Лекция № 7Тема 8.5. Некоторые важные для практики распределения случайных величин.

Распределения биномиальное, Пуассона, нормальное, равномерное, показательное.

Лекция № 7

§8.Законы распределения дискретных случайных величин

1. Биноминальное распределение

Рассмотрим серию из n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность наступления события A равна p. Случайная величина X означает число наступлений событий. Она дискретна, и ее возможными значениями являются неотрицательные целые числа 0, 1, 2, ... , n.

Закон распределения случайной величины X задается уже известной нам формулой.

$$P_n(\kappa) = C_n^{\kappa} p^{\kappa} q^{n-\kappa}, \qquad (1)$$

определяющей вероятность равенства $X=\kappa$. Как было указано в предыдущей лекции, это выражение представляет собой член разложения бинома $(p+q)^n$. Поэтому говорят, *что случайная величина X подчиняется биноминальному закону распределения*. Примеры приложений биноминального распределения уже встречались нам в предыдущих параграфах.

Чтобы вычислить дисперсию случайной величины, распределенной по биноминальному закону, воспользуемся теоремой о дисперсии суммы случайных величин. Пусть случайная величина X означает количество наступлений события A в серии из n испытаний, причем в каждом испытании вероятность наступления события равна p. Положим

$$X=X_1+X_2+\ldots+X_n,$$

где X_i – случайная величина, принимающая только два значения: 1, если в i-м испытании событие A произошло, и 0, если оно не произошло. Закон распределения каждой из величин X_i одинаков и задается таблицей

x_i	0	1
p_i	$q=1-p$	p

Математическое ожидание X_i равно

$$M(X_i)=0\cdot q+1\cdot p=p.$$

Отсюда, пользуясь теоремой о математическом ожидании суммы, сразу видим, что

$$M(X)=np. \qquad (2)$$

Дисперсия X_i равна (см. формулу (1.23) §6)

$$D(X_i)=(0-p)^2\cdot q+(1-p)^2\cdot p=p\cdot q\,(p+q)=pq.$$

Отсюда по теореме о дисперсии суммы

$$D(X)=npq. \qquad (3)$$

Задача 1. Стрелок делает по мишени три выстрела. Вероятность попадания в мишень при каждом выстреле равна 0,3. Построить ряд распределения числа попаданий и вычислить математическое ожидание и дисперсию указанной случайной величины.

Решение. Случайная величина X – число попаданий в мишень при 3-х выстрелах распределена по биноминальному закону, её возможные значения 0, 1, 2, 3.

$$P(x=0)=C_3^0 p^0 q^3=0{,}7^3=0{,}343;$$

$$P(x=1)=C_3^1 p^1 q^2=\frac{3!}{1!\cdot 2!}\cdot 0{,}3\cdot 0{,}7^2=0{,}441;$$

$$P(x=2)=C_3^2 p^2 q^1=\frac{3!}{2!\cdot 1!}\cdot 0{,}3^2\cdot 0{,}7=0{,}189;$$

$$P(x=3)=C_3^3 p^3 q^0=0{,}3^3=0{,}027.$$

Ряд распределения случайной величины X:

X	0	1	2	3
p	0,343	0,441	0,189	0,027

2. Распределение Пуассона

Как и закон Гаусса, распределение Пуассона может быть получено как асимптотическое для биноминального.

Рассмотрим случай, когда вероятность p положительного исхода каждого испытания в серии из n испытаний равна λ/n, где λ – некоторая постоянная величина, и укажем в этом случае новую приближенную формулу для $P_n(\kappa)$. Пусть в серии из n испытаний вероятность появления события A в каждом испытании равна λ/n. Тогда вероятность появления события A в этой серии κ раз при большом n выражается приближенной формулой

$$P_n(\kappa)=\frac{\lambda^\kappa}{\kappa!}\ell^{-\lambda}. \qquad (4)$$

Пусть теперь X – дискретная случайная величина, которая может принимать целые неотрицательные значения. Если вероятность равенства $X=\kappa$ определяется формулой (4), то мы говорим, что величина *X распределена по закону Пуассона.*

Запишем закон распределения в виде таблицы

x_i	0	1	2	…	κ	…
p_i	$e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda}{1}\cdot e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2}{2!}\cdot e^{-\lambda}$	…	$\frac{\lambda^\kappa}{\kappa!}\cdot e^{-\lambda}$	…

Легко проверить, что

$$\sum_{\kappa=0}^{\infty} p_\kappa=\ell^{-\lambda}\sum_{\kappa=0}^{\infty}\frac{\lambda^\kappa}{\kappa!}=e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}=1.$$

Для математического ожидания имеем

$$M(X)=0\cdot e^{-\lambda}+1\cdot\frac{\lambda}{1}\cdot e^{-\lambda}+2\cdot\frac{\lambda^2}{2!}\cdot e^{-\lambda}+\ldots+\kappa\cdot\frac{\lambda^\kappa}{\kappa!}\cdot e^{-\lambda}+\ldots=$$

$$=\lambda\, e^{-\lambda}\left(1+\frac{\lambda}{1}\cdot+\frac{\lambda^2}{2!}+\ldots+\frac{\lambda^{\kappa-1}}{(\kappa-1)!}+\ldots\right).$$

Но, как известно, ряд в скобках представляет собой разложение функции e^{λ} в ряд Маклорена. Поэтому математическое ожидание равно $e^{-\lambda}\cdot\lambda\cdot e^{\lambda}$ или

$$M(X)=\lambda. \qquad (5)$$

Мы выяснили, таким образом, вероятностный смысл параметра λ, входящего в закон распределения Пуассона: *параметр λ равен математическому ожиданию случайной величины*.

Нетрудно показать, что дисперсия случайной величины, распределенной по закону Пуассона, равна математическому ожиданию

$$D(X)=\lambda, \tag{6}$$

т. е. в *этом случае дисперсия равна математическому ожиданию*.

К случайным величинам, подчиненным закону Пуассона, приводит большое число задач, относящихся к вопросам массового обслуживания.

В качестве примера укажем работу телефонной станции. Можно доказать, что при выполнении некоторых условий вероятность κ вызовов за промежуток времени t определяется формулой

$$P_\kappa(t)=\frac{(at)^\kappa}{\kappa!}\cdot e^{-at}. \tag{7}$$

Если положить $at=\lambda$, то из формулы (7) следует, что случайная величина X *распределена по закону Пуассона.*

Задача 4. Среднее число вызовов, поступающих на АТС в одну минуту, равно двум. Найти вероятности того, что за 5 минут поступит 2 вызова.

Решение. По условию, $a = 2$, $t = 5$, $\kappa = 2$. Воспользуемся формулой (7).

$$P_2(5)=\frac{(2\cdot 5)^2}{2!}\cdot e^{-2\cdot 5}=0{,}000225.$$

Это событие практически невозможно.

3. Геометрическое распределение

Пусть производятся независимые испытания, в каждом из которых появляется событие A с вероятностью, равной p ($0 < p < 1$), и, следовательно, не появляется с вероятностью $q= 1- p$. Как только событие A появилось, испытания прекращаются. Следовательно, если событие A появилось в κ-м испытании, то в предшествующих κ–1 испытаниях оно не появлялось.

Обозначим через X дискретную случайную величину – число испытаний, которые произошли до первого появления события A. Очевидно, возможными значениями X являются натуральные числа: $x_1= 1$, $x_2=2$, ...

Пусть в первых κ–1 испытаниях событие A не наступило, а в κ-м испытании появилось. Вероятность этого сложного события, по теореме умножения вероятностей независимых событий,

$$P(X=\kappa)=q^{\kappa-1}p. \tag{8}$$

Полагая κ=l, 2, ... в формуле (1.54), получим геометрическую прогрессию с первым членом p и знаменателем q ($0<q<1$):

$$p,\ qp,\ q^2p, \dots,\ q^{\kappa-1}p, \dots\ . \tag{9}$$

Поэтому распределение (9) называют *геометрическим.*

Запишем закон распределения в виде таблицы

x_i	1	2	3	…	κ	…
p_i	p	qp	q^2p	…	$q^{\kappa-1}p$	…

Легко проверить, что

$$\sum_{\kappa=0}^{\infty} p_\kappa = \frac{p}{1-q} = \frac{p}{p} = 1.$$

Математическое ожидание и дисперсия случайной величины, имеющей геометрическое распределение, равны:

$$M(X)=1/p, \text{ а } D(X)=q/p^2. \qquad (10)$$

Задача 7. Из орудия производится стрельба по цели до первого попадания. Вероятность попадания в цель p = 0,6. Найти вероятность того, что попадание произойдет при третьем выстреле.

Решение. По условию, p = 0,6; q = 0,4; κ = 3. Искомая вероятность по формуле (8)

$$P(\kappa=3) = 0{,}4^2 \cdot 0{,}6 = 0{,}096.$$

Задача 8. Снайпер стреляет по замаскированному противнику до первого попадания. Вероятность промаха при отдельном выстреле равна p. Найти математическое ожидание числа промахов.

Решение. Возможные значения случайной величины X – числа промахов: 0, 1, 2, ..., κ, ...

$$P(x=\kappa) = p^\kappa (1-p).$$

Ряд распределения случайной величины X:

X	0	1	2	…	κ	…
p	$1-p$	$p(1-p)$	$p^2(1-p)$	$\cdots$	$p^\kappa(1-p)$	$\cdots$

Полученное распределение является геометрическим

$$M(X) = \frac{1}{p}.$$