравнения «вход-выход» в векторе выхода $y(t)$ следует выделить i -й элемент, в правой части в векторе входа $u(t)$ j -й элемент, а в матричных коэффициентах выделить (i, j) -ые компоненты, находящиеся на пересечении i -х строк и j -х столбцов.

Приведем теперь *алгоритм построения* (A, B, C, D) – модельного «вход–состояние–выход» – представления линейных непрерывных динамических объектов (ЛНДО) (7.9), (7.10) по их передаточным функциям (матрицам) $\Phi(s) = Y(s)U^{-1}(s)$ отношения «вход-выход».

АЛГОРИТМ 7.1 (А7.1)

построения векторно-матричного ВСВ–представления ЛНДО с использованием моделей ВВ в виде передаточной функции

1. Выбрать базис ВСВ–представления ЛНДО вида (7.9), (7.10):

- канонический фробениусов строчный (управляемый);
- канонический фробениусов столбцовый (наблюдаемый);
- физический.

2. В случае:

2.1. Канонического фробениусова управляемого и канонического фробениусова наблюдаемого базисов записать передаточную функцию ВВ $\Phi(s) = Y(s)U^{-1}(s)$ в форме отношения двух полиномов, построенных по положительным степеням переменной s

$$\Phi(s) \triangleq \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{\sum_{i=0}^m \bar{\alpha}_i s^{m-i}}{\sum_{j=0}^n \bar{\beta}_j s^{n-j}}, \quad \text{где } n > m; \quad (7.27)$$

2.2. Физического базиса записать передаточную функцию ВВ в виде произведения передаточных функций $\Phi_l(s)$ l -х последовательно соединенных функциональных компонентов таких как *исполнительный двигатель, усилительно–преобразовательное устройство, фильтр, корректирующее звено* и т.д., $\Phi(s) = \prod_l \Phi_l(s)$, после чего каждую передаточную функцию $\Phi_l(s)$ записать в форме (7.27).

3. Записать передаточную функцию (7.27) по отрицательным степеням s^{-1} переменной s , для чего числитель и знаменатель передаточной функции (7.27) разделить на член знаменателя $\bar{\beta}_0 s^n$, так что в зна-

менателе передаточной функции образуется свободный член равный единице, а передаточная функция (7.27) принимает вид

$$\Phi(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\sum_{i=0}^m \alpha_i s^{m-i-n}}{\sum_{j=0}^n \beta_j s^{-j}}, \quad (7.28)$$

где $\beta_0 = 1$; $\alpha_i = \bar{\alpha}_i \bar{\beta}_0^{-1}$; $\beta_j = \bar{\beta}_j \bar{\beta}_0^{-1}$.

4. Построить структурное модельное представление ЛНДО, описываемое передаточной функцией (ПФ) вида (7.28) с единичным свободным членом знаменателя, на основе использования правила Мейсона не касающихся контуров, в соответствии с которым передаточная функция имеет реализацию в форме n касающихся (вложенных в друг друга) замкнутых контуров, передаточные функции которых заданы мультипликативными структурами из постоянного коэффициента $(-\beta_j)$ и сомножителя (s^{-j}) знаменателя, а число прямых ветвей от входа к выходу структурной реализации ПФ (7.28) определяется числом ненулевых членов числителя с передаточными функциями $\alpha_i s^{m-i-n}$, количество которых не превосходит $m+1$.

5. Произвести разметку полученной в п.4 структурной реализации ПФ (7.28) с учетом того, что s^{-1} есть передаточная функция интегрирующего звена (интегратора); при разметке выходам интеграторов в определенном порядке приписать переменные состояния x_j ($j = \overline{1, n}$), а непосредственным входам интеграторов приписать переменную \dot{x}_j – производную по времени от переменной x_j .

6. Списать с размеченной в п.5 структурной реализации ПФ (7.28) матрицы A, B, C, D векторно-матричного ВСВ представления ЛНДО (7.9) и (7.10).

Примеры и задачи

7.1.* Построить структурное представление непрерывного объекта управления, описываемого функцией перехода λ и выхода δ вида:

$\lambda : \dot{x} = Ax + Bu$, $\delta : y = Cx$, где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\nu_3 \\ 1 & 0 & -\nu_2 \\ 0 & 1 & -\nu_1 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} \nu_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; C = [0 \quad 0 \quad 1].$$

С помощью критериев управляемости и наблюдаемости исследовать объект на управляемость и наблюдаемость, составить передаточ-

ную функцию (матрицу) объекта.

7.2. Построить структурные схемы непрерывных объектов управления, описываемых функциями перехода и выхода вида:

$$\text{а) } \lambda : \begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_1^2 + 3x_1u; \\ \dot{x}_2 = x_1x_2 + u^3; \end{cases} \quad \delta : y = x_1^2 + 2x_2 + u;$$

$$\text{б) } \lambda : \begin{cases} \dot{x}_1 = x_3; \\ \dot{x}_2 = x_2; \\ \dot{x}_3 = -100x_1 - 10x_2^2 - 5x_1x_2; \end{cases} \quad \delta : y = x_1 + 2x_2 + 15x_3^2;$$

$$\text{в) } \lambda : \begin{cases} \dot{x}_1 = -\alpha_1x_1 - (\sin \varphi_2)x_2 + (\sin \varphi_2)u_2 + (\cos \varphi_1)u_1; \\ \dot{x}_2 = (\sin \varphi_1)x_1 - \alpha_2x_2 + (\cos \varphi_2)u_2 - (\sin \varphi_1)u_1; \end{cases}$$

$$\delta : \begin{cases} y_1 = (\cos \varphi_1)x_1 + (\sin \varphi_2)x_2; \\ y_2 = (-\sin \varphi_1)x_1 + (\cos \varphi_2)x_2; \end{cases}$$

$$\text{г) } \lambda : \begin{cases} \dot{x}_1 = \eta_1x_2; \\ \dot{x}_2 = \alpha_2u - \beta_2|u|x_2 - \alpha_1x_1; \end{cases} \quad \delta : y = 10x_1$$

$$\text{д) } \lambda : \begin{cases} \dot{x}_1 = \eta_1x_2; \\ \dot{x}_2 = \beta_3x_3 + \beta_2|x_3|x_3 - \beta_1x_2 + \alpha_1u; \\ \dot{x}_3 = \alpha_2u - \beta_4x_1; \end{cases} \quad \delta : y = 0.1x_3;$$

$$\text{е) } \lambda : \dot{x} = Ax + Bu; \quad \delta : y = Cx; \text{ где}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\mathcal{G}_3 & -\mathcal{G}_2 & -\mathcal{G}_1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad C = [\mathcal{G}_3 \quad 0 \quad 0];$$

$$\text{ж) } \lambda : \dot{x} = Ax + Bu; \quad \delta : y = Cx;$$

где A, B из пункта е), а $C = [\mathcal{G}_3 \quad \mathcal{G}_2 \quad \mathcal{G}_1]$;

$$\text{з) } \lambda : \dot{x} = Ax + Bu; \quad \delta : y = Cx; \text{ где}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\mathcal{G}_3 \\ 1 & 0 & -\mathcal{G}_2 \\ 0 & 1 & -\mathcal{G}_1 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} \mathcal{G}_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad C = [0 \quad 0 \quad 1];$$

$$\text{и) } \lambda : \dot{x} = Ax + Bu; \quad \delta : y = Cx,$$

где A, C из пункта з), а $B = [\mathcal{G}_3 \quad \mathcal{G}_2 \quad \mathcal{G}_1]^T$;

$$\text{к) } \lambda : \dot{x} = Ax + Bu; \quad \delta : y = Cx + Du,$$

где A, B и C те же, что в пункте з), а $D = [\mathcal{G}_0]$.

$$\text{л) } \lambda : \dot{x} = Ax + Bu; \quad \delta : y = Cx; \text{ где}$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 15 & 12 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix};$$

м) $\lambda : \dot{x} = Ax + Bu; \quad \delta : y = Cx$; где

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & -2 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

н) $\lambda : \dot{x} = Ax + Bu; \quad \delta : y = Cx$; где

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 0 & 8 \end{bmatrix};$$

о) $\lambda : \dot{x} = Ax + Bu; \quad \delta : y = Cx$; где

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 2 & 7 \\ 4 & 5 \\ 6 & 3 \\ 8 & 1 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

7.3. Определить передаточные матрицы и функции отдельных каналов линейных непрерывных объектов, описываемых функциями перехода и выхода из 7.2: п.п. е) ÷ о)

7.4. Определить, управляемы и наблюдаемы ли объекты управления, а также управляемы и наблюдаемы ли они по каждому из входов и выходов (в случае $r > 1, m > 1$), если объекты описываются функциями перехода и выхода из п.п. е) ÷ о)

7.5. Построить модели состояния линейных непрерывных объектов в форме функций перехода λ и выхода δ по заданным передаточным матрицам (функциям) «вход–выход»:

а) $\Phi(s) = \frac{10}{s^3},$

б) $\Phi(s) = \frac{s + \beta}{s + \alpha},$

в) $\Phi(s) = \frac{\beta}{s^3 + \alpha_1 s^2 + \alpha_2 s + \alpha_3},$

г) $\Phi(s) = \frac{\beta_1 s + \beta_2}{s^3 + \alpha_1 s^2 + \alpha_2 s + \alpha_3},$

д) $\Phi(s) = \frac{\beta_1 s^2 + \beta_2 s + \beta_3}{s^3 + \alpha_1 s^2 + \alpha_2 s + \alpha_3},$

е) $\Phi(s) = \frac{\beta_1 s^3 + \beta_2 s^2 + \beta_3 s + \beta_4}{s^3 + \alpha_1 s^2 + \alpha_2 s + \alpha_3},$

ж) $\Phi(s) = \frac{\beta(s + \gamma)}{s(s + \alpha_1)(s + \alpha_2)},$

з) $\Phi(s) = \frac{\beta}{(s + \alpha_1)(s + \alpha_2)(s + \alpha_3)},$

$$\text{и) } \Phi(s) = \frac{\beta s + \gamma}{s(s + \alpha_1)(s + \alpha_2)}, \quad \text{к) } \Phi(s) = \begin{bmatrix} \frac{\beta_{11}}{s + \alpha_{11}} & -\beta_{12} \\ \beta_{21} & \frac{\beta_{22}}{s + \alpha_{22}} \end{bmatrix},$$

$$\text{л) } \Phi(s) = \begin{bmatrix} \frac{\beta_{11}}{s + \alpha_{11}} & \frac{\beta_{12}}{s} & \frac{\beta_{13}s + \beta_{13}^2}{s(s + \alpha_{13})} \\ -\beta_{21} & \frac{\beta_{22}^1 s + \beta_{22}^2}{s} & \frac{\beta_{23}}{s + \alpha_{23}} \end{bmatrix}.$$

7.6. Построить структурные схемы дискретных объектов управления, описываемых функциями перехода и выхода:

$$\text{а) } \lambda : \begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) + Tx_2(k) - \frac{1}{2}T^2u(k) \\ x_2(k+1) = x_2(k) + Tu(k) \end{cases} \quad \delta : y(k) = x_1(k),$$

$$\text{б) } \lambda : \begin{cases} x_1(k+1) = x_1(k) + Tx_2(k) + \frac{T^2}{2}x_3(k) + \frac{1}{6}T^3u(k) \\ x_2(k+1) = x_2(k) + Tx_3(k) + \frac{T^2}{2}u(k) \\ x_3(k+1) = x_3(k) + Tu(k) \end{cases} \quad \delta : y(k) = x_1(k),$$

$$\text{в) } \lambda : x(k+1) = Ax(k) + Bu(k); \delta : y(k) = Cx(k),$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0 \ 0].$$

$$\text{г) } \lambda : x(k+1) = Ax(k) + Bu(k); \delta : y(k) = Cx(k),$$

$$A = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.06 & 0 & 0 \\ -1.5 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0.9 & 0.6 \\ 0.02 & -0.004 & -1.5 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

7.7. Определить передаточные матрицы и функции дискретных объектов примеров 7.6

7.8. Построить модель ВСВ дискретных объектов, заданных передаточными функциями (матрицами):

$$\text{а) } \Phi(z) = \frac{\beta z + 1}{\alpha z + 1}; \quad \text{б) } \Phi(z) = \frac{\beta_1 z^2 + \beta_2 z + \beta_3}{z^3 + \alpha_1 z^2 + \alpha_2 z + \alpha_3};$$

$$в) \Phi(z) = \frac{\beta_1 z^{-2} + \beta_2 z^{-1} + \beta_3}{z^{-3} + \alpha_1 z^{-2} + \alpha_2 z^{-1} + \alpha_3}; \quad г) \Phi(z) = \begin{bmatrix} \frac{\beta_{11}}{z + \alpha_{11}} & \beta_{12} \\ 0 & \frac{\beta_{22}}{z + \alpha_{22}} \end{bmatrix}$$

7.9. Для значений интервалов дискретности 0.01 сек. и 0.1 сек. построить матрицы A, B, C дискретного описания непрерывных объектов из задачи 7.2.

Решение вариантов задач

Решение задачи 7.1. Запишем функции λ и δ в координатной форме:

$$\dot{x}_1 = 0x_1 + 0x_2 - \nu_3 x_3 + \nu_3 u$$

$$\dot{x}_2 = 1x_1 + 0x_2 - \nu_2 x_3$$

$$\dot{x}_3 = 0x_1 + 1x_2 - \nu_1 x_3$$

$$y = 0x_1 + 0x_2 + 1x_3$$

Для построения структурного представления объекта необходимы 3 интегратора, у которых входом j -го интегратора является переменная \dot{x}_j , представленная в виде линейной комбинации выходов интеграторов $x_i (j, i = \overline{1, n})$ и входного воздействия u , описываемой j -ой строкой функции перехода λ , при этом линейная комбинация формируется сумматором. Выход y объекта управления является линейной комбинацией составляющих вектора состояния, который формируется с помощью усилительных элементов с коэффициентами усиления, равными коэффициентам при соответствующих составляющих x_i вектора состояния x в функции выхода δ , и устройством суммирования.

Для оценки управляемости и наблюдаемости объекта составим матрицы управляемости W_y и наблюдаемости W_n в силу выражений (7.17) и (7.20):

$$W_y = [B \quad AB \quad A^2 B] = \begin{bmatrix} \nu_3 & 0 & 0 \\ 0 & \nu_3 & 0 \\ 0 & 0 & \nu_3 \end{bmatrix},$$

$$W_n = [C^T \quad A^T C^T \quad (A^T)^2 C^T]^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -\nu_1 \\ 1 & -\nu_1 & -\nu_1^2 - \nu_2 \end{bmatrix}.$$

В соответствие с критериями управляемости и наблюдаемости в первых формулировках объект управления является полностью управляемым и наблюдаемым, так как

$$\text{rang}(W_y) = 3 = \dim x, \text{rang}(W_n) = 3 = \dim x.$$

Для того, чтобы воспользоваться критериями управляемости и наблюдаемости во вторых формулировках (КУ2 и КН2) построим матрицы $Q = W_y W_y^T$ и $P = W_n^T W_n$, которые для рассматриваемого объекта управления принимают вид

$$Q = \begin{bmatrix} v_3^2 & 0 & 0 \\ 0 & v_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & v_3^2 \end{bmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & -v_1 & v_1^2 - v_2 \\ -v_1 & 1 + v_1^2 & -v_1 + v_1 v_2 - v_1^3 \\ v_1^2 - v_2 & -v_1 + v_1 v_2 - v_1^3 & 1 + v_1^2 + v_2^2 + v_1^4 - 2v_1^2 v_2 \end{bmatrix}.$$

Положительная определенность матрицы Q очевидна. Для оценки положительной определенности матрицы P воспользуемся критерием *Сильвестра положительной определенности* матриц:

Пусть произвольная квадратная матрица E имеет вид

$$E = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & \dots & E_{1n} \\ E_{21} & E_{21} & \dots & E_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ E_{n1} & E_{n2} & \dots & E_{nn} \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим определители подматриц (главные диагональные миноры) матрицы E

$$\Delta_1 = E_{11}; \quad \Delta_2 = \det \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} \\ E_{21} & E_{22} \end{bmatrix};$$

$$\Delta_k = \det \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & \dots & E_{1n} \\ E_{21} & E_{22} & \dots & E_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ E_{k1} & E_{k2} & \dots & E_{kn} \end{bmatrix}; k = \overline{1, n}.$$

Тогда критерий положительной определенности матрицы E состоит в выполнении условий

$$\Delta_1 > 0; \quad \Delta_2 > 0; \dots \Delta_k > 0, \quad k = \overline{1, n}.$$

Для матрицы $P = W_n^T W_n$ имеем

$$\Delta_1 = 1, \quad \Delta_2 = 1, \quad \Delta_3 = 1.$$

Таким образом, P – положительно определенная матрица.

Определим передаточную функцию (матрицу) «вход–выход» объекта. По определению передаточной функции (матрицы)

$$\begin{aligned}
\Phi(s) &= \frac{\Delta Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1} B = \frac{1}{\det(sI - A)} C [\text{adj}(sI - A)]^T B = \\
&= \frac{1}{s^3 + u_1 s^2 + u_2 s + u_3} [0 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} s^2 + u_1 s + u_2 & -u_3 & 1 - u_3 s \\ s + u_1 & s^2 + u_1 s & -u_2 s - u_3 \\ 1 & s & s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \\
&= \frac{1}{s^3 + u_1 s^2 + u_2 s + u_3} [1 \ s \ s^2] \begin{bmatrix} u_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{u_3}{s^3 + u_1 s^2 + u_2 s + u_3}.
\end{aligned}$$

Поставленные задачи решены.

8. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ «ВХОД-ВЫХОД» ОБЪЕКТОВ УПРАВЛЕНИЯ

Наиболее общими математическими моделями динамических объектов с сосредоточенными параметрами являются их дифференциальные или разностные уравнения «вход–выход» (ВВ), они исторически появились раньше моделей ВСВ, рассмотренных в предыдущем разделе. Как отмечено в предыдущем разделе модели типа ВВ описывают только полностью управляемую и наблюдаемую часть динамического объекта (системы).

По виду протекающих в них процессов преобразования сигналов объектов и их модели принято подразделять на непрерывные и дискретные.

Определение 8.1(О8.1). *Непрерывными* называют объекты, входные и выходные сигналы которых являются функциями непрерывно изменяющейся независимой переменной t .

Определение 8.2(О8.2). *Дискретными* называют объекты, входные и выходные сигналы которых являются функциями, определенными на конечном или счетном множестве значений переменной t , фиксируемые с интервалом дискретности по времени Δt так, что непрерывное время t и дискретное время k , выраженное в числе интервалов дискретности Δt , связаны соотношением $t = k(\Delta t)$.

Если объект является непрерывным и одномерным, то есть имеет один вход и один выход, то его динамика, в терминах «вход–выход» описывается обыкновенным дифференциальным уравнением n -го порядка:

$$F(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \dots, y; u^{(m)}, u^{(m-1)}, \dots, u; t) = 0, \quad (8.1)$$

где $u(t)$ – входной сигнал объекта, $y(t)$ – выходной сигнал объекта.

Решение уравнения (8.1), зависящее как от входного сигнала, так и от начальных условий содержит в рамках данной модели всю информацию о протекающих в объекте процессах.

Непосредственная линеаризация уравнения движения (8.1) относительно номинальной (опорной) траектории приводит к математической модели объекта в виде линейного дифференциального уравнения n -го порядка относительно отклонений входного и выходного сигналов объекта от их номинальных значений:

$$a_0(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_n(t)y = b_0(t)u^{(m)} + \dots + b_m(t)u \quad (8.2)$$

Выражение (8.2) называют уравнением в отклонениях или в вариациях; объекты, математические модели которых могут быть представлены в виде уравнения (8.2), называются *непрерывными линейными объектами*.

Если объект стационарный, то все коэффициенты уравнения (8.2)

$$y_k = \sum_{k=1}^n c_k e^{\lambda_k t}. \quad (8.8)$$

Если среди всех различных корней характеристического уравнения имеются пары комплексно-сопряженных корней $\alpha_k \pm j\beta_k$, тогда каждой паре корней соответствуют два линейно независимых вещественных частных решения $e^{\alpha_k t} \cos \beta_k t$ и $e^{\alpha_k t} \sin \beta_k t$. Каждому вещественному корню s_k уравнения (8.4), имеющему кратность q , соответствует ровно q линейно независимых частных решений следующего вида $e^{\lambda_k t}$, $t e^{\lambda_k t}$, ..., $t^{q-1} e^{\lambda_k t}$; каждой паре комплексно-сопряженных корней $\alpha_k \pm j\beta_k$ кратностью q соответствуют ровно $2q$ линейно независимых вещественных частных решения однородного уравнения:

$$\begin{aligned} e^{\alpha_k t} \cos \beta_k t, t e^{\alpha_k t} \cos \beta_k t, \dots, t^{q-1} e^{\alpha_k t} \cos \beta_k t; \\ e^{\alpha_k t} \sin \beta_k t, t e^{\alpha_k t} \sin \beta_k t, \dots, t^{q-1} e^{\alpha_k t} \sin \beta_k t. \end{aligned} \quad (8.9)$$

Свободное движение объекта обусловлено только ненулевыми начальными условиями и не зависит от входного сигнала объекта. Второе слагаемое в выражении (8.6) равно:

$$y_e(t) = \int_0^t w(t-\tau) u(\tau) d\tau, \quad (8.10)$$

где $w(t-\tau)$ – весовая функция объекта, представляющая собой реакцию объекта в момент времени t на воздействие в виде δ -функции, приложенное на его входе в момент времени τ при условии, что до момента приложения воздействия выходной сигнал и все его производные равны нулю, т.е. объект находится в состоянии равновесия. Весовая функция стационарного физически возможного объекта удовлетворяет условию $w(t-\tau)=0$ при $t < \tau$ и является его исчерпывающей характеристикой во временной области в рамках рассматриваемой модели.

Соотношение (8.10) определяет так называемое *вынужденное движение* объекта, которое представляет собой единственное частное решение уравнения (8.3), удовлетворяющее нулевым начальным условиям. Вынужденное движение полностью определяется характером входного сигнала и не зависит от начальных условий. При нулевых начальных условиях полное движение объекта равно его вынужденному движению.

Под *установившимся движением* объекта понимают значение $y(t)$ при $t \rightarrow \infty$ что эквивалентно тому, что входной сигнал $u(t)$ приложен к объекту при $t_0 \rightarrow -\infty$, т.е. установившееся движение описывается соотношением:

$$y(t) = \int_{-\infty}^t w(t-\tau) u(\tau) d\tau = \int_0^{\infty} w(\tau) u(t-\tau) d\tau. \quad (8.11)$$

Исчерпывающей характеристикой линейного непрерывного объекта в частотной области в рамках модели (8.3) является его передаточная функция $W(s)$, равная отношению изображений по Лапласу выходного сигнала к входному, которая может быть получена непосредственно по уравнению движения объекта (8.3) применением к обеим частям преобразования Лапласа при нулевых начальных условиях:

$$D(s)Y(s) = B(s)U(s), \quad (8.12)$$

где $U(s)$, $Y(s)$ – изображения по Лапласу соответственно входного и выходного сигналов; $D(s) = D(p)|_{p=s}$,

$$B(s) = B(p)|_{p=s}.$$

Из выражения (8.12) следует, что

$$W(s) = Y(s)/U(s) = B(s)/D(s). \quad (8.13)$$

Между весовой и передаточной функциями имеет место взаимно однозначное соответствие, устанавливаемое преобразованием Лапласа:

$$W(s) = \int_0^{\infty} w(t)e^{-st} dt; \quad w(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} W(s)e^{st} ds, \quad (8.14)$$

где c – абсцисса сходимости интеграла.

В частности, если все корни характеристического уравнения объекта являются различными, весовая функция определяется по передаточной функции следующим соотношением:

$$w(t - \tau) = \begin{cases} \sum_{k=1}^n \frac{B(\lambda_k)}{D'(\lambda_k)} e^{\lambda_k(t-\tau)}, & t \geq \tau \\ 0, & t < \tau \end{cases}. \quad (8.15)$$

Задача определения выходного сигнала объекта (8.3) при известном входном сигнале и заданных начальных условиях (8.5) может быть решена по следующей схеме:

1. Определяется общее решение соответствующего (8.3) однородного уравнения $D(p)y(t) = 0$:

$$y_k(t) = \sum_{k=1}^n c_k y_k(t). \quad (8.16)$$

2. По известным начальным условиям (8.5) составляется система уравнений (8.7), единственным образом определяющая постоянные c_1, c_2, \dots, c_n .

3. Найденные значения постоянных подставляются в выражение (8.16) и тем самым определяется свободное движение объекта.

4. С помощью соотношений (8.13) и (8.14), свойств преобразования Лапласа, таблицы оригиналов и их изображений находятся передаточная $W(s)$ и весовая $w(t)$ функции объекта.

5. По найденной весовой функции и известному входному сигналу $u(t)$ определяется вынужденная компонента движения:

$$y_e(t) = \int_0^t w(t - \tau)u(\tau)d\tau. \quad (8.17)$$

б. Находится полное движение объекта путем сложения его свободного и вынужденного движений.

Другим возможным способом решения данной задачи, не связанным с определением весовой функции, является операционный метод: к обеим частям уравнения (8.3) применяется преобразование Лапласа с учетом заданных начальных условий; полученное выражение разрешается относительно изображения выходного сигнала $Y(s)$, по которому с помощью свойств преобразования Лапласа, таблицы оригиналов и их изображений отыскивается искомый оригинал $y(t)$, представляющий собой решение задачи.

Исследование основных характеристик «вход–выход» дискретных моделей непрерывных объектов и характеристик дискретных объектов сводится к анализу соответствующих линеаризованных разностных уравнений, связывающий выборочные (дискретные) значения входного и выходного сигналов объекта. Разностное уравнение стационарной линейной дискретной модели может быть записано в следующем виде:

$$\begin{aligned} a_0 y(k+n) + a_1 y(k+n-1) + \dots + a_n y(k) = \\ = b_0 y(k+m) + b_1 y(k+m-1) + \dots + b_m u(k), \end{aligned} \quad (8.18)$$

где $u(k)$, $y(k)$ – выборочные значения входного и выходного сигналов соответственно; $k = 0, 1, 2, \dots$ – текущее дискретное время. Считается, что входной сигнал поступает на объект с момента времени $k = 0$, т.е. $u(k) = 0$, при $k < 0$.

Если ввести оператор опережения ξ , определяемый как $\xi y(k) = y(k+1)$, то уравнение (8.18) можно записать в следующем виде

$$D(\xi)y(k) = B(\xi)u(k), \quad (8.19)$$

где

$$D(\xi) = a_0 \xi^n + a_1 \xi^{n-1} + \dots + a_n; \quad B(\xi) = b_0 \xi^m + b_1 \xi^{m-1} + \dots + b_m.$$

Многочлен $D(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_{n-1} z + a_n$ называется *характеристическим многочленом*, уравнения $D(z) = 0$ – *характеристическим уравнением* дискретной модели (объекта). Степень характеристического многочлена $D(z)$ определяет порядок разностного уравнения (8.19) дискретной модели. Начальные условия, число которых равно порядку уравнения модели, определяются значениями выходного сигнала $y(k)$ в момент времени $k = 0, 1, \dots, n-1$:

$$y(0) = y_1^{(0)}, y(1) = y_0^{(1)}, \dots, y(n-1) = y_0^{(n-1)}. \quad (8.20)$$

Уравнения (8.18) и (8.19) могут рассматриваться как рекуррентные соотношения для вычисления текущего значения выходного сигнала по прошлым значениям входа и выхода модели.

Способы получения явных решений уравнения (8.18) дискретной модели полностью аналогичны рассмотренным методам для случая непрерывного времени. Общее решение соответствующего (8.18) однородного уравнения

$$a_0 y(k+n) + a_1 y(k+n-1) + \dots + a_n y(k) = 0, k = 0, 1, 2, \dots \quad (8.21)$$

равно

$$y_c(k) = \sum_{m=1}^n c_m y_m(k), \quad (8.22)$$

где $y_m(k)$, $m = \overline{1, n}$ – система n линейно независимых решений однородного уравнения (фундаментальная система решений): c_2, \dots, c_n – произвольные постоянные, определяемые по начальным условиям (8.20) из системы уравнений (8.8).

Если все корни r_m , $m = \overline{1, n}$ характеристического уравнения $D(r)=0$ различны и вещественны, то система n линейно независимых решений уравнения (8.21) имеет вид $y_m(k) = r_m^k$, $m = \overline{1, n}$; свободное движение (8.22) в этом случае равно

$$y_c(k) = \sum_{m=1}^n c_m r_m^k, k = 0, 1, \dots \quad (8.23)$$

Если среди различных корней характеристического уравнения имеются пары комплексно сопряженных корней $\rho_m e^{\pm j\varphi_m} = \rho_m (\cos \varphi_m \pm j \sin \varphi_m)$, соответствующие ей линейно независимые вещественные решения равны $\rho_m^k \cos k\varphi_m$ и $\rho_m^k \sin k\varphi_m$. Каждому вещественному корню r_m характеристического уравнения кратности q соответствует ровно q линейно независимых решения однородного уравнения следующего вида: $r_m^k, k r_m^k, \dots, k^{q-1} r_m^k$; каждой паре комплексно сопряженных корней $\rho_m e^{\pm j\varphi_m} = \rho_m (\cos \varphi_m \pm j \sin \varphi_m)$ кратности q соответствуют ровно $2q$ линейно независимых вещественных решения:

$$\rho_m^k \cos k\varphi_m, k \rho_m^k \cos k\varphi_m, \dots, k^{q-1} \rho_m^k \cos k\varphi_m; \rho_m^k \sin k\varphi_m, k \rho_m^k \sin k\varphi_m, \dots, k^{q-1} \rho_m^k \sin k\varphi_m$$

В случае простого нулевого корня характеристического уравнения трудностей не возникает, если считать $0^0 = 1$ и $0^k = \delta_{0,k}$, где $\delta_{o,k}$ –

$$\text{символ Кронекера, равный } \delta_{0,k} = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}.$$

Найденное таким образом общее решение (8.22) однородного уравнения (8.21) представляет собой *свободное движение* дискретной модели; это движение полностью определяется ненулевыми начальными

условиями (8.20) и не зависит от входного сигнала $u(k)$.

Частное решение неоднородного уравнения (8.18) может быть записано в следующем виде:

$$y_e(k) = \sum_{m=0}^k \omega(k-m)u(m), \quad k = 0, 1, \dots, \quad (8.24)$$

где $\omega(k-m)$ – дискретная весовая функция модели.

Выражение (8.24) является дискретным аналогом интегральной свертки (8.10) и представляет собой *вынужденную* составляющую движения, которая полностью определяется характером входного сигнала и не зависит от начальных условий.

Полное движение дискретной модели складывается из её свободного и вынужденного движений:

$$y(k) = \sum_{m=1}^n c_m y_m(k) + \sum_{j=0}^k \omega(k-j)u(j). \quad (8.25)$$

Исчерпывающей характеристикой линейной дискретной модели в частотной области (при нулевых начальных условиях) является её дискретная передаточная функция $W(z)$, равная отношению z -изображений выходного сигнала к входному, т.е.

$$W(z) = \frac{Y(z)}{U(z)}, \quad (8.26)$$

где $U(z) = \sum_{k=0}^{\infty} u(k)z^{-k}$, $Y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} y(k)z^{-k}$ – Z -преобразования входного и выходного сигналов соответственно.

Дискретная передаточная функция $W(z)$ может быть получена непосредственно по разностному уравнению (6.10) и определяется выражением, аналогичным соотношению (6.13):

$$W(z) = \frac{B(z)}{D(z)}. \quad (8.27)$$

Между весовой и передаточной функциями имеет место взаимно однозначное соответствие, устанавливаемое z -преобразованием:

$$W(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \omega(k)z^{-k}; \quad \omega(k) = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\Gamma} z^k W(z) \frac{dz}{z},$$

где Γ – замкнутый контур, охватывающий все полюсы функции $W(z)$.

В большинстве практических случаев интегрирование функции комплексного аргумента не используется и при отыскании оригиналов используется разложение функции $W(z)$ на табличные z – изображение с целью использования таблиц z -изображений и соответствующих им оригиналов.

В заключение сделаем полезное замечание. Передаточная функция, записанная в виде отношения двух полиномов, записанных по отрица-

тельными степенями s^{-1} или z^{-1} соответственно для непрерывных и дискретных систем с единичным свободным членом знаменателя, представляет собой решение графа, к которому может быть применено правило Мейсона не касающихся контуров в инверсной постановке. Суть инверсного использования правила Мейсона состоит в воссоздании класса графов с вложенными (касающимися) контурами минимальной размерности, эквивалентных в смысле решений этих графов в форме передаточной функции отношения «вход–выход». Построенный класс графов образует множество возможных структурных представлений динамических систем, исследуемых с использованием моделей «вход–выход».

Примеры и задачи

8.1.* Найти полное движение объекта $\ddot{y} + 9y = u(t)$, где $u(t) = 2\cos 3t$, начальные условия $y(0) = 2$, $\dot{y}(0) = 1$; определить весовую и передаточную функцию объекта.

8.2.* Найти полное движение дискретного объекта описываемого уравнением

$$y(k+2) + 3y(k+1) + 2y(k) = 2u(k+1) + u(k),$$

где

$$u(k) = \begin{cases} k & \text{при } k \geq 0 \\ 0 & \text{при } k < 0 \end{cases}, \quad y(0) = y(1) = 1.$$

8.3. Определить полное движение следующих объектов, описываемых уравнениями:

а) $\ddot{y} - 3\dot{y} + 2y = 1$, $y(0) = \dot{y}(0) = 0$.

б) $\ddot{y} + 4y = 2$, где:

1. $u(t) = \cos 2t$, $y(0) = \dot{y}(0) = 0$;

2. $u(t) = \cos 2t$, $y(0) = 1$; $\dot{y}(0) = 0$.

в) $\ddot{y} - 2\dot{y} + 5y = u(t)$, где $u(t) = e^t \cos 2t$, $y(0) = \dot{y}(0) = 0$.

г) $\ddot{y} - 3\dot{y} + 2y = u(t)$, где $u(t) = te^t$, $y(0) = 1$; $\dot{y}(0) = -2$.

д) $\ddot{y} + 2\dot{y} + 2y = 2\dot{u} + 2u$, где $u(t) = t$, $y(0) = 0$, $\dot{y}(0) = 1$.

е) $\ddot{y} - 3\dot{y} + 2y = u(t)$, где $u(t) = e^{2t}$, $y(0) = \dot{y}(0) = 0$.

ж) $\ddot{y} + 6\dot{y} + 9y = 9u$, где $u(t) = e^{3t}$, $y(0) = \dot{y}(0) = 0$.

8.4. Определить весовые функции следующих непрерывных объектов, описываемых уравнениями:

а) $\ddot{y} - 4\dot{y} + 5y = u$; б) $\ddot{y} + 4\dot{y} + 3y = \dot{u} + 2u$;

в) $\ddot{y} + 5\dot{y} + 6y = \dot{u} + u$.

8.5. Определить полное движение следующих дискретных объектов

описываемых уравнениями:

а) $y(k+2) + 2y(k+1) + y(k) = k(-1)^k$, где
 $y(0) = 1, y(1) = 0$.

б) $y(k+2) + 2y(k+1) + y(k) = u(k+1) + 2u(k)$, где

$$u(k) = \begin{cases} k, & k \geq 0 \\ 0, & k < 0, y(0) = 0, y(1) = 1. \end{cases}$$

Решение вариантов задач

Решение задачи 8.1

1. Корни характеристического уравнения $s^2 + 9 = 0$ равны: $s_1 = j3, s_2 = -j3$, поэтому общее решение однородного уравнения $\ddot{y} + 9y = 0$ равно

$$y_c(t) = c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t.$$

2. По известным начальным условиям задачи составляем систему уравнений (8.8) относительно постоянных интегрирования c_1 и c_2 , которая принимает вид

$$\begin{cases} c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 = -2 \\ -3c_1 \sin 0 + 3c_2 \cos 0 = 1 \end{cases}.$$

Отсюда получаем $c_1 = -2, c_2 = 1/3$.

3. Определяем свободное движение объекта, которое на основании общего решения однородного уравнения равно

$$y_c(t) = -2 \cos 3t + \frac{1}{3} \sin 3t.$$

4. Поскольку для данной задачи $D(p) = p^2 + 9, B(p) = 1$, то передаточная функция объекта согласно выражению (8.13) равна

$W(s) = \frac{1}{s^2 + 9}$. Весовая функция объекта определяется по найденной

передаточной функции соотношением (8.15) и равна

$$\omega(t - \tau) = \frac{1}{3} \sin 3(t - \tau) 1(t - \tau)$$

5. Вынужденная компонента движения в соответствии (8.10) определяется соотношением

$$y_s(t) = \int_0^t \frac{1}{3} \sin 3(t - \tau) 2 \cos 3\tau d\tau = \frac{1}{3} t \sin 3t.$$

6. Полное движение объекта, удовлетворяющее заданным условиям, равно

$$y(t) = \frac{1}{3} (t + 1) \sin 3t - 2 \cos 3t.$$

Решение задачи 8.2

1. Корни характеристического уравнения объекта $z^2 + 3z - 2 = 0$ равны $z_1 = -1$, $z_2 = -2$, поэтому общее решение соответствующего дискретному объекту однородного уравнения имеет вид $y_c(k) = c_1(-1)^k + c_2(-2)^k$.

2. Постоянные c_1 и c_2 определяются по заданным начальным условиям с помощью системы уравнений:

3. Подстановкой c_1 и c_2 в общее решение определяем свободное движение

$$y_c(k) = 3(-1)^k - 2(-2)^k.$$

4. Поскольку $D(\xi) = \xi^2 + 3\xi + 2$ и $B(\xi) = 2\xi + 1$, то дискретная передаточная функция объекта, согласно (8.27), равна $W(z) = \frac{2z + 1}{z^2 + 3z + 2}$.

Дискретная весовая функция объекта определяется по найденной передаточной функции с помощью обратного z -преобразования

$$\omega(k) = Z^{-1} \left\{ \frac{2z + 1}{z^2 + 3z + 2} \right\} = Z^{-1} \left\{ \frac{-1}{z + 1} + \frac{3}{z + 2} \right\}.$$

По таблицам z -преобразований находим

$$Z^{-1} \left\{ \frac{1}{z + a} \right\} = (-a)^{k-1} \cdot 1(k-1), \text{ что окончательно позволяет записать:}$$

$$\omega(m) = 1(m-1)[3(-2)^{m-1} + (-1)^m].$$

5. Вынужденное движение объекта определяется по формуле (8.24)

$$y_B(k) = \sum_{m=0}^k \omega(k-m)u(m) = \sum_{m=0}^k 1(k-m-1)[3(-2)^{k-m+1} + (-1)^{k-m}]m.$$

6. Полное движение дискретного объекта равно

$$y(k) = 3(-1)^k - 2(-2)^k + \sum_{m=0}^k 1(k-m-1)[3(-2)^{k-m+1} + (-1)^{k-m}]m.$$

9. ЛИНЕЙНЫЕ МАТРИЧНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Линейным матричным уравнением относительно $(n \times m)$ – матрицы M называется уравнение вида

$$R_1MS_1 + R_2MS_2 + \dots + R_kMS_k = U, \quad (9.1)$$

где $R_i - (v \times n)$ – матрицы $(i = \overline{1, k})$, $S_j - (m \times \mu)$ – матрицы $(j = \overline{1, k})$, $U - (v \times \mu)$ – матрица.

В большинстве практических случаев $v = \mu = m = n$. Ниже в основном рассматривается этот случай.

Общий способ решения линейных матричных уравнений (ЛМУ) вида (9.1) основан на приведении уравнения (9.1) к векторно-матричному уравнению

$$T\overline{M} = \overline{U} \quad (9.2)$$

с использованием кронекеровского произведения матриц, так что

$$T = R_1 \otimes S_1^T + R_2 \otimes S_2^T + \dots + R_k \otimes S_k^T, \quad (9.3)$$

где \otimes – символ кронекеровского произведения матриц, векторы \overline{M} и \overline{U} имеют структуру

$$\overline{M} = [M_1^T, M_2^T, \dots, M_n^T]^T, \quad \overline{U} = [U_1^T, U_2^T, \dots, U_n^T]^T, \quad (9.4)$$

M_i, U_i – i -й столбец соответственно матриц M и U , $(i = \overline{1, n})$. Векторно-матричное уравнение (9.2) с матрицей (9.3) и векторами (9.4) становится уравнением размерности n^2 . Решение уравнения (9.2) находится стандартным способом в форме

$$\overline{M} = T^{-1}\overline{U}. \quad (9.5)$$

Из полученного столбца далее формируется матрица

$$M = [M_1 : M_2 : \dots : M_n].$$

В прикладных задачах управления уравнение (9.1) чаще принимает вид

$$MS + RM = U. \quad (9.6)$$

Такое уравнение появляется всякий раз, когда на траекториях системы

$$\dot{x}(t) = Fx(t), \quad x(0), \quad \left\{ \dot{x}(t) = \frac{\Delta dx(t)}{dt} \right\} \quad (9.7)$$

изучается поведение функции состояния в виде квадратичной формы

$$V(x) = x^T Px \quad (P > 0)$$

с наперед заданным способом измерения скорости ее изменения как функции состояния

$$\dot{V}(x) = x^T Qx \quad (Q \geq 0).$$

Матрицы P и Q не независимы, и на траекториях устойчивой сис-

темы (9.7) должны удовлетворять матричному уравнению вида (9.6)

$$F^T P + PF = -Q, \quad (9.8)$$

которое именуется *уравнением Ляпунова*.

Такие же уравнения появляются, когда для объекта управления (ОУ), описываемого векторно-матричными уравнениями

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad y(t) = Cx(t), \quad (9.9)$$

где $A - (n \times n)$ – матрица состояния ОУ, $B - (n \times r)$ – матрица управления, $C - (m \times n)$ – матрица выхода, $x \in R^n$ – вектор состояния, $u \in R^r$ – вектор управления, $y \in R^m$ – вектор выхода; ищется закон управления по состоянию ОУ в виде линейной обратной связи с матрицей K $u(t) = -Kx(t)$ или строится специальное техническое устройство для оценки состояния ОУ по результатам измерения выхода объекта, реализующего векторно-матричное соотношение $x_e(t) = Mx(t)$, где $x_e(t)$ – оценка вектора $x(t)$ состояния ОУ.

В первом случае выражение (4.6) принимает вид

$$MG - AM = -BH, \quad (9.10)$$

где (G, H) полностью наблюдаемая пара матриц, задающая эталонную модель поведения ОУ с желаемыми свойствами в произвольном, удобном для вычислений базисе.

Во втором случае (9.6) принимает вид

$$MA - GM = HC, \quad (9.11)$$

где (G, H) полностью управляемая пара матриц, задающая желаемую динамику оценивающего устройства (оценщика, наблюдателя). Уравнения (9.10) и (9.11) называются *уравнениями Сильвестра*. Причем уравнения (9.10), (9.11) в силу наличия правой части являются неоднородными.

Подобное уравнение, но уже однородное, появляется при решении задачи преобразования базиса в эквивалентных формах

$$x = M\bar{x}, \quad \bar{x} = M^{-1}x,$$

где x вектор состояния в исходном базисе, \bar{x} – в базисе приведения, M – матрица преобразования базисов. В этом случае уравнение принимает вид

$$M\bar{A} - AM = 0. \quad (9.12)$$

Условием единственности решения матричного уравнения (9.6) при $U \neq 0$ является отсутствие пересечения спектров собственных значений матриц S и $-R$, т.е. $\sigma\{S\} \cap \sigma\{-R\} = \emptyset$. Напротив, условием нетривиальной разрешимости уравнения (9.6) при $U = 0$ является совпадение спектров собственных значений матриц S и R , т.е. выполнения равенства $\sigma\{S\} = \sigma\{-R\}$.

Рассмотрим способы решения матричного уравнения (9.6).

1^й способ (покоординатный или поэлементный)

При этом способе решения уравнения (9.6) строятся n^2 скалярных соотношений вида

$$M^i S_j + R^i M_j = U_{ij}, \quad (9.13)$$

где M^i, R^i – i -е строки матрицы M и R , S_j, M_j – j -е столбцы матриц S и M , U_{ij} – (i, j) -ый элемент матрицы U . В результате приведения подобных членов получается система, содержащая n^2 условий для n^2 неизвестных M_{ij} матрицы M , которая решается стандартными методами линейной алгебры.

2^й способ (с использованием кронекеровского произведения матриц).

Уравнение (4.6) легко приводится к уравнению вида (9.2), где матрица T принимает вид

$$T = I \otimes S^T + R \otimes I. \quad (9.14)$$

3^й способ (с использованием итеративной процедуры)

Рассмотрим матрицу $Z(t)$, определяемую решением дифференциального матричного уравнения

$$\dot{Z}(t) = RZ + ZS - U, \quad Z(0). \quad (9.15)$$

Прямой подстановкой в выражение (9.15) нетрудно убедиться, что решение уравнения имеет вид

$$Z(t) = e^{Rt} Z(0) e^{St} - \int_0^t e^{R\tau} U e^{S\tau} d\tau.$$

Если $\lim_{t \rightarrow \infty} e^{Rt} Z(0) e^{St} = 0$, то очевидно, что

$$M = \lim_{t \rightarrow \infty} Z(t) = - \int_0^{\infty} e^{R\tau} U e^{S\tau} d\tau. \quad (9.16)$$

Построим суммарное приближение интегрального выражения (9.16) в виде

$$\int_0^{\infty} e^{R\tau} U e^{S\tau} d\tau = \lim_{h \rightarrow 0} h \sum_{k=0}^{\infty} e^{Rhk} U e^{Shk}. \quad (9.17)$$

Если для матричных экспонент использовать аппроксимацию Е. Девисона:

$$e^{Rh} = \Gamma_R = [12I - 6hR + h^2 R^2]^{-1} [12I + 6hR + h^2 R^2]$$

$$e^{Sh} = \Gamma_S = [12I - 6hS + h^2 S^2]^{-1} [12I + 6hS + h^2 S^2],$$

то получим

$$e^{Rhk} = \Gamma_R^k, \quad e^{Shk} = \Gamma_S^k.$$

Для суммарного представления интеграла можно записать

$$\int_0^{\infty} e^{R\tau} U e^{S\tau} d\tau = \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k=0}^{\infty} h \Gamma_R^k U \Gamma_S^k .$$

Введем в рассмотрение частичную сумму

$$M(N) = - \sum_{k=0}^N h \Gamma_R^k U \Gamma_S^k = -h[U + \Gamma_R U \Gamma_S + \dots + \Gamma_R^N U \Gamma_S^N] .$$

На базе частичной суммы нетрудно построить рекуррентную процедуру

$$M(N+1) = M(N) - \Gamma_R^{N+1} (hU) \Gamma_S^{N+1}, \quad M(0) = -hU . \quad (9.18)$$

Тогда искомая матрица M найдется в результате предельного перехода

$$M = \lim_{N \rightarrow \infty} M(N)$$

Алгоритм решения уравнения (9.6) принимает следующий вид:

1) выбор шага дискретизации h из условия

$$h \leq \frac{\alpha}{|\lambda_{\max}|}, \quad \lambda_{\max} = \max_{i,j}(\lambda_i, \lambda_j),$$

где λ_i – собственные значения матрицы R ; λ_j – собственные значения матрицы S ; α – константа;

2) вычисление матриц Γ_R, Γ_S ;

3) вычисление матрицы $M(0) = -hU$;

4) для шагов рекуррентной процедуры $N = 1, 2, \dots$ вычисление матрицы

$$M(N+1) = M(N) - \Gamma_R^N [\Gamma_R^N (hU) \Gamma_S^N] \Gamma_S^N ;$$

5) правило останова рекуррентной процедуры

$$\|\Delta(N)\| = \|M(N+1) - M(N)\| \leq \varepsilon ,$$

где ε рекомендуется выбирать в пределах от 10^{-7} до 10^{-5} ; в качестве правила останова можно использовать условие

$$|tr \Delta(N)| = \left| \sum_{i=1}^n \Delta_{ii}(N) \right| \leq \varepsilon .$$

4^й способ (решение частного вида уравнения (4.6) в форме (4.12))

Рассмотрим случай, когда матрица \bar{A} представима в диагональной форме $\bar{A} = diag\{\lambda_i; i = \overline{1, n}\}$, где λ_i – собственные значения матрицы A , определяемые из решения характеристического уравнения

$$\det(\lambda I - A) = 0 . \quad (9.19)$$

Запишем уравнение (9.12) в столбцовой форме

$$[M_1 \ M_2 \ \dots \ M_n] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \lambda_n \end{bmatrix} = A[M_1 \ M_2 \ \dots \ M_n], \quad (9.20)$$

где M_i – i -й столбец искомой матрицы M , $i = \overline{1, n}$. Полученная столбцовая форма уравнения (9.12) позволяет для каждого столбца M_i записать

$$AM_i = \lambda_i M_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (9.21)$$

Из выражения (4.21) следует, что M_i – собственный вектор матрицы A , соответствующий i -му собственному значению λ_i этой матрицы. Таким образом, искомая матрица $M = [M_1 \ M_2 \ \dots \ M_n]$ – матрица *модального преобразования* построена на собственных векторах матрицы A . Из сказанного становится ясно, что решение матричного уравнения (9.12) не единственное, так что матрица \tilde{M} вида

$$\tilde{M} = M \operatorname{diag}\{\alpha_i; \alpha_i \in R, i = \overline{1, n}\}$$

также является решением уравнения (9.20), а, следовательно, и (9.12).

Пусть матрица A не диагонализируема, тогда матрица \bar{A} в уравнении (9.12) представима в жордановой форме

$$\bar{A} = \operatorname{diag}\{J_k, k = \overline{1, l}\} \quad (9.22)$$

где $J_k = J\{\lambda_k\}$ – k -я жорданова клетка, λ_k ($k = \overline{1, l}$) имеет кратность

$$v_k, \text{ так что } \sum_{k=1}^l v_k = n.$$

С учетом структуры жордановых клеток J_k из уравнения (9.22) получаем

$$AM_1 = \lambda_1 M_1,$$

$$AM_2 = \lambda_2 M_2 + M_1,$$

\vdots

$$AM_{i+1} = \lambda_j M_{i+1} + M_i, \quad j = \overline{1, l}; \quad i = \overline{1, n-1}.$$

Таким образом, матрица M в случае, когда матрица \bar{A} имеет жорданову форму, ищется с помощью рекуррентной процедуры

$$AM_1 = \lambda_1 M_1, \quad AM_{i+1} = \lambda_j M_{i+1} + M_i, \quad j = \overline{1, l}; \quad i = \overline{1, n-1}.$$

5^й способ (решение частного вида уравнения (9.6) в форме (9.10))

Рассмотрим случай, когда матрица Γ задается в диагональной форме $\Gamma = \operatorname{diag}\{\lambda_i; i = \overline{1, n}\}$. В этом случае столбцовая форма уравнения (4.10) $M\Gamma - AM = BH$ принимает вид

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} M_1 & M_2 & \dots & M_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} M_1 & M_2 & \dots & M_n \end{bmatrix}, \quad (9.23) \\
& = B \begin{bmatrix} H_1 & H_2 & \dots & H_n \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

где H_i – i -ый столбец матрицы H ($i = \overline{1, n}$). В силу представления уравнения (9.10) в форме (9.23) можно записать

$$\lambda_i M_i - A M_i = B H_i$$

или

$$M_i = (\lambda_i I - A)^{-1} B H_i, \quad i = \overline{1, n}.$$

Тогда искомая матрица M примет вид

$$M = [(\lambda_1 I - A)^{-1} B H_1 \vdots (\lambda_2 I - A)^{-1} B H_2 \vdots \dots \vdots (\lambda_n I - A)^{-1} B H_n]. \quad (9.24)$$

Из выражения (9.24) видно, что условие существования матрицы M сводится к условию существования матрицы $(\lambda_i I - A)^{-1}$, что выполняется, если $\lambda_i \notin \sigma\{A\}$, где λ_i – собственное значение матрицы A .

Пусть теперь матрица Γ не диагонализируема, тогда ее можно записать в канонической жордановой форме: $\Gamma = \text{diag}\{J_k\}$, где $J_k = J\{\lambda_k\}$ – k -ая жорданова клетка, λ_k ($k = \overline{1, e}$) имеет кратность ν_k так, что

$\sum_{k=1}^{\ell} \nu_k = n$. Тогда подобно предыдущему случаю для отыскания матри-

цы M будем иметь рекуррентную процедуру

$$M_1 = (\lambda_1 I - A)^{-1} B H_1, M_{i+1} = (\lambda_j I - A)^{-1} (B H_{i+1} - M_i), \quad j = \overline{1, k}; i = \overline{1, n-1}$$

6-й способ (решение частного вида уравнения (9.6) в форме (9.11))

Рассмотрим сначала случай, когда матрица Γ имеет диагональную форму, т.е. $\Gamma = \text{diag}\{\lambda_i, i = \overline{1, n}\}$. В этом случае уравнение (9.11)

$MA - \Gamma M = HC$ в строчной форме принимает вид

$$\begin{bmatrix} M^1 \\ M^2 \\ \vdots \\ M^n \end{bmatrix} A - \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} M = \begin{bmatrix} H^1 \\ H^2 \\ \vdots \\ H^n \end{bmatrix} C, \quad (9.25)$$

где M^i – i -я строка матрицы M ($i = \overline{1, n}$), H^i – i -я строка матрицы H ($i = \overline{1, n}$). Из матричного соотношения (9.25) можно записать

$$M^i (A - \lambda_i I) = H^i C,$$

откуда для M^i получим

$$M^i = H^i C(A - \lambda_i I)^{-1}. \quad (9.26)$$

В итоге искомая матрица M принимает вид

$$M = \begin{bmatrix} H^1 C(A - \lambda_1 I)^{-1} \\ H^2 C(A - \lambda_2 I)^{-1} \\ \vdots \\ H^n C(A - \lambda_n I)^{-1} \end{bmatrix}.$$

В случае, когда матрица Γ имеет каноническую жорданову форму $\Gamma = \text{diag}\{J_k, k = \overline{1, l}\}$, где $J_k = J\{\lambda_k\}$, λ_k ($k = \overline{1, l}$), имеет кратность ν_k так, что $\sum_{k=1}^l \nu_k = n$. Аналогично рассмотренному случаю получим рекуррентную процедуру, записанную в силу строчной структуры представления исходного уравнения (9.11) в обратном порядке:

$$M^n A - \lambda_\ell M^n = H^n C$$

$$M^{n-1} A - \lambda_{\ell-1} M^{n-1} = H^{n-1} C + M^n,$$

\vdots

$$M^{n-i} A - \lambda_j M^{n-i} = H^{n-i} C + M^{n-i+1}.$$

В итоге для элементов матрицы M имеем

$$M^n = H^n C(A - \lambda_\ell I)^{-1}$$

$$M^{n-i} = (H^{n-i} C + M^{n-i+1})(A - \lambda_j I)^{-1}; \quad i = \overline{1, n-1}; \quad j = \overline{1, l}.$$

Рассмотренные способы решения матричного уравнения Сильвестра не исчерпывают весь банк способов, с некоторыми из них можно ознакомиться в приводимой литературе. При этом необходимо отметить проблему вычислительной устойчивости рассмотренных матричных уравнений, которую можно проконтролировать с помощью $C\{MY\}$ – числа обусловленности «матричного уравнения», вычисляемого на примере матричного уравнения общего вида

$$PQ + QR = S \quad (9.27)$$

относительно матрицы Q в силу соотношения

$$C\{MY\} = \max_{i,j} \{\alpha_i(P) + \alpha_j(R)\} \left[\min_{i,j} \{\alpha_i(P) + \alpha_j(R)\} \right]^{-1}. \quad (9.28)$$

Примеры и задачи

9.1.* Определить, разрешимо ли матричное уравнение $MS + RM = U$ относительно матрицы M , если матрицы S , R и U принимают значения

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; S = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}; -R = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -7 \end{bmatrix}.$$

9.2. Определить, разрешимы ли матричные уравнения вида $MS + RM = U$ относительно матрицы M , а в случае разрешимости решить первым способом при:

а) $U = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; S = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}; R = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 10 & 7 \end{bmatrix};$

б) $U = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; S = \begin{bmatrix} -2 & 10 \\ 0 & -5 \end{bmatrix}; R = \begin{bmatrix} 0 & 10 \\ -1 & 7 \end{bmatrix};$

в) $U = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{bmatrix}; R = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 7 & -1 \end{bmatrix};$

г) $U = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}; S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & -7 \end{bmatrix}; R = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix};$

д) $U = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 10 \end{bmatrix}; S = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -8 & 9 \end{bmatrix}; R = \begin{bmatrix} 4 & 0,707 \\ 0,707 & 3 \end{bmatrix}.$

9.3. Решить матричное уравнение $MS + RM = U$, используя кронекеровское произведение матриц и приведение уравнения к векторно – матричному виду для матриц S, R и U из примеров а) - д) задачи 9.2.

9.4. Используя матричное уравнение (4.12), найти матрицы модального преобразования M , приводящие к диагональному виду следующие матрицы.

а) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix};$ б) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix};$ в) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & -2 \end{bmatrix};$

г) $\begin{bmatrix} -5 & 2 & -5 \\ -2 & -1 & -8 \\ 2 & -3 & -2 \end{bmatrix};$ д) $\begin{bmatrix} 6 & 3 & 8 \\ 3 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -4 \end{bmatrix};$ е) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & -2 \end{bmatrix};$

ж) $\begin{bmatrix} 2 & 5 & -6 \\ 4 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix};$ з) $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 4 & -6 & -4 \\ -1 & 4 & 7 \end{bmatrix};$ и) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 3 \\ -4 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$

9.5. Путем перестановки произвольных столбцов матрицы преобразования M убедиться, что в диагональных матрицах, подобных матрицам а) ÷ и) задачи 9.4, происходит согласованная с перестановкой столбцов перестановка собственных чисел на диагонали.

9.6. Найти матрицу преобразования подобия M для следующих пар подобных матриц:

$$\begin{array}{ll}
\text{а)} \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 9 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 38 & 81 \\ 16 & -34 \end{bmatrix}; & \text{б)} \begin{bmatrix} 17 & -6 \\ 45 & -16 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 14 & -60 \\ 3 & -13 \end{bmatrix} \\
\text{в)} \begin{bmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & -6 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 24 & -11 & -22 \\ 20 & -8 & -20 \\ 12 & -6 & -10 \end{bmatrix}; & \text{г)} \begin{bmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 2 & 6 & -10 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 & 20 & -34 \\ 6 & 32 & -51 \\ 4 & 20 & -32 \end{bmatrix} \\
\text{д)} \begin{bmatrix} 6 & 6 & -15 \\ 1 & 5 & -5 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 37 & -20 & -4 \\ 34 & -17 & -4 \\ 119 & -70 & -11 \end{bmatrix}; & \\
\text{е)} \begin{bmatrix} 4 & 6 & -15 \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 2 & -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -13 & -70 & 119 \\ -4 & -19 & 34 \\ -4 & -20 & 35 \end{bmatrix}; & \\
\text{ж)} \begin{bmatrix} 6 & 10 & -19 & 4 \\ 1 & 6 & -8 & 3 \\ 1 & 4 & -6 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 41 & -4 & -26 & -7 \\ 14 & -13 & -91 & -18 \\ 40 & -4 & -25 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. &
\end{array}$$

9.7. Используя формулу (9.24) для матрицы M , решить матричное уравнение (9.6) частного вида (9.10), где матрица Γ – диагональная матрица для следующих композиций спектра $\sigma\{\Gamma\}$ матрицы Γ и значений матриц A, B, H :

$$\text{а)} \sigma\{\Gamma\} = \{2, -5\}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -10 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad H = [1 \quad 1];$$

$$\text{б)} \sigma\{\Gamma\} = \{-3, -4\}, \quad A = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -10 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad H = [3 \quad 5];$$

$$\text{в)} \sigma\{\Gamma\} = \{-1, -2, -6\}, \quad A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad H = [4 \quad 5 \quad 6];$$

$$\text{г)} \sigma\{\Gamma\} = \{-2, -4, -6\}, \quad A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad H = [1 \quad 1 \quad 1];$$

$$\text{д)} \sigma\{\Gamma\} = \{-1, -3, -5\}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & -5 & -3 \\ -1 & -2 & -3 \\ 3 & 15 & 12 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$e) \sigma\{\Gamma\} = \{-3, -7, -11\}, A = \begin{bmatrix} 4 & -4 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ -4 & 4 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, H = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Решение вариантов задач

Решение задачи 9.1. Как указывалось в теоретической части, уравнение (9.6) при нулевой правой части имеет нетривиальное решение $M \neq 0$ в случае, если спектры матрицы S и $-R$ совпадают, т.е. $\sigma\{S\} = \sigma\{-R\}$. Таким образом, первым шагом решения задачи является установление факта совпадения спектров матриц S и $-R$. Характеристические уравнения матриц S и $-R$ принимают вид

$$\det(\lambda I - S) = \det \begin{bmatrix} \lambda + 5 & 0 \\ -4 & \lambda + 2 \end{bmatrix} = \lambda^2 + 7\lambda + 10 = 0,$$

$$\det(\lambda I + R) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 10 & \lambda + 7 \end{bmatrix} = \lambda^2 + 7\lambda + 10 = 0.$$

Из приведенных характеристических уравнений матриц S и $-R$ видно, что они идентичны, а, следовательно, спектры матриц совпадают. Таким образом, уравнение $MS + RM = 0$ имеет нетривиальное решение. Найдем матрицу M , используя первый, поэлементный способ. Уравнение $MS + RM = 0$ в поэлементной форме запишется:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 10 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Перемножив матрицы и сложив их поэлементно, получим матричное соотношение

$$\begin{bmatrix} -5m_{11} + 4m_{12} - m_{21} & -2m_{12} - m_{22} \\ 2m_{21} + 10m_{11} + 4m_{22} & 10m_{12} + 5m_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Если две матрицы равны, то равны их элементы с одинаковыми индексами, в силу чего для элементов матриц M получим систему скалярных соотношений

$$-5m_{11} + 4m_{12} - m_{21} = 0, \quad -2m_{12} - m_{22} = 0;$$

$$2m_{21} + 10m_{11} + 4m_{22} = 0, \quad 10m_{12} + 5m_{22} = 0.$$

Очевидно, что число линейно независимых условий в полученной системе только два. Воспользуемся первыми двумя соотношениями:

$$-5m_{11} + 4m_{12} - m_{21} = 0; \quad -2m_{12} - m_{22} = 0.$$

Система уравнений относительно элементов матрицы M оказалось недоопределенной, так как содержит два уравнения относительно четырех неизвестных. Зададим два недостающих условия, положив, к

примеру, $m_{11} = 1, m_{12} = 1$. Матрица M в результате принимает вид

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Матрица M^{-1} , обратная M , равняется $M^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$.

Покажем, что матрицы S и R , связанные друг с другом матричным уравнением (9.12), при известных матрицах M и M^{-1} могут быть найдены друг из друга с помощью отношений подобия:

$$S = -M^{-1}RM, R = -MSM^{-1}.$$

Действительно,

$$-M^{-1}RM = -\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 10 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = S$$

и, наоборот,

$$-MSM^{-1} = -\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 10 & 7 \end{bmatrix} = R.$$

В заключение заметим, что произвольность назначения двух элементов матрицы M не сказалось на выполнении соотношения подобия, т.е. на связи матрицы S и R . Положим теперь $m_{11} = 3$ и $m_{12} = 5$, в этом случае матрицы M и M^{-1} принимают вид

$$M = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & -10 \end{bmatrix} \quad M^{-1} = \begin{bmatrix} 2/11 & 1/11 \\ 1/11 & -3/55 \end{bmatrix}.$$

Используя соотношения подобия матриц S и $-R$, для последних получаем

$$-M^{-1}RM = -\begin{bmatrix} 2/11 & 1/11 \\ 1/11 & -3/55 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 10 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & -10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} = S,$$

$$-MSM^{-1} = -\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & -10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/11 & 1/11 \\ 1/11 & -3/55 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 10 & -7 \end{bmatrix} = R.$$

**10. ДИСКРЕТНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СИГНАЛОВ.
 БАЗИСНЫЕ ФУНКЦИИ.
 ТЕОРЕМА В. КОТЕЛЬНИКОВА–К. ШЕННОНА**

Проблема дискретного представления сигналов как элементов функционального пространства $x(t) \in L^2(T)$ имеет две *постановочные версии*.

В первой постановочной версии, именуемой *прямой задачей* дискретного представления сигналов, ставится задача сопоставления произвольного сигнала $X(t)$ с ограниченной энергией, т.е. $x(t) \in L^2(T)$ его дискретному численному представлению. Эта задача сводится к нахождению отображения пространства $L^2(T)$ в пространство $R^n(C^n)$, где n выбирается из соображений обеспечения допустимой погрешности представления.

Прямой подход к решению такой задачи состоит в выборе некоторого n -мерного подпространства $L^2(T)$, натянутого на систему линейно независимых функций, именуемых *базисными функциями* и образующих *функциональный базис*.

Если $\varphi_i(t), (i = \overline{1, n})$ – система *линейно независимых функций* в $L^2(T)$, то для $t \in T$ условие

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i(t) = 0 \tag{10.1}$$

выполняется почти всюду тогда и только тогда, когда $\alpha_i = 0, (i = \overline{1, n})$.

Введем в рассмотрение линейное подпространство L^n , натянутое на базисные функции $\varphi_i(t)$, т.е. $L^n = L\{\varphi_i(t)\}$. Тогда, если $x(t) \in L^n$, то он представим в виде линейной комбинации

$$x(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i(t), \quad t \in T = \{t : t_0 \leq t \leq t_k\}, \tag{10.2}$$

при этом набор коэффициентов $\alpha_i (i = \overline{1, n})$ образует вектор $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T \in R^n(C^n)$.

Напомним, что $L^2(T)$ есть пространство со *скалярным произведением*, определяемым выражением

$$(x, y) \triangleq \int_T x(t) y^*(t) dt. \tag{10.3}$$

Тогда искомое представление сигнала $x(t)$ в $R^n(C^n)$ в виде вектора $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)^T$ найдется из векторно-матричного соотношения, полученного из (10.2)–(10.3):

$$\begin{bmatrix} (\varphi_1, \varphi_1) & (\varphi_2, \varphi_1) & \cdots & (\varphi_n, \varphi_1) \\ (\varphi_1, \varphi_2) & (\varphi_2, \varphi_2) & \cdots & (\varphi_n, \varphi_2) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ (\varphi_1, \varphi_n) & (\varphi_2, \varphi_n) & \cdots & (\varphi_n, \varphi_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (x, \varphi_1) \\ (x, \varphi_2) \\ \vdots \\ (x, \varphi_n) \end{bmatrix} \quad (10.4)$$

или в свернутой форме:

$$G\alpha = \beta \Rightarrow \alpha = G^{-1}\beta, \quad (10.5)$$

где

$$\beta = \text{col}\{(x, \varphi_i); i = \overline{1, n}\}; \quad (10.6)$$

$$G = \text{row}\{\text{col}\{(\varphi_i, \varphi_j); i = \overline{1, n}\}; j = \overline{1, n}\}. \quad (10.7)$$

Матрица G , определенная в форме (10.7) называется *матрицей Грама*. Она может быть использована для оценки линейной зависимости системы функций $(\varphi_i, \varphi_j; i, j = \overline{1, n})$. Критерием линейной независимости функций φ_i и φ_j является положительность определителя матрицы Грама

$$\det G = \det\{(\varphi_i, \varphi_j); i, j = \overline{1, n}\} > 0.$$

Если $x(t) \notin L^n$, то для любого вектора $x(t) \in L^2(T)$ существует единственный вектор $\hat{x} \in L^n$, задаваемый представлением

$$\hat{x}(t) = \sum_{i=1}^n (x, \theta_i) \varphi_i(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \varphi_i(t), \quad (10.8)$$

причем такой, что:

вектор разности (невязка) $\eta = x - \hat{x}$ ортогонален всем векторам из L^n , в силу чего выполняется неравенство:

$\|\eta\| = \|x - \hat{x}\| < \|x - \tilde{x}\|$, где \tilde{x} – любой, но такой, что $\tilde{x} \neq \hat{x}$, вектор из L^n .

Очевидно, справедливо \hat{x} именовать ортогональной проекцией $x \in L^2(T)$ на L^n , $\eta = x - \hat{x}$ – вектором невязки, представляющим собой погрешность приближения x вектором \hat{x} .

Нетрудно видеть, что погрешность η представления элемента $x(t)$ в форме его проекции $\hat{x}(t)$ может быть охарактеризована ее абсолютной оценкой Δ_η и относительной оценкой δ_η , соответственно задаваемых выражениями

$$\Delta_\eta = \|\eta = x - \hat{x}\|; \quad \delta_\eta = \Delta_\eta / \|x\|.$$

Вернемся к выражению (8.8), в нем $\theta_i (i = \overline{1, n})$ – элементы взаимных базисных функций, которые представимы в виде линейной комбинации $\{\varphi_i\}$ так, что

$$\theta_k = \sum_{j=1}^n \gamma_{kj} \varphi_j(t), \quad (10.9)$$

причем

$$(\varphi_i, \theta_k) = \sum_{j=1}^n \gamma_{kj}^* (\varphi_i, \varphi_j) = \delta_{ij} \quad (10.10)$$

где δ_{ij} – символ Кронекера.

В матричной форме соотношение (10.10) записывается следующим образом:

$$\Gamma^* G = I \Rightarrow \Gamma = [G^{-1}]^*. \quad (10.11)$$

Тогда с использованием взаимного базиса $\{\theta_i, i = \overline{1, n}\}$ для α_i можно записать

$$\alpha_i = (x, \theta_i), i = \overline{1, n}. \quad (10.12)$$

Очевидно, как и в случае конечномерных линейных пространств, в качестве базиса предпочтительнее использовать систему *ортонормированных функций*.

Систем ортонормированных базисных функций достаточно много. Ниже приводятся наиболее употребительные из них.

1. Комплексные гармонические функции (базис Фурье)

Пусть $L^2(T): T = \{t: -T/2 \leq t \leq T/2\}$; тогда $\hat{x}(t) = \sum_{k=-n}^n \alpha_k e^{j\omega_k t}$,

где $\alpha_k = \frac{1}{T} \int x(t) e^{-j\omega_k t} dt$; $\varphi_k = e^{j\omega_k t}$, $\omega_k = k\omega$, $\omega = 2\pi/T$.

2. Полиномы Лежандра

$$T = \{t: -1 \leq t \leq 1\}$$

$$\varphi_0(t) = 1/\sqrt{2}; \varphi_1(t) = \sqrt{3/2} t; \varphi_2(t) = \sqrt{5/2} \left(\frac{3}{2} t^2 - \frac{1}{2} \right);$$

$$\varphi_3(t) = \sqrt{7/2} \left(\frac{5}{2} t^3 - \frac{3}{2} t \right); \varphi_4(t) = \sqrt{9/2} \left(\frac{35}{8} t^4 - \frac{15}{4} t^2 + \frac{3}{8} \right);$$

$$\varphi_n(t) = \sqrt{\frac{2n+1}{n}} P_n(t),$$

$P_n(t)$ – полином Лежандра, определяемый выражением

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n, \text{ или в рекуррентной форме:}$$

$$P_n(t) = \frac{2n-1}{n} t P_{n-1}(t) - \frac{n-1}{n} P_{n-2}(t).$$

3. Полиномы Чебышева

$T = \{t: -1 \leq t \leq 1\}$. В отличие от приведенных выше систем базисных функций полиномы Чебышева образуют систему ортонормированных функций с неединичным весом ($w \neq 1$), т.е.

$$(\varphi_i, \varphi_j)_\omega = \delta_{ij},$$

где

$$(\varphi_i, \varphi_j)_\omega \triangleq \int_T w(t) \varphi_i(t) \varphi_j^*(t) dt, \quad w(t) > 0.$$

Полиномы Чебышева характеризуются весом $w(t) = (1-t^2)^{-1/2}$, сами же функции $\varphi_n(t)$ строятся с помощью рекуррентной процедуры:

$$\varphi_n(t) = 2^n (2\pi)^{-1/2} T_n(t), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где $T_n(t)$ – полином Чебышева n -го порядка, определяемый соотношениями

$$T_0(t) = 1; \quad T_n(t) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos t), \quad n \geq 1.$$

4. Функции Лагерра

$$T = \{t: 0 \leq t < \infty\}; \quad w(t) = e^{-t};$$

$$\varphi_n(t) = \frac{1}{n!} L_n(t), \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

где $L_n(t)$ – полином Лагерра, определяемый соотношением

$$L_n(t) = e^t \frac{d^n}{dt^n} (t^n e^{-t});$$

или рекуррентно:

$$L_n(t) = (2n-1-t)L_{n-1}(t) - (n-1)^2 L_{n-2}(t).$$

5. Функции Эрмита

$$T = \{t: -\infty < t < \infty\}, \quad w(t) = e^{-t^2},$$

$$\varphi_n(t) = (2^n n! \pi^{1/2})^{-1/2} H_n(t), \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где $H_n(t)$ – полином Эрмита, определяемый соотношением

$$H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n} (e^{-t^2}),$$

или рекуррентно с помощью процедуры:

$$H_n(t) = 2tH_{n-1}(t) - 2(n-1)H_{n-2}(t).$$

6. Функции Уолша

$$T = \{t: 0 \leq t \leq 1\}, \quad \omega(t) = 1.$$

Для задания функции Уолша используют два *индекса*, т.е. базисная

функция $\varphi_n(t)$ записывается в форме $\varphi_n^k(t)$ с двумя индексами (n и k).
 Функции $\varphi_n^k(t)$ определяются соотношениями:

$$\varphi_0(t) = 1; \quad 0 \leq t \leq 1;$$

$$\varphi_1(t) = \begin{cases} 1; & 0 \leq t \leq 1/2 \\ -1; & 1/2 < t \leq 1; \end{cases}$$

$$\varphi_2^1(t) = \begin{cases} 1; & 0 \leq t < 1/4; \quad 3/4 < t < 1; \\ -1; & 1/2 < t < 3/4; \end{cases}$$

$$\varphi_2^2(t) = \begin{cases} 1; & 0 \leq t < 1/4; \quad 1/2 < t < 3/4; \\ -1; & 1/4 < t < 1/2; \quad 3/4 < t \leq 1 \end{cases}$$

.....

$$\varphi_{m+1}^{(2k-1)}(t) = \begin{cases} \varphi_m^{(k)}(2t); & 0 \leq t < 1/2; \\ (-1)^{k+1} \varphi_m^{(k)}(2t-1); & 1/2 < t \leq 1; \end{cases}$$

$$\varphi_{m+1}^{(2k)}(t) = \begin{cases} \varphi_m^{(k)}(2t); & 0 \leq t < 1/2; \\ (-1)^k \varphi_m^{(k)}(2t-1); & 1/2 < t \leq 1; \end{cases}$$

Во второй постановочной версии, именуемой *обратной задачей* дискретного представления сигналов рассматривается непрерывный сигнал $x(t)$, удовлетворяющий условиям Дирихле (ограниченность, кусочная непрерывность, наличие конечного числа разрывов первого рода и отсутствие разрывов второго рода). Сигнал $X(t)$ имеет ограниченный частотный Фурье-спектр $X(j\omega)$ в том смысле, что

$$X(j\omega) \neq 0 \text{ при } -\omega_m \leq \omega \leq \omega_m;$$

$$X(j\omega) = 0 \text{ при } |\omega| > \omega_m,$$

где $X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{j\omega t} dt = F\{X(t)\}$.

Построим дискретное представление сигнала $x(t)$ в форме

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \varphi_k(t), \tag{10.13}$$

в котором $\alpha_k = x(k\Delta t)$ – отсчеты непрерывной функции $x(t)$ в дискретные моменты времени $t = k\Delta t$.

Возникают естественные вопросы:

1. С каким интервалом дискретности Δt следует снимать отсчеты $x(k\Delta t)$?
2. Каковыми должны быть базисные функции $\varphi_k(t)$ в

представлении (10.13) с тем, чтобы невязка $\tilde{x}(t)$

$$\tilde{x}(t) = x(t) - \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \varphi_k(t) \quad (10.14)$$

этого представления обладала нормой $\|\tilde{x}(t)\|$ сколь угодно близкой к нулю?

На эти вопросы отвечает

Теорема В. Котельникова–К. Шеннона (ТКШ).

Пусть непрерывный сигнал $X(t)$ удовлетворяет условиям Дирихле так, что к нему может быть применено преобразование Фурье, и при этом обладает ограниченным частотным спектром $X(j\omega) \neq 0$ при $-\omega_m \leq \omega \leq \omega_m$; $X(j\omega) = 0$ при $|\omega| > \omega_m$.

Тогда дискретное представление сигнала (10.13) обладает нулевой невязкой (10.14), если

$$\Delta t = \frac{\pi}{\omega_m}; \varphi_k(t) = \frac{\sin[\omega_m(t - \Delta tk)]}{\omega_m(t - \Delta tk)}; \alpha_k = x(k\Delta t). \quad (10.15)$$

Доказательство.

В силу преобразуемости по Фурье для сигнала $x(t)$ оказываются справедливыми интегральные преобразования Фурье

$$F\{X(t)\} = X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt;$$

$$F^{-1}\{X(j\omega)\} = x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega)e^{j\omega t} dt.$$

Учтем ограниченность спектра $X(j\omega) \neq 0$ при $-\omega_m \leq \omega \leq \omega_m$; $X(j\omega) = 0$ при $|\omega| > \omega_m$, тогда для обратного интеграла Фурье получим представление

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_m}^{\omega_m} X(j\omega)e^{j\omega t} dt. \quad (10.16)$$

Но $X(j\omega)$ в силу ограниченности спектра представим бесконечным рядом по частоте, записываемым в форме

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j\Delta k \omega} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j(k \frac{\pi}{\omega_m})\omega}, \quad (10.17)$$

где $\Delta_k = k\Delta = k \frac{2\pi}{2\omega_m} = k \frac{\pi}{\omega_m}$.

Введем обозначение $\frac{\pi}{\omega_m} = \Delta t$, тогда становится справедливой за-

пись ряда (10.17) в форме

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{j(k\frac{\pi}{\omega_m})\omega} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\Delta t\omega}, \quad (10.18)$$

при этом коэффициенты ряда C_k вычисляются в силу соотношения

$$x(t) = \frac{1}{2\omega_m} \int_{-\omega_m}^{\omega_m} X(j\omega) e^{-jk\omega\Delta t} d\omega. \quad (10.19)$$

Сравнивая представления (10.16) и (10.19) нетрудно установить для моментов времени $t = k\Delta t$ выполнение равенства

$$C_k = \frac{\pi}{\omega_m} x(-k\Delta t). \quad (10.20)$$

Подставим выражение (10.20) в ряд Фурье (10.18)

$$X(j\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{jk\Delta t\omega} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{\omega_m} X(-k\Delta t) e^{jk\Delta t\omega}.$$

Если спектральную функцию $X(j\omega)$ исходного сигнала $x(t)$ полученного выше вида подставить в обратный интеграл Фурье (10.16), то для сигнала $x(t)$ получим представление

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_m}^{\omega_m} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_m}^{\omega_m} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\pi}{\omega_m} X(-k\Delta t) e^{jk\Delta t\omega} e^{j\omega t} d\omega.$$

Произведем в полученном выражении замену $k = -k$, тогда получим представление

$$x(t) = \frac{1}{2\omega_m} \int_{-\omega_m}^{\omega_m} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) e^{j\omega(t-k\Delta t)} d\omega = \frac{1}{2\omega_m} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) \int_{-\omega_m}^{\omega_m} e^{j\omega(t-k\Delta t)} d\omega.$$

Вычислим отдельно интеграл

$$\begin{aligned} \int_{-\omega_m}^{\omega_m} e^{j\omega(t-k\Delta t)} d\omega &= \frac{1}{j(t-k\Delta t)} e^{j(t-k\Delta t)\omega} \Big|_{-\omega_m}^{\omega_m} = \\ &= \frac{1}{j(t-k\Delta t)} \left\{ e^{j(t-k\Delta t)\omega_m} - e^{-j(t-k\Delta t)\omega_m} \right\} = \\ &= \frac{2}{(t-k\Delta t)} \frac{e^{j(t-k\Delta t)\omega_m} - e^{-j(t-k\Delta t)\omega_m}}{2j} = 2 \frac{\sin[(t-k\Delta t)\omega_m]}{(t-k\Delta t)\omega_m}. \end{aligned}$$

Подставим полученное представление интеграла в выражение для оригинала $x(t)$, тогда будем иметь

$$x(t) = \frac{1}{2\omega_m} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta t) 2 \frac{\sin[(t-k\Delta t)\omega_m]}{(t-k\Delta t)} =$$

$$= \sum_k^{\infty} x(k\Delta t) \frac{\sin[(t - k\Delta t)\omega_m]}{(t - k\Delta t)\omega_m} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \alpha_k \varphi_k,$$

$$\text{где } \alpha_k = x(k\Delta t); \varphi_k(t) = \frac{\sin[(t - k\Delta t)\omega_m]}{(t - k\Delta t)\omega_m}; \Delta t = \frac{\pi}{\omega_m} \quad \blacksquare$$

Примечание 10.1(ПР10.1).

Базисная функция $\varphi_k(t) = \frac{\sin[(t - k\Delta t)\omega_m]}{(t - k\Delta t)\omega_m}$ называется функцией

отсчета, она обладает свойствами:

1. при $t = k\Delta t$ функция отсчета $\varphi_k(t)$ в силу первого замечательного предела обладает максимумом, равным единице;

2. в моменты времени t кратные Δt , так что $t = \pm l(\Delta t)$ функция отсчета $\varphi_k(t)$ принимает нулевое значение;

3. на бесконечно большом интервале времени функции отсчета с различными индексами $\varphi_\nu(t)$ и $\varphi_\mu(t)$ ортогональны, так что система

базисных функций $\varphi_k(t) = \frac{\sin[(t - k\Delta t)\omega_m]}{(t - k\Delta t)\omega_m}$ является системой ортогональных базисных функций.

Примеры и задачи

10.1.* Построить конечномерную систему базисных функций $\{\varphi_i(t); i = \overline{1, n}; t \in T\}$ по следующим данным:

$$T = [0, 1]; n = 3; \quad \psi_1(t) = 1; \quad \psi_2(t) = t, \quad \psi_3(t) = t^2.$$

Определить C_{ij} ($i, j = \overline{1, 3}$), при которых функции $\varphi_i(t) = \sum_{j=1}^n C_{ij} \psi_j(t)$

образуют ортонормированный базис.

10.2. Построить конечномерные системы базисных функций $\{\varphi_i(t); i = \overline{1, n}; t \in T\}$ по следующим данным:

$$T = [0, 1]; \quad n = 3; \quad \psi_1(t) = 1; \quad \psi_2(t) = t; \quad \psi_3(t) = t^2.$$

Определить C_{ij} ($i, j = \overline{1, n}$), при которых функции $\varphi_i(t) = \sum_{j=1}^n C_{ij} \psi_j(t)$

образуют ортонормированный базис.

10.3. Решить задачу 10.2 для функций:

$$\psi_1(t) = 1; \quad \psi_2(t) = e^{-t}; \quad \psi_3(t) = e^{-2t}.$$

10.4. Решить задачу 10.2 для функций:

$$\psi_1(t) = 1; \quad \psi_2(t) = e^t; \quad \psi_3(t) = e^{2t}.$$

10.5. Дано $T = [-1, 1]$; $n = 3$; $\psi_1(t) = 1$; $\psi_2(t) = t$; $\psi_3(t) = t^2$. Определить C_{ij} ($i, j = \overline{1, n}$), при которых функции $\varphi_i(t) = \sum_{j=1}^n C_{ij} \psi_j(t)$ обра-

зуют ортонормированный базис. Проверить полученную систему функций на ортонормированность.

10.6. Решить задачу 10.5 для

$$\psi_1(t) = 1; \quad \psi_2(t) = e^{-t}; \quad \psi_3(t) = e^{-2t}.$$

10.7. Решить задачу 10.5. для

$$\psi_1(t) = 1; \quad \psi_2(t) = e^t; \quad \psi_3(t) = e^{2t}.$$

10.8. Дано $T = [0, 1]$; $n = 3$. Определить, образуют ли базисные системы следующие наборы функций:

а) $\varphi_1(t) = -1/3$; $\varphi_2(t) = 1 + 2t$; $\varphi_3(t) = 2 - \sqrt{2}t + 5t^2$;

б) $\varphi_1(t) = 3$; $\varphi_2(t) = 1 - 3e^{-t}$; $\varphi_3(t) = 1 + e^{-t} + e^{-2t}$;

в) $\varphi_1(t) = 10$; $\varphi_2(t) = 2 - e^t$; $\varphi_3(t) = 1 + 2e^t - 4t^{2t}$.

10.9. Определить, образуют ли ортонормированные функции $\varphi_i(t)$ примера 10.2 также ортонормированный базис на интервале $T = [0, 2]$.

10.10. Определить, образуют ли ортонормированные функции $\varphi_i(t)$ примера 10.5 и примера 10.6 ортонормированный базис на интервале $T = [-2, 2]$.

10.11. Дан интервал $T = [0, 1]$; $n = 3$; система функций: $\varphi_1(t) = 1$; $\varphi_2(t) = t$; $\varphi_3(t) = t^2$. Построить на функциях $\psi_i(t)$ ортонормированный базис с весом $w(t) = e^{-t}$.

10.12. Конечномерное представление сигналов $x(t) \in L^2(T)$. Дано $T = [0, \infty]$; $x(t) \in L^2(T)$; $x(t) = 1$ при $0 \leq t \leq 1$, $x(t) = 0$ при $1 < t < \infty$, а также система линейно-независимых функций: $\{\psi_i(t)\} = \{e^{-t}, e^{-2t}, e^{-3t}\}$.

Требуется найти:

а) конечномерное представление $\hat{x}(t) \in L^3$ сигнала $x \in L^2(T)$, где L^3 – подпространство, натянутое на $\psi_i(t)$;

б) конечномерное представление $\hat{x}(t) \in L^3$ сигнала $x \in L^2(T)$, где L^3 – подпространство, натянутое на $\varphi_i(t)$; систему ортонормированных функций, построенных на $\psi_i(t)$;

в) ошибку конечномерного представления $\|\eta\| = \left\| x(t) - \hat{x}(t) \right\|$;

Решить задачу 10.2 для L^3 , натянутого на систему линейно-

независимых функций: $\{\psi_i(t)\} = \{1, t, t^2\}$, $i = \overline{1,3}$.

10.13. Дано $T = [-1, 1]$; $x(t) \in L^2(T)$: $x(t) = -1$ при $-1 \leq t \leq 0$, $x(t) = 0$ при $0 < t \leq 1$. Найти конечномерное представление

$\hat{x}(t) \in L^3$ сигнала $x(t)$ и оценить норму ошибку представления

$$\|\eta\| = \left\| x(t) - \hat{x}(t) \right\|, \text{ где } L^3 \text{ натянуто на:}$$

- а) первые три базисные функции Фурье;
- б) первые три базисные функции Лежандра;
- в) первые три базисные функции Чебышева.

10.14. Дано $T = [-1, 1]$; $x(t) \in L^2(T)$; $x(t) = 1$ при $t \in T$ и $x(t) = 0$ при $t \notin T$. Найти конечномерное представление $\hat{x}(t) \in L^n$ сигнала

$x(t)$ и норму ошибки представления $\|\eta\| = \left\| x(t) - \hat{x}(t) \right\|$, натянутого

на базисные функции Фурье для случаев: 1) $n = 1$; 2) $n = 2$; 3) $n = 5$; 4) $n = 10$.

10.15. Решить задачу 10.14 для случая базисных функций Лежандра.

10.16. На основе решения задачи 10.14 и 10.15 построить графические зависимости $\|\eta\| = \left\| x(t) - \hat{x}(t) \right\| = f(n)$, где n – размерность пространства L^n для $n = 1, 2, 5, 10$.

$$10.17. \text{ Дано } T = [0, \infty), \quad x(t) \in L^2(T), \quad x(t) = \begin{cases} 2 & \text{при } 0 \leq t < 1, \\ 1 & \text{при } 1 \leq t < 2, \\ 0 & \text{при } 2 \leq t < \infty. \end{cases}$$

Найти конечномерное представление сигнала $\hat{x}(t) \in L^n$, где L^n натянуто на базисные функции Лагерра для:

- а) $n = 1$; б) $n = 2$; в) $n = 5$; г) $n = 10$.

$$10.18. \text{ Дано } T = [0, \infty), \quad x(t) \in L^2(T) \quad x(t) = \begin{cases} 2 & \text{при } 0 \leq t < 2 \\ 0 & \text{при } 2 \leq t < \infty \end{cases}$$

Найти конечномерное представление $\hat{x}(t) \in L^n$ сигнала $x(t)$, где L^n натянуто на базисные функции Лагерра для:

- а) $n = 1$; б) $n = 2$; в) $n = 5$; г) $n = 10$.

10.19. Решить задачу 10.18 для $x(t) \in L^2(T)$:

$$x(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{при } 2 \leq t < \infty \end{cases}$$

10.20. Для задач 10.17, 10.18 и 10.19 построить зависимости $\|\eta\| = \left\| x(t) - \hat{x}(t) \right\|$ как функции числа членов представления n , где $n = 1, 2, 5, 10$.

$$10.21. \quad \text{Дано } T = [0,1], \quad x(t) \in L^2(T), \quad x(t) = \begin{cases} -1 & \text{при } 0 \leq t < 1/3 \\ 0 & \text{при } 1/3 \leq t < 2/3 \\ 1 & \text{при } 2/3 \leq t < 1 \end{cases}$$

Найти конечномерное представление $\hat{x}(t) \in L^n$ сигнала $x(t)$ и норму ошибки представления $\|\eta\| = \left\| x(t) - \hat{x}(t) \right\|$, натянутого на базисные функции Уолша для:

$$\text{а) } n = 1; \quad \text{б) } n = 2; \quad \text{в) } n = 5; \quad \text{г) } n = 10.$$

Решение вариантов задач

Решение задачи 10.1. Чтобы построить ортонормированный базис на линейно-независимых базисных функциях $\psi_1(t) = 1, \psi_2(t) = t, \psi_3(t) = t^2$ для $T = [0,1]$, воспользуемся алгоритмом ортогонализации Грамма–Шмидта. В соответствии с этим алгоритмом получаем систему ортонормированных функций:

$$v_1(t) = \psi_1(t); \varphi_1(t) = \left\{ \|\psi_1(t)\| \right\}^{-1} v_1(t);$$

$$v_2(t) = \psi_2(t) - (\varphi_1, \psi_2) \varphi_1(t); \varphi_2(t) = \left\{ \|\psi_2(t)\| \right\}^{-1} v_2(t);$$

$$v_3(t) = \psi_3(t) - (\varphi_1, \psi_3) \varphi_1(t) - (\varphi_2, \psi_3) \varphi_2(t); \varphi_3(t) = \left\{ \|\psi_3(t)\| \right\}^{-1} v_3(t).$$

В итоге получаем:

$$1. \quad v_1(t) = \psi_1(t) = 1; \quad \|\psi_1(t)\| = 1; \quad \varphi_1(t) = \psi_1(t) = 1.$$

$$2. \quad (\varphi_1, \psi_2) = \int_T \varphi_1(t) \psi_2(t) dt = \int_0^1 t dt = 1/2;$$

$$v_2(t) = t - 1/2; \quad \|\psi_2(t)\| = \left[\int_T v_2^2(t) dt \right]^{1/2} = \left[\int_0^1 (t^2 - t + 1/4) dt \right]^{1/2} = \frac{1}{2\sqrt{3}};$$

$$\varphi_2(t) = \left\{ \|\psi_2(t)\| \right\}^{-1} v_2(t) = 2\sqrt{3}(t - 1/2).$$

$$3. \quad (\varphi_1, \psi_3) = \int_T \varphi_1(t) \psi_3(t) dt = \int_0^1 t^2 dt = 1/3;$$

$$(\varphi_2, \psi_3) = \int_T \varphi_2(t) \psi_3(t) dt = \int_0^1 2\sqrt{3}(t^3 - \frac{1}{2}t^2) dt = \frac{\sqrt{3}}{6};$$

$$v_3(t) = t^2 - t + 1/6; \quad \|v_3(t)\| = \left[\int_0^1 (t^2 - t + 1/6)^2 dt \right]^{1/2} = 0,255;$$

$$\varphi_3(t) = \{ \|v_3(t)\| \}^{-1} v_3(t) = 0,6536 - 3,922t + 3,922t^2.$$

Проверим на ортогональность пары построенных функций

$(\varphi_1, \varphi_2), (\varphi_1, \varphi_3), (\varphi_2, \varphi_3)$:

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \int_0^1 2\sqrt{3}(t - 1/2) dt = 2\sqrt{3} \left(\frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{2}t \right) \Big|_0^1 = 0;$$

$$(\varphi_1, \varphi_3) = \int_0^1 (0,6536 - 3,922t + 3,922t^2) dt = 0;$$

$$(\varphi_2, \varphi_3) = \int_0^1 2\sqrt{3}(t - 1/2)(0,6536 - 3,922t + 3,922t^2) dt = 0.$$

В итоге решения задачи получена система ортонормированных на $T = [0, 1]$ функций:

$$\varphi_1(t) = 1; \quad \varphi_2(t) = 2\sqrt{3}(t - 1/2); \quad \varphi_3(t) = 0,6536 - 3,922t + 3,922t^2.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Акунова А., Баячорова Б.Ж., Ушаков А.В., Хабалов В.В. Математические основы теории информационных систем в управлении / Под ред. А.В. Ушакова. – Бишкек: Салам, 2003.
2. Акунова А., Акунов Т.А., Ушаков А.В. Оценка колебательности управляемых процессов в многомерных системах с помощью числа обусловленности решения матричного уравнения Ляпунова // Автоматика и телемеханика, 1994, №4.
3. Алгебраические методы в теории устройств дискретной автоматике и телемеханики: Труды лаборатории телемеханики СПбГИТМО(ТУ). / Под ред. А.В. Ушакова. – СПб: СПбГИТМО (ТУ), 2001.
4. Андреев Ю. Н. Управление конечномерными линейными объектами. М.: Наука, 1976.
5. Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л. Элементы математического моделирования в программных средах MATLAB 5 и Scilab. – СПб: Наука, 2001.
6. Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. – М.: Наука, 1984.
7. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1973.
8. Голуб Дж., Ван Лоун Ч. Матричные вычисления: Пер. с англ. – М.: Мир, 1999.
9. Григорьев В.В., Дроздов В.Н., Лаврентьев В.В., Ушаков А.В. Синтез дискретных регуляторов при помощи ЭВМ. – Л.: Машиностроение, 1983.
10. Деч Г. Руководство по практическому применению преобразования Лапласа и z-преобразования. – М.: Наука, 1971.
11. Дьяконов В.П. MATLAB 6/6.1/6.5 + Simulink 4/5. Основы применения. Полное руководство пользователя. – М.: Солон-Пресс, 2002.
12. Зубов В.И. Лекции по теории управления. – М.: Наука, 1975.
13. Калужнин А.А. Введение в общую алгебру. – М.: Наука, 1973.
14. Ланкастер П. Теория матриц. – М.: Наука, 1982.
15. Левин Б.Р., Шварц В. Вероятностные модели и методы в системах связи и управления. М.: Радио и связь, 1985.
16. Матричные уравнения в задачах управления и наблюдения непрерывными объектами / Т.А. Акунов, С. Алишеров, Р.О. Оморов, А.В. Ушаков; Под ред. А.В. Ушакова. – Бишкек: Илим, 1991.
17. Матричные уравнения в исследовании дискретных процессов над бесконечными и конечными полями / Т.А. Акунов, С. Алишеров, Р.О., Оморов, А.В. Ушаков./ Под ред. А.В. Ушакова. – Бишкек: Илим, 1993.

18. Модальные оценки качества процессов в линейных многомерных системах / Т.А. Акунов, С. Алишеров, Р.О. Оморов, А.В. Ушаков. / Под ред. А.В. Ушакова. – Бишкек: Илим, 1991.
19. Мороз А.И. Курс теории систем. – М.: Высшая школа, 1987.
20. Никифоров В.О., Ушаков А.В. Управление в условиях неопределенности: чувствительность, адаптация, робастность. – СПб: СПбГИТМО (ТУ), 2002.
21. Никифорова Л.Т., Ушаков А.В., Хабалов В.В. Теоретические основы кибернетики. Учебное пособие. – Л.: ЛИТМО, 1984.
22. Основы математического моделирования с примерами на языке MATLAB. Изд. 2-е, доп.: Учебное пособие / Д.Л. Егоренков, А.Л. Фрадков, В.Ю. Харламов; Под ред. А.Л. Фрадкова; БГТУ. СПб; 1996.
23. Синтез дискретных регуляторов при помощи ЭВМ / В.В. Григорьев, В.Н. Дроздов, В.В. Лаврентьев, А.В. Ушаков. – Л.: Машиностроение, Ленингр. отд-ние, 1983.
24. Тарасик В.П. Математическое моделирование технических систем. / Учебник. Минск: Дизайн ПРО. 2004.
25. Френкс Л. Теория сигналов. – М.: Сов. Радио, 1974.
26. Van Loan C.F. Introduction to Scientific Computing, A Matrix-Vector Approach Using MATLAB, Prentice Hall, 2000.
27. <http://www.mathworks.com>

ПРИЛОЖЕНИЕ. Сведения о пакете MATLAB 6.5

В краткой форме приводится описание команд новейшей версии 6.5 системы MATLAB, появившейся с конца 2000 года и ставшей мировым лидером среди систем компьютерной математики. Полное описание системы составляет более 500 страниц. Система характеризуется высочайшей степенью визуализации результатов работы и служит мощной операционной средой для применения многочисленных пакетов расширения по новейшим направлениям науки и техники. В настоящее время MATLAB фактически стал международным стандартом учебного программного обеспечения для решения вычислительных задач в областях линейной алгебры, теории управления, теории систем, обработки сигналов и других. Популярности системы способствует ее мощное расширение Simulink, предоставляющее удобные и простые средства, в том числе визуальное объектно-ориентированное программирование, для моделирования линейных и нелинейных динамических систем, а также множество других пакетов расширения систем. К расширению системы были привлечены крупнейшие научные школы мира в области математики, программирования и естествознания.

Система MATLAB создана таким образом, что любые вычисления можно выполнять в режиме прямых вычислений, так и с помощью написания подпрограмм в виде М-файлов. Центральным понятием всех математических систем является математическое выражение, которое задает то, что должно быть вычислено в численном (или в символьном) виде. Математические выражения строятся на основе чисел, констант, переменных, операторов, функций и разных спецзнаков. MATLAB предоставляет пользователю обширный набор готовых средств, большая часть которых – это расширения пакета в виде М-файлов.

Ввиду популярности у пользователей использования средств визуализации решения математических задач, в версии 6.5 приведены обширные средства визуализации, в том числе и анимационной, включая использование средств символьной математики. Новые средства дескрипторной или описательной графики позволяют создавать полноценные объекты высокого разрешения, как геометрического, так и цветового, поддерживаемые объектно-ориентированным программированием. Применение дескрипторной графики позволяет реализовать элементы визуально-ориентированного программирования.

Система MATLAB имеет обширную техническую документацию (более 5000 страниц текста) и развитую справочную систему. С последними новостями по разработке системы можно ознакомиться на сайте корпорации Math Works www.mathworks.com, а также посетив сайт официального дилера корпорации Math Works в России www.softline.ru. Консультации можно получить на сайтах

www.matlab.ru и www.exponenta.ru.

Вызов демонстрационных примеров можно произвести, исполнив команду

```
>> help demos
```

С помощью команды

```
>> lookfor ключевое слово
```

можно произвести поиск М-функций по ключевым словам.

Система MATLAB имеет интерактивную систему помощи, которая реализуется в командном режиме работы с помощью команды

```
>> help имя
```

Для запуска справочной системы следует использовать одноименную команду меню Help – MATLAB Help. При этом запустится браузер справочной системы.

Ниже приводится перечень команд с кратким описанием результата ее выполнения.

Команды общего назначения

Управляющие команды и функции

addpath	Добавление каталога к пути поиска файлов MATLAB'а
doc	Просмотр HTML документации в справочном окне
genpath	генерация пути
help	Показ справки по М-файлу для функций MATLAB в командном окне
helpbrowser	Показ справки для доступа ко всем справкам Mathworks в Интернете
helpdesk	Отображение окна просмотра справки
helpwin	Обеспечение доступа к помощи по М-файлу для всех функций
lasterr	Последнее сообщение об ошибках
lastwarn	Последнее предупреждающее сообщение
license	Лицензия
lookfor	Поиск указанного ключевого слова во всех записях
partialpath	Управление частичным путем
path	Управление путем поиска файлов каталога MATLAB
pathtool	Открытие GUI для просмотра и изменения пути MATLAB'а
profile	Запуск профилировщика М-файла, утилита для отладки и оптимизации кода
profreport	Создание отчета по конфигурации
rehash	Обновление функций и кэш файловой системы
rmpath	Удаление каталога из пути поиска файлов MATLAB'а

support	Открытие веб-страницы службы технической поддержки MathWorks
type	Печать на экран текста файла
ver	Информация о версии MATLAB, Simulink и пакетов расширения
version	Номер версии MATLAB'а
web	Вывод окна просмотра справки в файле или сети Интернет
what	Перечисление M-файлов в текущем каталоге
whatsnew	Отображение README файлов для MATLAB и пакетов расширения
which	Отображение расположения файлов и функций

Управление переменными и рабочим пространством

clear	Удаление элементов из рабочего пространства
disp	Отображение текста или массива
length	Длина вектора
load	Загрузка переменных из диска
memory	Справка об ограничениях по памяти
mlock	Запрет на очистки M-файла
munlock	Разрешение на очистку M-файла
openvar	Открытая переменная рабочего пространства для графического редактирования
pack	Объединение памяти рабочего пространства
save	Сохранение переменных рабочего пространства на диске
saveas	Сохранение рисунка или модели с использованием указанного формата
size	Размерность массива
who, whos	Перечисление переменных рабочего пространства
workspace	Отображение окна просмотра рабочего пространства, GUI для управления рабочим пространством

Управление командным окном

clc	Очистка командного окна
echo	Вывод на экран во время выполнения M-файла
format	Управление форматом вывода данных
home	Передвижение курсора к верхнему левому углу командного окна
more	Управление выводом командного окна

Работа с файлами и вычислительной средой

beep	Производство звука «гудка»
cd	Смена рабочего каталога
checkin	Регистрация файла в системе управления

checkout	Освобождение файла из системы управления
cmopts	Получение имени системы управления и файла проекта PVCS
copyfile	Копирование файла
customverctrl	Обеспечить доступ к указанной системе управления
delete	Удаление файлов или графических объектов
diary	Сохранение сеанса в виде файла на диске
dir	Отображение содержимого текущего каталога
dos	Выполнение команды DOS и возврат результата
edit	Редактирование M-файла
fileparts	Получение сведений о файле
filebrowser	Просмотр в окне файлов текущего каталога
fullfile	Построение полного имени файла
info	Получение информации о всех Readme файлах и пакетах расширения
inmem	Информация о доступных функциях
ls	Просмотр каталога на UNIX
matlabroot	Корневая директория инсталляции MATLAB
mkdir	Создание нового каталога
open	Открытие файлов по расширению
pwd	Содержимое текущего каталога
tempdir	Название временного каталога системы
tempname	Уникальное имя для временного файла
undocheckout	Отмена предыдущей отладки от системы управления
unix	Выполнение команды UNIX и возврат результата
!	Выполнение команды операционной системы

Начало работы и выход из MATLAB

finish	Завершение работы M-файла
exit	Завершение работы с пакетом MATLAB
matlabrc	Запуск M-файла
quit	Окончание работы с MATLAB
startup	Запуск работы M-файла

Функции MATLAB

Функции обработки звука

Общие функции для звука

Lin2mu	Преобразование линейного звукового сигнала в сигнал по му-закону
Mu2lin	Преобразование звукового сигнала по му-закону в линейный
Sound	Преобразование вектора в звук
Soundsc	Масштабирование данных и воспроизведение в виде звука

Звуковые функции, определенные как SPARCstation

Auread Чтение звукового файла NeXT/SUN (.au)

Auwrite Запись звукового файла NeXT/SUN (.au)

Звуковые Функции

Wavplay Воспроизведение записанного звука

wavread Чтение звукового файла (.wav)

wavrecord Запись звука с использованием звукового устройство ввода

wavwrite Запись звукового файла (.wav)

Функции ввода–вывода файла

Открытие файла и закрытие

fclose Закрытие одного или более открытых файлов

fopen Открытие файла, или получение информации об открытых файлах

Неотформатированный ввод–вывод

fread Чтение из файла данных в двоичном формате

fwrite Запись данных в двоичном формате в файл

Отформатированный ввод–вывод

fgetl Возврат следующей строки файла без признака конца

fgets Возврат следующей строки с признаком конца

fprintf Запись отформатированных данных в файл

fscanf Чтение отформатированных данных из файла

Позиционирование файла

feof Тест на наличие конца файла

ferror Запрос MATLAB об ошибках при вводе или выводе файла

frewind Перемотка открытого файла

fseek Установка индикатора положения файла

ftell Получение индикатора положения файла

Преобразование строк

sprintf Запись отформатированных данных в строку

sscanf Чтение строки при управлении форматом

Специализированный ввод–вывод файла

dlmread Чтение разграниченного ASCII файла в матрицу

dlmwrite Запись матрицы в разграниченный ASCII файл

hdf Интерфейс HDF

imfinfo Информация о графическом файле

imread Чтение изображения из графического файла

imwrite Запись изображения в графический файл
strread Чтение отформатированных данных из строки
textread Чтение отформатированных данных из текстового файла
wk1read Чтение матрицы из файла Lotus123 WK1
wk1write Запись матрицы в файл Lotus123 WK1

Функции MATLAB:

Математика

Элементарные матрицы и матричные преобразования

Элементарные матрицы и массивы

blkdiag Построение блочно-диагональной матрицы из входных аргументов
eye Построение единичной матрицы
linspace Генерация линейно распределенных векторов
logspace Генерация логарифмически распределенных векторов
numel Число элементов в матрице или массиве
ones Создание массива единиц
rand Создание однородно распределенных случайных чисел и массивов
randn Создание нормально распределенных случайных чисел и массивов
zeros Создание массива нулей
: (двоеточие) Регулярно распределенный вектор

Специальные переменные и константы

ans Переменная, хранящая результат последней операции
computer Идентифицирует компьютер, на котором выполняется MATLAB
eps Относительная точность с плавающей запятой
i Мнимая единица
Inf Бесконечность
inputname Ввести имя аргумента
j Мнимая единица
NaN Указание на нечисловой характер данных (Not-a-Number).
nargin, nargsout Число аргументов функций
nargoutchk Число параметров вывода
pi Отношение длины окружности к ее диаметру,
realmax Самое большое положительное значение с плавающей запятой

realmin Самое малое положительное значение с плавающей запятой

varargin,
varargout Пропуск или возврат числа аргументов

Time and Dates

Календарь Календарь

clock Текущее время в виде числового вектора

cputime Фактическая продолжительность работы центрального процессора

date Текущая дата

datenum Информация о дате

datestr Строковое представление даты

datevec Компоненты даты

eomday Конец месяца

etime Прошедшее время

now Текущая дата и время

tic, toc Таймер секундомера

weekday День недели

Матричные преобразования

cat Объединение массивов

diag Конструирование диагональных матриц, определение диагональных элементов матрицы

fliplr Зеркальное отражение матрицы слева направо

flipud Зеркальное отражение матрицы сверху - вниз

repmat Тиражирование и расположение мозаикой массивов

reshape Восстановление формы массивов

Rot90 Поворот матрицы на 90 градусов

tril Нижняя треугольная часть матрицы

triu Верхняя треугольная часть матрицы

: (двоеточие) Индекс в массиве, перегруппировка массивов

Векторные функции

cross Прямое произведение векторов

dot Скалярное произведение векторов

intersect Пересечение векторов

ismember Выявление членов, принадлежащих множеству

setdiff Определение различия двух векторов

setxor Определение членов, не являющихся общими для двух векторов

union Объединение двух векторов

unique Уникальные элементы вектора

Специализированные матрицы

comran	Матрица в форме, сопровождающей свой характеристический полином
gallery	Проверочная матрица
hadamard	Матрица Адамара–Колмогорова
hankel	Матрица Ганкеля
hilb	Гильбертова матрица
invhilb	Обращение гильбертовой матрицы
magic	Магический квадрат
pascal	Матрица Паскаля
toeplitz	Тоеплизитова матрица
wilkinson	Проверочная матрица Уилкинсона для собственных значений

Элементарные математические функции

abs	Абсолютное значение, модуль
acos, acosh	Обратный косинус и обратный гиперболический косинус
acot, acoth	Арккотангенс и обратный гиперболический котангенс
acsc, acsch	Арккосеканс и обратный гиперболический косеканс
angle	Фазовый угол
asec, asech	Арксеканс и обратный гиперболический секанс
asin, asinh	Арксинус и обратный гиперболический синус
atan, atanh	Арктангенс и обратный гиперболический тангенс
Atan2	Арктангенс
complex	Создание комплексных чисел из реальных и мнимых компонентов
conj	Комплексное сопряжение
cos, cosh	Косинус и гиперболический косинус
cot, coth	Котангенс и гиперболический котангенс
csc, csch	Котангенс и гиперболический котангенс
exp	Экспонента
fix	Округление до нуля
floor	Округление до минус бесконечности
gcd	Самый большой общий делитель
imag	Мнимая часть комплексного числа
lcm	Наименьший общий множитель
log	Натуральный логарифм
Log2	Логарифм по основанию 2
Log10	Десятичный логарифм
mod	Модуль (остаток после деления)
nchoosek	Биномиальный коэффициент или все комбинации
real	Вещественная часть комплексного числа
rem.	Остаток после деления

round	Округление до целого
sec, sech	Секанс и гиперболический секанс
sign	Знаковая функция
sin, sinh	Синус и гиперболический синус
sqrt	Квадратный корень
tan, tanh	Тангенс и гиперболический тангенс

Специализированные математические функции

Airy	Функция Эйри
besselh	Функция Бесселя третьего вида (Ганкеля)
besseli, bessell	Модифицированные функции Бесселя
besselj, bessely	Функция Бесселя
beta, betainc,	
betaln	Beta-функции
ellipj	Овальные функции Якоби
ellipke	Полные эллиптические интегралы первого и второго порядка
erf, erfc,	
erfcx, erfinv	Функции ошибок
expint	Интегральная показательная функция
factorial	Вычисление факториала
gamma, gammainc,	
gammaln	Гамма-функции
legendre	Присоединенная функция Лежандра
Pow2	Показательная степень 2
rat, rats	Рациональное приближение дроби
Преобразование системы координат	
Cart2pol	Преобразование декартовых координат в полярные или цилиндрические
Cart2sph	Преобразование декартовых координат к сферическим
Pol2cart	Преобразование полярных или цилиндрических координат к декартовым
Sph2cart	Преобразование сферических координат к декартовым

Матричные функции – линейная алгебра

Матричный анализ

cond	Число обусловленности
condeig	Число обусловленности для собственных значений
det	Матричный детерминант
norm	Векторные и матричные нормы
null	Нуль-пространство матрицы
orth	Ортонормированный базис матрицы
rank	Ранг матрицы

rcond	Величина, обратная числу обусловленности матрицы по первой норме
rref, rrefmovie	Приведение матрицы к треугольному виду
subspace	Угол между двумя подпространствами
trace	Сумма диагональных элементов (след матрицы)

Линейные уравнения

chol	Разложение Холецкого
inv	Матричное обращение
lscov	Решение МНК при известном коэффициенте ковариации
lu	LU-разложение матрицы
lsqnonneg	Метод неотрицательный наименьших квадратов
minres	Метод минимальных остатков
pinv	Псевдообращение матрицы по методу Moore-Penrose
qr	Ортогональное–треугольное QR-разложение матрицы
symmlq	Симметрический LQ-метод

Собственные значения и сингулярные значения

balance	Улучшение точности вычисления собственных чисел
Cdf2rdf	Преобразование комплекснозначной диагональной формы к вещественнозначной блочно-диагональной
eig	Собственные числа и векторы
gsvd	Обобщенное сингулярное разложение матрицы
hess	Хессенбергова форма матрицы
poly	Характеристический полином с указанными корнями
qz	QZ-разложение для обобщенных собственных чисел
Rsf2csf	Преобразование реальной формы Шура в комплексную
schur	Разложение Шура
svd	SVD-разложение

Матричные функции

expm	Матричная экспонента
funm	Оценка матричной функции
logm	Матричный логарифм
sqrtn	Матричный квадратный корень

Функции низкого уровня

qrdelete	Удаление столбца из QR-разложения
qrinsert	Вставка столбца в QR-разложении

Анализ данных и Фурье-преобразование

Основные операции

cumprod	Куммулятивное произведение
cumsum	Куммулятивная сумма

cumtrapz	Куммулятивное трапециедальное интегрирование
factor	Главные факторы
inpolygon	Обнаружение точки внутри полигона
max	Определение максимальных элементов массивов
mean	Среднее значение массивов
median	Медианное значение массивов
min	Минимальный элемент массива
perms	Все возможные перестановки
polyarea	Область многоугольника
prod	Произведение элементов массива
rectint	Площадь пересечения прямоугольников
sort	Сортировка элементов в порядке возрастания
sortrows	Сортировка элементов строки в порядке возрастания
std	Стандартное отклонение
sum	Сумма элементов массива
trapz	Вычисление интеграла по формуле трапеций
var	Дисперсия

Конечные разности

Del2	Дискретный лапласиан
diff	Разность и приближение производной
gradient	Числовой градиент

Корреляция

corrcoef	Коэффициент корреляции
cov	Матрица ковариаций

Фильтрация и свертка

conv	Свертка и умножение полиномов
Conv2	Двумерная свертка
deconv	Свертка и разделение полиномиала
filter	Фильтрация данных с бесконечным ответом импульса (IR) или конечным ответом импульса (FIR)
Filter2	Двумерная цифровая фильтрация

Фурье-преобразование

abs	Абсолютное значение (модуль)
angle	Фазовый угол
sortxpair	Сортировка комплексных чисел по комплексно сопряженным парам
fft	Одномерный быстрое преобразование Фурье
fft2	Двумерное быстрое преобразование Фурье

fftshift	Сдвиг DC компоненты быстрого преобразования Фурье к центру спектра
ifft	Обратное одномерное быстрое преобразование Фурье
Ifft2	Обратное двумерное быстрое преобразование Фурье
ifftn	Обратное многомерное быстрое преобразование Фурье
ifftshift	Обратное быстрое преобразование Фурье со сдвигом
Nextpow2	Определение ближайшей степени двух
unwrap	Коррекция фазовых углов

Полиномиал и интерполяционные функции

Полиномиалы

conv	Конволюция и перемножение полиномов
deconv	Деконволюция и разделение полиномов
poly	Полином с указанными корнями
polyder	Производная полиномиала
polyeig	Полином для собственных чисел
polyfit	Полиномиальная аппроксимация кривой
polyint	Аналитическое полиномиальное интегрирование
polyval	Оценка полиномиала
polyvalm	Матричная оценка полиномиала
residue	Преобразование дробного расширения и коэффициентов полинома
roots	Корни полинома

Интерполяция данных

convhull	Выпуклая оболочка
convhulln	Многомерная выпуклая оболочка
delaunay	Триангуляция Делоне
Delaunay3	Трехмерная триангуляция Делоне
delaunayn	Многомерная триангуляция Делоне
dsearch	Триангуляции Делоне для ближайшей точки
dsearchn	Многомерная триангуляция Делоне для ближайшей точки
Griddata3	Подготовка гиперповерхности для визуализации трехмерных данных
griddatan	Подготовка гиперповерхности для визуализации при размерности ≥ 2
Interp1	Одномерная интерполяция табличных данных
Interp2	Двухмерная интерполяция табличных данных
Interp3	Трехмерная интерполяция табличных данных
interpft	Одномерная интерполяция данных с использованием метода FFT
interp	Многомерная интерполяция табличных данных
meshgrid	Генерация матриц для трехмерной печати

ndgrid	Генерация массивов для многомерных функций и интерполяции
pchip	Эрмитова кубическая полиномиальная интерполяция
ppval	Кусочно-полиномиальная аппроксимация
spline	Кубическая сплайн-интерполяция данных
tsearch	Поиск приложения треугольника Делоне
tsearchn	Многомерный симплексный поиск
voronoi	Диаграмма Вороного
voronoin	Многомерные диаграммы Вороного

Функционалы – нелинейные численные методы

bvp4c	Решение обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)
bvpget	Определение структуры параметров BVP
bvpinit	Формирование начальных условий для bvp4c
bvpset	Создание/изменение структуры параметров BVP
bvpval	Оценка решения, вычисленного с помощью bvp4c
dblquad	Численная оценка двойных интегралов
fminbnd	Минимизация функции одной переменной
fminsearch	Минимизация функции нескольких переменных
fzero	Нахождение нуля функции одной переменной
Ode45, ode23,	
Ode113, ode15s, ode23s, ode23t,	
Ode23tb	Решение проблемы ОДУ
odeget	Извлечение параметров структуры ОДУ
odeset	Создание/изменение структуры параметров ОДУ
optimget	Получение значений параметров структурной оптимизации
optimset	Создание или редактирование параметров оптимизации
pdepe	Решение проблемы начально-граничных значений
pdeval	Оценка решения, вычисленного с помощью pdepe
quad	Вычисление интегралов с помощью адаптивной квадратуры Симпсона
quadl	Вычисление интегралов с помощью адаптивной квадратуры Лобатто
vectorize	Векторизация выражения

Функции разреженных матриц

Элементарные разреженные матрицы

spdiags	Извлечение и создание разреженной полосы и диагональной матрицы
speye	Разреженная единичная матрица
sprand	Разреженная однородно распределенная случайная матрица
sprandn	Разреженная нормально распределенная случайная матрица

sprandsym Разреженная симметрическая случайная матрица

Преобразование от полного к разреженному виду

find Определение индексов и значений элементов, отличных от нуля

full Преобразование разреженной матрицы до полной матрицы

sparse Создание разреженной матрицы

spconvert Импорт матрицы из разреженной матрицы внешнего формата

Работа с ненулевыми входами разреженных матриц

nnz Число матричных элементов отличных от нуля

nonzeros Матричные элементы отличные от нуля

nzmax Количество ячеек памяти для ненулевых элементов

spalloc Распределение пространства для разреженной матрицы

spfun Применение функции к ненулевым элементам разреженной матрицы

spones Замена единицами ненулевых элементов разреженной матрицы

Визуализация разреженных матриц

spy Визуализация образца разреженности

Алгоритмы упорядочения

colmmd Разреженный столбец с перестановкой минимальной степени

colperm Перестановка разреженного столбца, основанная на ненулевом счете

dmperm Разложение Dulmage–Mendelsohn

randperm Случайная перестановка

symamd Симметричная приближительная перестановка минимальной степени

symmmd Разреженное симметричное минимальное упорядочение

symrcm Разреженное обратное упорядочение Катхилла–Макки

Норма, число обусловленности и ранг

condst Оценка числа обусловленности матрицы по первой норме с использованием метода Хейджера в модификации Хаема

normest Оценка второй нормы матрицы

Разреженные системы линейных уравнений

bicg Двусопряженный метод градиентов

bicgstab Метод сопряженных градиентов

cgs Метод квадратов сопряженных градиентов

cholinc Неполное разложение Холецкого

cholupdate	Модификация ранга 1 в разложении Холецкого
gmres	Обобщенный метод минимальных остатков
lsqr	LSQR реализация сопряженных градиентов на нормальных уравнениях
luinc	Неполное LU-разложение матриц
pcg	Метод сопряженных градиентов с предварительной обработкой данных
qmr	Метод квазиминимальных остатков
qr	Ортогональное-треугольное QR-разложение
qrdelete	Удаление столбца в QR-разложении
qrintsert	Добавление столбца в QR-разложении
qrupdate	Уточнение 1 в QR-разложении

Собственные значения и сингулярные числа разреженных матриц

eigs	Собственные значения и собственные векторы разреженных матриц
svds	Сингулярное разложение разреженных матриц

Разное

spparms	Установка параметров подпрограмм для разреженных матриц
----------------	---

Графика

Печать и визуализация данных

Графики и графы

bar	Вертикальная столбцовая диаграмма
barh	Столбцовая диаграмма с горизонтальными столбцами
hist	Графические гистограммы
histc	Вычисление гистограммы
hold on (off)	Включение режима продолжения (отмены) графических построений
loglog	Печать графика с логарифмическими масштабами двух осей
pie	Построение круговой диаграммы
plot	Построение графика по элементам векторов или матриц
polar	Построение графика в полярной системе координат
semilogx	Построение графика с логарифмическим масштабом оси абсцисс
semilogy	Построение графика с логарифмическим масштабом оси ординат
subplot	Разбиение графического окна

Трехмерная печать

Bar3	Вертикальная трехмерная гистограмма
Bar3h	Горизонтальная трехмерная гистограмма
Comet3	Трехмерный график кометы
cylinder	Построение цилиндра в виде трехмерной фигуры
Fill3	Построение окрашенных в заданный цвет плоских многоугольников
Plot3	Построение линий и точек в трехмерном пространстве
Quiver3	Трехмерный график полей градиента
slice	График сечения функции трех переменных
sphere	Построение сферы в виде трехмерной фигуры
stem3	Графическое изображение дискретных данных
waterfall	График трехмерных слоеных поверхностей в виде тонких пластинок

Графическая аннотация и сетки

clabel	Маркировка контурных графиков
datetick	Отформатированные метки импульса сигнала времени
grid	Построение сетки для двух- и трехмерных графиков
gtext	Размещение многострочной надписи из массива строковых переменных
legend	Пояснение в виде отрезков линий со справочными надписями внутри или около графика
plotyy	Графическая печать с размещением меток Y слева направо
title	Заголовки для двух- и трехмерных графиков
xlabel	Маркировка осей X для двух- и трехмерных графиков
ylabel	Маркировка осей Y для двух- и трехмерных графиков
zlabel	Маркировка осей Z для трехмерных графиков

Поверхностные, сетчатые и контурные графические изображения

contour	Контурная печать графика
contourc	Вычисление контура
contourf	Окрашенный контурный график
hidden	Управление показом невидимых линий
meshc	Комбинация mesh/contourplot
mesh	Трехмерная сетчатая поверхность с заданной или функциональной окраской
peaks	Матричный образ поверхности с рядом пиков и впадин
surf	Трехмерный теневой поверхностный график
surface	Создание поверхностного объекта низкого уровня
surfc	Комбинация команд surf/contourplot
surf1	Трехмерная теневая поверхность с освещением

trimesh Построение объемных фигур в виде каркаса (без окраски и отображения плоскостей)
trisurf График с закраской треугольных областей, задающих трехмерную фигуру

Визуализация объема

coneplot Визуализация с помощью конусов
contourslice Вывод контура в плоскости сечения объема
curl Вычисление волновой и угловой скорости векторного поля
divergence Вычисление дивергенции векторного поля
flow Создание массивов представления струи
interpstreamspeed Интерполяция вихревых потоков
isocaps Вычисление геометрии поверхности равного уровня
isocolors Вычисление цвета поверхности равного уровня
isonormals Вычисление нормали поверхности равного уровня вихревого поля
isosurface Извлечение поверхности равного уровня вихревого поля
reducepatch Уменьшение числа полигонов
reducevolume Уменьшение количества элементов в наборе данных
shrinkfaces Уменьшение размера полигона
slice Вывод «пластинчатой» поверхности
Smooth3 Сглаживание трехмерных данных
Stream2 Вычисление 2-мерных данных потока
Stream3 Вычисление трехмерных данных потока
streamline Вывод линии потока от 2-или трехмерных векторных данных
streamparticles Вывод движения частицы потока
streamribbon Визуализация потока в ленточной форме
streamslice Вывод отдельных линий потока
streamtube Вывод потока «трубки»
Surf2patch Преобразование поверхностных данных в данные полигона
subvolume Извлечение подмножества данных объема
volumebounds Определение координатных и цветовых пределов

Создание области

griddata Генерирование сетки и данных для поверхности
meshgrid Создание X и Y массивов для трехмерных графиков

Специализированное построение графиков

area Печать области
box Построение прямоугольника вокруг рисунка
comet График движения в форме «кометы»
compass График с указанием направления
errorbar Печать графика с областями ошибки

ezcontour	Контурная печать
ezcontourf	Контурная печать с заполнением
ezmesh	Трехмерная петля
ezmeshc	График петли/контура
ezplot	График функции
Ezplot3	Трехмерный параметрический график кривой
ezpolar	Полярный координатный график
ezsurf	Трехмерный цветной график поверхности
ezsurfс	График поверхности в сочетании с контурным представлением
feather	График с эффектом «пера»
fill	Вывод заполненных двумерных многоугольников
fplot	График функции
pareto	График «pareto»
Pie3	Трехмерная круговая диаграмма
plotmatrix	Печать графической матрицы
pcolor	Псевдоцветной график с эффектом «шахматной доски»
rose	Угловая гистограмма
quiver	Построение графика градиента
ribbon	График в ленточной форме
stairs	Ступенчатый график
scatter	Рассеивание графика
Scatter3	Рассеивание трехмерного графика
stem	Вывод дискретных данных
convhull	Выпуклый корпус
delaunay	Триангуляция Делонэ
dsearch	Триангуляция Делонэ для ближней точки
inpolygon	Положение точки внутри области многоугольника
polyarea	Область многоугольника
tsearch	Поиск описывающего треугольника Делонэ
voronoi	Диаграмма Вороного

Управление видом представления

camdolly	Изменение положения камеры и объекта
camlookat	Показа определенных объектов
camorbit	Вращение камерой
campan	Вращение объекта вокруг камеры
campos	Установление камеры
camproj	Установление типа проектирования
camroll	Вращение камеры вокруг оси просмотра
camtarget	Установление объекта просмотра
camup	Установление вектора камеры
camva	Установление угла просмотра

camzoom	Изменение масштаба изображения
daspect	Установление коэффициента сжатия данных
pbaspect	Установление графического коэффициента сжатия блока
view	Спецификация трехмерной точки зрения
viewmtx	Генерация матрицы преобразования обзора
xlim	Установка текущих пределов оси X
ylim	Установка текущих пределов оси Y
zlim	Установка текущих пределов оси Z

Освещение

camlight	Создание или размещение источника света
light	Функция создания освещения
lighting	Режим освещения
lightangle	Установка освещения в сферических координатах
material	Режим отражательной способности материи

Прозрачность

alpha	Установка или запрос функции прозрачности для объектов в текущих координатах
alphamap	Определение рисунка альфа-карты
alim	Установка или запрос пределов альфа-осей

Цветовые операции

brighten	Осветление или затемнение карты цветов
caxis	Псевдоцветное масштабирование оси
colorbar	Показ шкалы цветов
colordef	Установка цветового значения по умолчанию
colormap	Установка справочник цветов (список карт цветов)
graymon	Установка настроек графики по умолчанию для черно-белого монитора
Hsv2rgb	Преобразование HSV (оттенок–насыщенность–значение) в RGB (красному–зеленому–синему)
Rgb2hsv	Преобразование RGB в HSV
rgbplot	Вывод карты цветов
shading	Режим затенения
spinmap	Вращение карты цветов
surfnorm	Трехмерные поверхностные нормали
whitebg	Изменение фона для графиков

Карты цветов

autumn	Оттенки красной и желтой карты цветов
bone	Полутоновый с оттенком синей карты цветов
contrast	Создание серой карты цветов для усиления контрастности изображения

cool	Оттенки сине-сиреневой карты цветов
copper	Линейный медный тон карты цветов
flag	Чередующаяся красная, белая, синяя и черная карта цветов
gray	Линейная полутоновая карта цветов
hot	RGB (черно–красно–желто–белая) карта цветов
hsv	HSV (оттенок–насыщенность–значение) карта цветов
jet	Вариант HSV
lines	Карта цветов цвета линии
prism	Карта цветов призмы
spring	Оттенки сиренево-желтой карты цветов
summer	Оттенки зелено-желтой карты цветов
winter	Оттенки сине-зеленой карты цветов

Печать

orient	Ориентация бумаги печатной копии
pagesetupdlg	Диалоговое окно установки положения страницы
print	Печать или сохранение графика в файле
printdlg	Диалоговое окно печати
printopt	Конфигурация по умолчанию локального принтера
saveas	Сохранение рисунка в графическом файле

Управление рисунками, общие положения

allchild	Нахождение всех детей указанных объектов
copyobj	Создание копии графического объекта и его детей
findall	Определение всех графических объектов (включая скрытые маркеры)
findobj	Поиск объектов с указанными значениями реквизитов
gcbo	Определение выполняемого объекта
get	Определение свойства объекта
rotate	Вращение объектов вокруг указанных начала координат и в требуемом направлении
ishandle	Параметры графических объектов
set	Установление свойства объекта

Работа с прикладными данными

getappdata	Получение значений прикладных данных
isappdata	Определение существования прикладных данных
rmappdata	Удаление прикладных данных
setappdata	Определение прикладных данных

Управление рисунками, создание объектов

axes	Создание объекта «Ось»
figure	Создание окна «Рисунок»

image	Создание двумерного изображения (двухмерной матрицы)
light	Создание объекта освещения
line	Создание объекта линии (ломаных линий в пространстве)
patch	Создание объекта «полигон» (многоугольника)
rectangle	Создание объекта «прямоугольник»
surface	Создание поверхности (четырёхугольника)
text	Создание текстового объекта (символьной последовательности)
uicontextmenu	Создание контекстного меню (всплывающей подсказки)

Управление рисунками, окна рисунков

capture	Экранный сбор данных текущего рисунка
clc	Очистка окна
clf	Очистка рисунка
close	Закрытие указанного окна
closereq	Функция запроса на закрытие
gcf	Определение текущего маркера
newplot	Графическая преамбула М-файла для реквизита NextPlot
refresh	Обновление рисунка
saveas	Сохранение рисунка или модели в желаемом выходном формате

Управление рисунками, оси

axis	Масштабирование осей
cla	Очистка осей
gca	Текущий маркер осей

Манипуляция объектами

reset	Восстановление оси или рисунка
Rotate3d	Вращение трехмерного графика в интерактивном режиме
Selectmoveresize	Выбор, перемещение и изменение объектов в интерактивном режиме

Диалоговый пользовательский ввод

ginput	Графический ввод от мыши или от курсора
zoom	Изменение масштаба на двумерном графике

Работа с областями

dragrect	Перетаскивание XOR прямоугольников с помощью мыши
drawnow	Завершение любого незавершенного рисунка
rbbox	Блок «каучуковая повязка»

Программирование и типы данных

Операторы и специальные символы

+	Плюс
-	Минус
*	Матричное умножение
.*	Умножение массива
^	Матричная степень
.^	степень массива
kron	Кронекеровское произведение
\	Наклонная черта влево или левое разделение
/	Наклонная черта вправо или правое разделение
./и.\	Деление массива, правое и левое
:	Двоеточие
()	Круглые скобки
[]	Квадратные скобки
{ }	Фигурные скобки
.	Десятичная точка
...	Продолжение строки
,	Разделитель
;	Точка с запятой
%	Комментарий
!	Знак восклицания
“	Цитата
=	Присвоение
==	Равенство
<>	Операторы отношения
	Логическое «и»
	Логическое «или»
~	Логическое «отрицание»
xor	Логическое «исключение или»

Логические функции

all	Проверка всех элементов на отличие от нуля
any	Проверка на наличие ненулевого элемента
exist	Проверка существования переменной или файла
find	Определение индексов и значений элементов, отличных от нуля
is*	Обнаружение состояния
isa	Обнаружить объект данного класса
iskeyword	Проверка, является ли строка ключевым словом matlab
isvarname	Проверка, является ли строка достоверным названием переменной
logical	Преобразование числовых значений в логические

mislocked Проверка, не может ли быть очищен М-файл

Конструкции языка и отладка

matlab как язык программирования

builtin	Выполнение встроенной функции
eval	Интерпретация строки, содержащей выражение matlab
evalc	Оценка выражения matlab со сбором данных
evalin	Оценка выражения в рабочем пространстве
feval	Вычисление дескрипторной функции
function	Функция М-файла
global	Определение глобальных переменных
nargchk	Проверка числа входных параметров
persistent	Определение постоянной переменной
script	Сценарий М-файла

Управление потоками

break	Завершение выполнения «цикла» или «во время цикла»
case	Переключатель
catch	Отмена вывода сообщений об ошибках
continue	Передача управления в следующую итерацию цикла в операторах for, while
else	Условный оператор
elseif	Условный оператор
end	Окончание цикла для операторов for, while, switch, try и if
for	Повтор выполнения операторов определенное число раз
if	Условное выполнение операторов
otherwise	Заданная по умолчанию часть оператора
return	Возвращение управления функции
switch	Переключатель среди нескольких случаев, основанных на выражении
try	Начало вывода сообщений об ошибках
warning	Вывод предупреждающего сообщения
while	Повтор операторов неопределенное число раз

Диалоговый ввод

input	Запрос на пользовательский ввод
keyboard	Передача управления клавиатуре во время выполнения М-файла
menu	Генерация меню выборов для пользовательского ввода
pause	Приостановка работы ЭВМ

Объектно-ориентированное программирование

class	Создание объекта или класса возвращения
double	Преобразование к значению с удвоенной точностью
inferiorto	Отношения нижнего класса
inline	Создание встроенного объекта
Int8, int16, int32	Преобразование к целому числу со знаком
isa	Обнаружение объекта данного класса
loadobj	Расширение функции загрузки для пользовательских объектов
saveobj	Сохранение фильтра на объекты
single	Приведение к одинарной точности
superiorto	Превосходящие отношения класса
UInt8, uint16, uint32	Преобразование к целому числу без знака
Отладка	
dbclear	Очистка контрольных точек
dbcont	Продолжение выполнения
dbdown	Изменение локального контекста рабочего пространства
dbmex	Допуск MEX – отладки файла
dbquit	Выход из режима отладки
dbstack	Стек обращения к функции вывода
dbstatus	Перечисление всех контрольных точек
dbstep	Выполнение одной или более строк от контрольной точки
dbstop	Установление контрольных точек в M-файле
dbtype	Список M-файлов с номерами строк
dbup	Изменение локального контекста рабочего пространства

Функциональные маркеры

Function_handle	Тип данных matlab, который является маркером для функции
functions	Информация о функциональном маркере
Func2str	Создание строки имени функции от функционального маркера
Str2func	Создание функционального маркера от строки имени функции

Функции строки символов

Общие

abs	Абсолютное значение (модуль)
eval	Интерпретация строк, содержащих выражения matlab
real	Вещественная часть комплексного числа
strings	Обработка строки matlab

Преобразование строк

Func2str	Создание строки имени функции от функционального маркера
Str2func	Создание функционального маркера от строки имени функции

Манипуляции со строками

deblank	Полоса операций с конца строки
findstr	Определение строки в пределах другой
lower	Преобразование строки к нижнему регистру
strcat	Конкатенация строки
strcmp	Сравнение строк
strcmpi	Сравнение строк без учета регистра
strjust	Выравнивание символьного массива
strmatch	Нахождение возможных пар для строк
strncmp	Сравнение первых <i>n</i> символов строк
strncmpi	Сравнение первых <i>n</i> символы строк без учета регистра
strrep	Поиск и замена строки
strtok	Первый символ в строке
strvcat	Вертикальная конкатенация строк
symvar	Определение символьных переменных в выражении
texlabel	Преобразование в формат TeX из символьной строки
upper	Преобразование строки к верхнему регистру

Преобразование строк

char	Создание символьного массива
Int2str	Преобразование целого числа в строку
Mat2str	Преобразование матрицы в строку
Num2str	Преобразование числа в строку
sprintf	Запись отформатированных данных в строку
sscanf	Чтение строки под форматным управлением
Str2double	Преобразование строки к значению с удвоенной точностью
Str2mat	Преобразование строки в матрицу
Str2num	Преобразование строки в число

Преобразование системы счисления

Bin2dec	Преобразование двоичного числа в десятичное
Dec2bin	Преобразование десятичного числа в двоичное
Dec2hex	Преобразование десятичного числа в шестнадцатеричное
Hex2dec	Преобразование шестнадцатеричного числа в десятичное
Hex2num	Преобразование шестнадцатеричного числа в число с двойной точностью

Создание GUI

Графические интерфейсы пользователя

Диалоговые окна

dialog	Создание диалогового окна
errorDlg	Создание диалогового окна ошибки
helpdlg	Диалоговое окно подсказки
inputdlg	Создание диалогового окна ввода
listdlg	Создание диалогового окна выбора из списка
msgbox	Создание диалогового окна сообщения
pagedlg	Диалоговое окно размещения страницы
printdlg	Диалоговое окно печати
questdlg	Создание диалогового окна вопроса
uigetfile	Диалоговое окно для восстановления имени файла для чтения
uiputfile	Диалоговое окно для восстановления имени файла для письма
uigetcolor	Диалоговое окно для установления спецификаций цвета
uigetfont	Установление шрифта интерактивном режиме
warndlg	Создание предупреждающего диалогового окна

Развертывание интерфейса пользователя

guidata	Сохранение или восстановление прикладных данных
guihandles	Создание структуры маркеров
movegui	Перемещение экранного рисунка GUI
openfig	Открытие рисунка GUI

Развитие интерфейса пользователя

guide	Открытие редактора размещения GUI
inspect	Подручное меню

Внешние интерфейсы

Интерфейс matlab для Java

class	Создание объекта или класса объекта
import	Добавление пакета или класса к текущему списку импорта в Java
isa	Определение объекта данного класса
isjava	Проверка, является ли объект объектом Java
javaArray	Создание массива Java
javaMethod	Вызов метода Java
javaObject	Создание объекта Java
methods	Название метода

methodsview Отображение информации о всех методах

Ввод–вывод последовательного порта

Создание объекта последовательного порта

serial Создание объекта последовательного порта

Запись и чтение данных

fgetl Чтение одной строки текста от устройства и отвержение терминатора

fgets Чтение одной линии текста от устройства и включение терминатора

fprintf Запись текста на устройство

fread Чтение двоичных данных от устройства

fscanf Чтение данных от устройства и форматирование как текста

fwrite Запись двоичных данных на устройство

readasynch Асинхронное чтение данных от устройства

stopasynch Остановка асинхронного чтения и записи операций

Конфигурирование и возврат свойств

get Возврат свойства объекта последовательного порта

set Конфигурация или показ свойств объекта последовательного порта

Изменение состояния

fclose Разъединение объекта последовательного порта от устройства

fopen Соединение объекта последовательного порта к устройству

record Запись данных и информации об операциях в файл

Универсальные функции

clear Удаление объекта последовательного порта из рабочего пространства matlab

delete Удаление объекта последовательного порта из памяти

disp Вывод информации об объекте последовательного порта

instraction Вывод информации о событии по мере ее наступления

instrfind Возврат объекта последовательного порта из памяти в рабочее пространство matlab

isvalid Определение достоверности объекта последовательного порта

length Длина массива объекта последовательного порта

Кафедра систем управления и информатики (до 2001 года кафедра автоматики и телемеханики) Санкт-Петербургского государственного университета информационных технологий, механики и оптики (ИТМО), организована в 1945-м году одновременно с основанием факультета *электроприборостроения*, со временем переименованного в *радиотехнический*. Основание кафедры связано с именем ее первого заведующего и одновременно первого декана факультета *электроприборостроения* профессора Марка Львовича ЦУККЕРМАНА. На кафедру автоматики и телемеханики ИТМО, в отличие от существовавших к тому времени кафедр аналогичного профиля в ЛПИ им. М.И. Калинина (ныне СПбГПУ) и ЛЭТИ им. В.И. Ульянова (Ленина) (ныне СПбГЭТУ («ЛЭТИ»)), была возложена задача по подготовке специалистов в области автоматизации и телемеханизации приборостроительной, оптической и оборонной промышленности.

Профессор Цуккерман М.Л. в 1913-м году закончил электромеханическое отделение Санкт-Петербургского государственного политехнического института им. Петра Великого. В 20-е годы XX в. он организовал в Ленинграде (ныне Санкт-Петербург) отраслевую лабораторию электроизмерений (ОЛИЗ) и был известен в стране как крупный специалист в области телеизмерения. Научные интересы профессора Цуккермана М.Л. и персонала новой кафедры на многие годы определили основные направления ее научной, учебной и методической деятельности, проблемным куратором которой профессор Цуккерман М.Л. оставался вплоть до своей кончины в 1959-м году. К моменту прихода в ИТМО профессор Цуккерман М.Л. имел богатый опыт преподавания в высших учебных заведениях страны. Так с 1933-го года до начала Великой отечественной войны он заведовал кафедрой *автоматизации и телемеханизации* промышленности в ЛЭТИ им. В.И. Ульянова (Ленина).

ТАНСКИЙ Евфимий Аполлонович – ученик профессора Цуккермана М.Л., кандидат технических наук, доцент, заведовал кафедрой с 1959-го года по 1970-й год; выпускник кафедры автоматики и телемеханики ЛЭТИ им. Ульянова (Ленина) 1936-го года, известный специалист в области систем стабилизации скорости и фазирования в задачах

управления многодвигательными комплексами, а также маломощных прецизионных следящих систем.

САБИНИН Юрий Алексеевич – заслуженный деятель науки и техники РФ, доктор технических наук, профессор, заведовал кафедрой с 1970-го по 1990-й год; выпускник ЛПИ им. М.И.Калинина 1938-го года, известный специалист в области электропривода, фотоэлектрических следящих систем, робототехники и адаптивной оптики.

ГРИГОРЬЕВ Валерий Владимирович – доктор технических наук, профессор, заведует кафедрой с 1995-го года; выпускник кафедры автоматизации и телемеханики ЛИТМО 1969-го года, известный специалист в области теории качественной устойчивости, синтеза цифровых регуляторов, управления подвижными объектами, систем пространственного слежения, робототехники.

ВЕДУЩИЕ ученые и преподаватели кафедры – доктора технических наук, профессора: Зорин Д.И. (1945–1956г.г.), Кампе–Нэмм А.А. (1945–1954г.г.), Юргенсон Р.И. (1945–1958г.г.), Арефьев Б.А. (1958–1977г.г.), Пальтов И.П. (1964–1980г.г.), Дроздов В.Н. (1962–1989г.г.), Ушаков А.В. (с 1960г.), Мирошник И.В. (1972–2005г.г.), Никифоров В.О. (с 1990г.); кандидаты технических наук, доценты: Тацитов Г.А. (1947–1973г.г.), Яковлев Н.М. (1951–1986г.г.), Болтунов И.П. (с 1957г.), Николаев П.В. (1971–1996г.г.), Власенко В.А. (с 1963г.), Лаврентьев В.В. (1964–1996г.г.), Хабалов В.В. (1972–2004г.г.), Бушуев А.Б. (с 1975г.), Черноусов В.В. (1975–2005г.г.), Бойков В.И. (с 1976г.), Коровьяков А.Н. (с 1976г.), Котельников Ю.П. (с 1978г.), Болтунов Г.И. (с 1980г.), Быстров С.В. (с 1980г.), Чежин М.С. (с 1982г.), Бобцов А.А. (с 1996г.), Сергеев К.А. (с 2002г.), Кремлев А.С. (с 2005г.), Лукьянова Г.В. (с 2005г.); старшие преподаватели: Борисов В.А. (1945–1969г.г.), Соколов В.В. (1947–1973г.г.), Новиков В.Г. (1945–1977г.г.), Ганту Ю.Б. (1958–1982г.г.), Никифорова Л.Т. (1953–1991г.г.), Перевозчиков Н.М. (1953–1992г.г.), Салмыгин И.П. (с 1977г.); кандидат технических наук, ассистент Дударенко Н.А. (с 2006г.); заведующие лабораториями кафедры: Мезерин А.А. (1945–1964г.г.), Семенов А.С. (1977–1992г.г.), Рукуйжа Е.В. (с 1992г.); инженер-программист Л.В. Кожевникова (с 1986г.), помощник зав. кафедрой Л.В. Шапкина (с 2004г.).

Четыре этапа развития кафедры Систем управления и информатики (СУИ) (до 2001-го года кафедры Автоматики и телемеханики) со дня ее основания, связанные с именами ее руководителей, – это четыре этапа формирования научной мысли ее коллектива.

Научная школа кафедры СУИ начала формироваться в 60–70-х годах при содействии профессоров кафедры Пальтова И.П., Сабинина Ю.А. и доцента Танского Е.А. усилиями коллег новой возрастной и научной мировоззренческой формации в лице доцента Лаврентьева В.В.,

профессоров Дроздова В.Н., Ушакова А.В., Григорьева В.В. и Мирошника И.В., организовавших в 1970-м году постоянно действующий научный семинар «Современные проблемы теории управления». В настоящее время кафедра объединяет тесно сотрудничающие между собой научные коллективы, возглавляемые профессорами В.В. Григорьевым, Ушаковым А.В., Никифоровым В.О., Бобцовым А.А., доцентами Бойковым В.И. и Быстровым С.В. Системная методология научной школы кафедры опирается на возможности методов Ляпунова, оптимизации и матричного формализма, заложенного в уравнениях Ляпунова, Сильвестра и Риккати, а также методов современной теории нелинейных систем, модального, робастного и адаптивного управления; области научных интересов кафедры охватывают как классические, так и новые направления теории управления: теория качественной устойчивости теория многомерных непрерывных и дискретных систем (SVD-approach), аналитический синтез регуляторов; нелинейные и адаптивные системы управления пространственным движением, интеллектуальная робототехника; робастность, интервальность, нечеткость, структурная и информационная избыточность в задачах управления, измерения и наблюдения, теория и методы проектирования многомерных систем с модальными и эллипсоидными показателями качества гарантированной стабильности над бесконечными полями и гарантированной информационной надежности над полями Галуа, теория и практика двоичных динамических систем дискретной автоматики.

Научные результаты кафедры СУИ имеют богатую национальную и зарубежную библиографию. Ученые кафедры издают монографии, печатаются в журналах академий наук РФ и стран бывшего СССР, отраслевых журналах, известиях высших учебных заведений, а также зарубежных журналах и в трудах международных конференций. Ученые кафедры опубликовали более 100 монографий и учебников, приблизительно 200 методических и учебных пособий, около 2400 статей из них более 270 в журналах академий наук, около 150 статей и докладов в зарубежных англоязычных изданиях, ученые кафедры являются авторами более 550 изобретений; приняли участие в работе более 480 национальных и зарубежных научных конференций. Кафедра поддерживает научные контакты с 20 техническими зарубежными университетами. Четыре члена кафедры профессора Григорьев В.В., Мирошник И.В., Никифоров В.О., Ушаков А.В. являются действительными членами (академиками) международной академии нелинейных наук.

Основные научные разработки кафедры представлены следующими временными периодами.

1945–1959г.г. – Системы автоматизации комплексных измерений параметров кораблей, телеметрии и регистрации при мореходных испытаниях, а также системы стабилизации и фазирования скоростей

двигателей в составе многодвигательных комплексов (научные руководители – профессор Цуккерман М.Л., доценты Танский Е.А., Яковлев Н.М.; заказчик – МОП).

1959–1970г.г. – фотоэлектрические прецизионные измерительные следящие системы для нужд ракетной техники (комплекс ПОР), автоматизированная система обработки снимков в пузырьковых камерах (комплекс ПУОС), системы стабилизации и фазирования для фототелеграфной аппаратуры (комплекс «Газета–2») (научные руководители – профессор Пальтов И.П., доценты Танский Е.А., Яковлев Н.М.; заказчик–ЛОМО, НИИЭТУ).

1970–1980г.г. – серия магнитных усилителей для двигателей типа ДИД–ДГ, системы лазерного наведения высокостабильных фазовых светодальномеров, высокоточные системы астрогидирования в режиме счета фотонов, система управления комплексом вытяжки оптического волокна, цифровые регуляторы на базе микроЭВМ, контурные робототехнические комплексы, системы управления посадкой (научные руководители – профессора Пальтов И.П., Сабинин Ю.А., доценты Николаев П.В., Яковлев Н.М.; заказчик – ЛОМО, ГОИ им. С.И. Вавилова, ВНИИРА, НПО «Дальняя связь», ЦНИИРТК).

1980–1990г.г. – НИР на кафедре ведется в соответствии с программами «Оптимум», «МИР», «Излучение», «Интенсификация–90», во исполнение которых разработаны системы микропроцессорного управления многодвигательными приводами; системы адаптивной оптики для многоэлементных главных зеркал оптических телескопов и коррекции волнового фронта технологических лазеров, приводов микроперемещений для систем адаптивной оптики, а также автоматизированный светодальномерный лазерный профилометрический комплекс для предэксплуатационной юстировки больших полноповоротных радиотелескопов; системы управления судовождением судов ледовой проводки и робототехники; системы управления посадочными комплексами летательных аппаратов на стационарное и подвижное основания (научные руководители – профессора – Ю.А. Сабинин, В.Н. Дроздов, А.В.Ушаков, В.В.Григорьев, И.В.Мирошник и доцент П.В. Николаев; заказчик – ГОИ, ЛОМО, НПО «Электросила», ПО «Кировский завод», ЦНИИ РТК, ОКБ МЭИ, ВНИИРА).

С 1990г. основные разработки составили: системы управления лазерными локационными станциями слежения; АСУТП многокаскадных сеточных фотоэлектронных умножителей; САПР САУ; адаптивные робототехнические комплексы и транспортные тележки; системы контурного управления и прецизионной интерполяции для сложных поверхностей; системы согласованного управления многодвигательными агрегатами; устройства на базе пьезоэлектрических, электрострикционных и магнитострикционных двигателей; прецизионные уст-

ройства измерения микроперемещений, высокоточные системы оптического контроля формы отражающей поверхности на базе микроконтроллеров; фотоэлектрические измерительные системы с аналоговыми анализаторами и анализаторами на регулярных ППЗ-структурах ; аппаратура контроля деформаций металлоконструкций больших полноповоротных радиотелескопов РТФ-32 , РТФ-64 с диаметром раскрытия главного рефлектора соответственно 32 и 64 метра; устройства дискретной автоматики (УДА) гарантированной информационной надежности для средств управления стрелочным хозяйством Санкт-Петербургского метрополитена; система автоматики комплекса приготовления удобрения (научные руководители – профессора Григорьев В.В. , Мирошник И.В., Сабинин Ю.А., Ушаков А.В.; доценты – Бойков В.И., Николаев П.В.), НИР выполняются по международным, федеральным и региональным комплексным целевым программам «Университеты России», Министерства образования РФ, грантов РФФИ, «Интеграция», развития и поддержки Санкт-Петербургского УНЦ «Проблемы машиностроения», «Излучение», на основе НТП базового финансирования института, «Телемеханика-2000», на основе сотрудничества с НИИТМ, АОЗТ «Технокон» и АО «Экопрод», а также в инициативном порядке).

В настоящее время на кафедре функционируют три научно-исследовательские лаборатории: «технической кибернетики» (основатель – профессор Мирошник И.В., научный руководитель – профессор Бобцов А.А.), «автоматизированного оптико-электронного мониторинга технических объектов и комплексов» (основатели – профессор Сабинин Ю.А. и доцент Николаев П.В., научные руководители – доцент Бойков В.И. и профессор Ушаков А.В.) и «технической информатики и телемеханики» (основатель – профессор Цуккерман М.Л., научный руководитель профессор Ушаков А.В.).

На кафедру автоматики и телемеханики ЛИТМО при ее основании в 1945г. была возложена задача подготовки специалистов по автоматизации приборостроительной и оборонной промышленности. Первый выпуск инженеров на кафедре состоялся в 1948-м году и составил 17 человек, выпускники кафедры получили диплом инженера-электромеханика по специальности 0606 – приборы автоматики и телемеханических устройств. С 1980-го года выпускникам кафедры присваивается квалификация инженера-электрика по специальности автоматика и телемеханика, с 1990-го года – по специальности 2101 – автоматика и управление в технических системах, а с 1994-го года – по специальности 220201 – управление и информатика в технических системах. С момента основания кафедра выпустила более 5000 инженеров. С 1990-го года кафедра дополнительно готовит бакалавров техники и технологии по направлению 5502 – автоматизация и управление, в на-

стоящее время началась подготовка магистров по тому же направлению.

Начиная с 50-х годов, на кафедре функционирует аспирантура и докторантура, более 180 их выпускников получили степень кандидата наук, а 25 – ученую степень доктора наук, причем 15 из них защитили диссертации за последние десять лет. В настоящее время в аспирантуре кафедры обучается 20 человек, а в докторантуре – двое.

На седьмом десятке своего существования кафедра систем управления и информатики (б. автоматики и телемеханики) представляет собой работоспособный коллектив, полный новых идей и творческих планов.