2. Постановка задачи ЛП. Различные формы задач ЛП и их эквивалентность

Математические модели различных по содержательному смыслу экономических задач, рассмотренных выше, имеют много общего. Во всех примерах соответствующая математическая задача может быть сформулирована следующим образом: **Максимизировать или минимизировать заданную линейную функцию нескольких переменных при заданных линейных ограничениях на переменные.**

Это и есть постановка задачи ЛП в самом общем виде. При этом под линейным ограничением понимается любое линейное уравнение или линейное неравенство.

Функция, которую требуется максимизировать (минимизировать), называется **целевой функцией задачи.**

Любой набор значений всех переменных задачи ЛП называется **планом** задачи. План, удовлетворяющий всем ограничениям задачи, называется **допустимым.** Допустимый план, на котором достигается наибольшее (наименьшее) среди всех допустимых планов значение целевой функции, называется **оптимальным.**

Решить задачу ЛП – это значит найти ее оптимальный план $X^* = \left(x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*\right)$ и соответствующее значение целевой функции $F^* = F\left(X^*\right)$ или доказать, что оптимальных планов нет.

Задачу ЛП в общей постановке всегда можно свести к любой из двух следующих форм (частных случаев общей задачи ЛП).

Стандартная задача ЛП:

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \quad - \max, \tag{1}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases} \tag{2}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \ldots, \quad x_n \ge 0. \tag{3}$$

Каноническая задача ЛП:

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \quad - \max, \tag{4}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{5}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \ldots, \quad x_n \ge 0. \tag{6}$$

Эти две формы задачи ЛП удовлетворяют следующим условиям:

1. В качестве **направления оптимизации** в них выбрана **максимизация** целевой функции.

2. В ограничениях присутствуют требования неотрицательности (3) и (6) для **всех** переменных задачи.

3. Все остальные ограничения, кроме требования неотрицательности всех переменных, однотипны: линейные неравенства (2) – в стандартной задаче, линейные равенства (5) – в канонической.

Замечание. Любое неравенство со знаком $\geq$ можно преобразовать в эквивалентное ему неравенство со знаком $\leq$, умножая обе части неравенства на множитель (-1). Поэтому без ограничения общности можно считать, что все неравенства в ограничениях задачи ЛП имеют знак $\leq$ (или, наоборот, все неравенства имеют знак $\geq$).

Чтобы добиться выполнения условия 1 задачу **минимизации** целевой функции $F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ заменяют на задачу **максимизации** функции

$G = -F = (-c_1)x_1 + (-c_2)x_2 + \ldots + (-c_n)x_n$ при тех же ограничениях на переменные. Легко проверяется (проделайте это самостоятельно), что оптимальные планы преобразованной задачи совпадают с оптимальными планами исходной и при этом $\min F = -\max G$.

Выполнение условия 2 достигается следующим образом: в целевую функцию и все ограничения задачи вместо каждой переменной x_k произвольного знака (т. е. такой, что требование неотрицательности $x_k \geq 0$ отсутствует среди ограничений) подставляется выражение $x'_k - x''_k$; для всех вновь введенных переменных в ограничения вводятся требования неотрицательности $x'_k \geq 0,\ x''_k \geq 0.$ Смысл такой замены очевиден: число произвольного знака можно представить в виде разности двух неотрицательных чисел. Ясно, что оптимальные значения x^*_k переменных исходной задачи находятся по формулам $x^*_k = (x'_k)^* - (x''_k)^*$, где $(x'_k)^*, (x''_k)^*$ - оптимальные значения переменных преобразованной задачи.

После выполнения двух описанных выше преобразований задача ЛП общего вида сведется к задаче максимизации с требованием неотрицательности всех ее переменных; среди остальных ограничений задачи могут встречаться как равенства, так и неравенства. Чтобы свести такую задачу ЛП к стандартной форме, надо исключить все ограничения – равенства; для сведения к канонической форме – заменить систему ограничений – неравенств на эквивалентную систему ограничений, записанную в виде равенств и требований неотрицательности некоторых (дополнительно введенных) переменных.

При исключении ограничений – равенств используются известные методы линейной алгебры. Если все ограничения-равенства образуют несовместную систему линейных уравнений, то задача ЛП не имеет допустимых и тем более оптимальных планов. Если эта система совместна и имеет ранг r, то с помощью метода Гаусса некоторые r переменных задачи можно выразить через остальные. Подстановка этих выражений в целевую функцию и все ограничения-неравенства (включая и требования неотрицательности переменных) сводит задачу к **стандартной** форме; при этом число переменных уменьшается на r.

Для приведения задачи ЛП к **канонической** форме вводятся дополнительные, так называемые **балансовые**, переменные; число таких переменных равно числу ограничений-неравенств (без учета требований неотрицательности переменных) исходной задачи. Каждое ограничение – неравенство $a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n \le b_i$ заменяется на эквивалентную ему пару ограничений $a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n + S_i = b_i$, $S_i \ge 0$. В случае неравенства со знаком $\ge$ балансовая переменная S_i включается в соответствующее равенство со знаком минус.

Рассмотрим примеры применения описанных выше преобразований формы задач ЛП.

Пример 4. Привести к стандартной форме задачу ЛП

$$F = -6{,}5x_1 + 7{,}5x_3 - 23{,}5x_4 + 5x_5 \quad - \min,$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 + 4x_4 - x_5 = 12, \\ 2x_1 - x_3 + 12x_4 - x_5 = 14, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_4 - x_5 = 6, \\ 2x_1 + x_3 + x_4 \ge 10, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0, \quad x_4 \ge 0, \quad x_5 \ge 0.$$

Решение. Решаем методом Гаусса систему ограничений-равенств

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 1 & 4 & -1 & 12 \\ 2 & 0 & -1 & 12 & -1 & 14 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & -1 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 3 & 1 & 4 & -1 & 12 \\ 0 & -6 & -3 & 4 & 1 & -10 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & -6 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_5 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 3 & 1 & 4 & 12 \\ 0 & 1 & -6 & -3 & 4 & -10 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -6 \end{array}\right) \end{array}.$$

Из полученной трапециевидной формы системы последовательно выражаем x_2, x_5 и x_1 через x_3 и x_4 (обратный ход метода Гаусса):

$$x_2 = 6 - x_3 - x_4;$$

$$x_5 = -10 + 6(6 - x_3 - x_4) + 3x_3 - 4x_4 = 26 - 3x_3 - 10x_4;$$

$$x_1 = 12 + (26 - 3x_3 - 10x_4) - 3(6 - x_3 - x_4) - x_3 - 4x_4 = 20 - x_3 - 11x_4.$$

Подставим полученные выражения в целевую функцию и ограничения-неравенства; одновременно заменим задачу минимизации F на максимизацию $G = -F$:

$$G = 6{,}5(20 - x_3 - 11x_4) - 7{,}5x_3 + 23{,}5x_4 - 5(26 - 3x_3 - 10x_4) \quad - \max,$$

$$\begin{cases} 2(20 - x_3 - 11x_4) + x_3 + x_4 \ge 10, \\ 20 - x_3 - 11x_4 \ge 0, \\ 6 - x_3 - x_4 \ge 0, \\ x_3 \ge 0, \ \ x_4 \ge 0, \\ 26 - 3x_3 - 10x_4 \ge 0. \end{cases}$$

После упрощений получим задачу ЛП

$$G = x_3 + 2x_4 \quad - \max,$$

$$\begin{cases} x_3 + \ \ 21x_4 \le 30, \\ x_3 + \ \ 11x_4 \le 20, \\ x_3 + \qquad x_4 \le 6, \\ 3x_3 + 10x_4 \le 26, \end{cases}$$

$$x_3 \ge 0, \ \ x_4 \ge 0,$$

в стандартной форме, эквивалентную исходной. Если оптимальный план (x_3^*, x_4^*) и экстремальное значение целевой функции $G^* = x_3^* + 2x_4^*$ задачи ЛП в стандартной форме уже найдены, то решением исходной задачи будет план $(20 - x_3^* - 11x_4^*,\ 6 - x_3^* - x_4^*,\ x_3^*, x_4^*\ ,\ 26 - 3x_3^* - 10x_4^*)$ и значение $F^* = -G^*$.

Пример 5. Привести к канонической форме задачу ЛП

$$F = 3x_1 - 2x_2 - x_3 \quad - \min,$$

$$\begin{cases} 2x_1 - \ x_2 + x_3 \ge 2, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 \le 6, \\ x_1 + \ \ x_2 + x_3 = 4, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \ \ x_2 \ge 0.$$

Решение. В данной модели нарушены следующие требования к канонической форме: направление оптимизации минимизация ($\min$), а не максимизация ($\max$); отсутствует требование неотрицательности переменной x_3; кроме требований неотрицательности переменных $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$ среди ограничений имеются еще два неравенства. Поэтому для сведения данной задачи ЛП к канонической форме надо последовательно произвести следующие три преобразования: заменить $F = 3x_1 -$ $_1 - 2x_2 - x_3 \quad - \min$ на $G = -3x_1 + 2x_2 + x_3 \quad - \max$; везде, как в целевой функции, так и в ограничениях, заменить x_3 на $x_3' - x_3''$ и добавить к ограничениям требования $x_3' \ge 0, x_3'' \ge 0$; преобразовать два первых ограничения – неравенства в равенства с помощью балансовых переменных $S_1 \ge 0$, $S_2 \ge 0$ (S_1 вводится в первое неравенство со знаком минус, S_2 - во второе со знаком плюс). В результате получим задачу линейного программирования в канонической форме

$$\begin{gathered}G = -3x_1 + 2x_2 + (x_3' - x_3') \quad - \max,\\ 2x_1 \quad - x_2 + (x_3' - x_3') - S_1 = 2,\\ 3x_1 + 2x_2 + (x_3' - x_3') + S_2 = 6,\\ x_1 \quad + x_2 + (x_3' - x_3') \quad = 4,\\ x_1 \ge 0,\ \ x_2 \ge 0,\ \ x_3' \ge 0,\ \ x_3'' \ge 0,\ \ S_1 \ge 0,\ \ S_2 \ge 0,\end{gathered}$$

эквивалентную исходной.

Если $\left(x_1^*,\, x_2^*,\, (x_3')^*, (x_3'')^*, S_1^*, S_2^*\right)$ и $G^* = -3x_1^* + 2x_2^* + (x_3')^* - (x_3'')^*$ − оптимальный

план и значение задачи в канонической форме, то $\left(x_1^*, x_2^*, \left(x_3{}'\right)^* - \left(x_3{}''\right)^*\right)$ и

Упражнения

1. Привести модель (7) - (9) задачи о диете к каноническому виду. Какой содержательный смысл имеют балансовые переменные?
2. Привести к канонической форме следующие задачи ЛП:

а) $F = 2x_1 + x_2 \quad - \max,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1, \\ -2x_1 + 3x_2 \le 16, \\ 4x_1 + x_2 \le 12, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

б) $F = 8x_1 + x_2 + 4x_3 \quad - \min,$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 \le -1, \\ -3x_1 + x_3 \ge 0, \\ x_1 + 2x_2 = 4, \\ x_1 \ge 0,\ x_3 \ge 0. \end{cases}$$

в) $F = x_1 - x_2 + 3x_3 \quad - \min$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 \le 5 \\ x_1 + 2x_3 = 8 \\ -x_1 + 2x_2 \ge 1 \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0 \end{cases}$$

г) $F = 4x_1 - x_2 + 3x_3 \quad - \max$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_3 \le 16 \\ 6x_1 - 2x_2 - x_3 \ge 6 \\ x_1 \ge 0 \end{cases}$$

3. Привести к стандартной форме следующие задачи ЛП:

а) $F = 2x_1 + x_2 + 8x_3 \quad - \max,$

$$\begin{cases} -4x_1 + x_2 + 2x_3 = 12, \\ 6x_1 + 5x_3 - x_4 = 30, \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0. \end{cases}$$

б) $F = x_1 - x_2 + 3x_4 + x_5 \quad - \min,$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + x_5 = 15, \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_5 = 8, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0. \end{cases}$$

в) $F = x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 \quad - \min,$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 6, \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 4, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0. \end{cases}$$

г) $F = x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 \quad - \max,$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 + x_5 = -2, \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 3, \\ 2x_1 + 3x_2 + x_4 - x_5 = 6, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0. \end{cases}$$

3. Геометрическая интерпретация и графическое решение задачи ЛП

При изучении задач ЛП важную роль играет возможность геометрического описания множества всех допустимых планов и целевой функции рассматриваемой задачи. И хотя в общем случае это приводит к сложным построениям в многомерном пространстве, все главные особенности задач ЛП можно увидеть уже на простых примерах.

Пример 6. Задача об использовании ресурсов.

При производстве двух видов продукции (P_1 и P_2) используются четыре вида ресурсов: R_1, R_2, R_3, R_4. Затраты ресурсов каждого вида на производство одной единицы продукции каждого вида, имеющиеся запасы ресурсов и доходы от реализации одной единицы продукции заданы в таблице 1.

Таблица 1

Вид ресурса	Расход ресурса на единицу продукции		Запасы ресурса
	P_1	P_2	
R_1	2	3	19
R_2	2	1	13
R_3	0	3	15
R_4	3	0	18
Доход от единицы продукции	7	5	

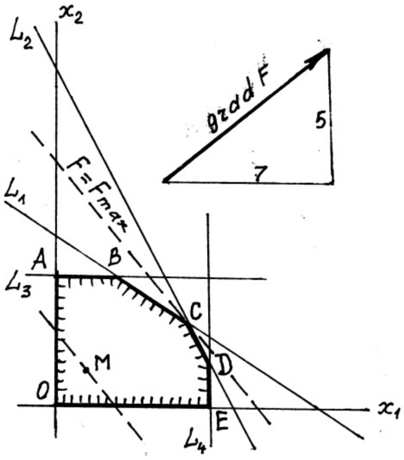
Требуется найти план производства, возможный при данных запасах и расходах ресурсов и обеспечивающий наибольший доход, а также величину этого дохода.

$$F = 7x_1 + 5x_2 \quad - \max,$$

$$
\begin{cases}
2x_1 + 3x_2 \le 19, \\
2x_1 + \ x_2 \le 13, \\
\qquad 3x_2 \le 15, \\
3x_1 \qquad \le 18, \\
x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.
\end{cases}
$$

Каждому плану (x_1, x_2) задачи соответствует вполне определенная точка на плоскости x_1Ox_2, именно точка с координатами x_1 и x_2. Допустимым планам соответствуют точки, координаты которых удовлетворяют всем ограничениям-неравенствам. Решениями первого неравенства $2x_1 + 3x_2 \le 19$ будут все решения уравнения $2x_1 + 3x_2 = 19$ и все решения неравенства $2x_1 + 3x_2 < 19$. Как известно из аналитической геометрии, линейное уравнение $2x_1 + 3x_2 = 19$ задает на плоскости определенную прямую L_1. Эту прямую можно построить, например, по двум точкам ее пересечения с осями координат: $(0;19/3)$ и $(19/2;0)$. Прямая L_1 делит всю плоскость на две полуплоскости: для точек одной из них выполнено неравенство $2x_1 + 3x_2 < 19$, для точек другой – неравенство $2x_1 + 3x_2 > 19$. Начало координат $(0;0)$ расположено в первой из этих полуплоскостей, так как $2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 < 19$.

Из сказанного выше ясно, что геометрически множество всех планов, удовлетворяющих неравенству $2x_1 + 3x_2 \le 19$, представляет собой ту из полуплоскостей с граничной прямой L_1, которая содержит начало координат (сама прямая L_1 включается в эту полуплоскость). Аналогично строятся граничные прямые и полуплоскости, соответствующие остальным ограничениям-неравенствам. Например, для третьего неравенства $3x_2 \le 15$ граничной будет горизонтальная (параллельная оси Ox_1) прямая $L_3 : x_2 = 5$, а «решения» этого неравенства – все точки на прямой L_3 и ниже нее. Граничными прямыми для неравенств $x_1 \ge 0$ и $x_2 \ge 0$ являются координатные оси Ox_2 и Ox_1 соответственно.



На рисунке 1 построены все граничные прямые; расположение соответствующих полуплоскостей показано штрихами. Любой допустимый план содержится в каждой из этих полуплоскостей, а множество (область) всех допустимых планов совпадает с пересечением (общей частью) всех полуплоскостей и в рассматриваемой задаче представляет собой выпуклый шестиугольник OABCDE. Геометрическим описанием целевой функции $F = 7x_1 + 5x_2$ может служить семейство ее линий уровня

Рисунок 1

Все линии семейства (при различных d) – прямые, перпендикулярные одному и тому же вектору $\operatorname{grad} F$ с координатами $\{\partial F/\partial x_1; \partial F/\partial x_2\}=\{7, 5\}$ и, следовательно, параллельные между собой. Во всех точках прямой $7x_1 + 5x_2 = d$ функция F, по определению, принимает одно и то же значение d; сдвиг этой прямой параллельно самой себе в направлении вектора $\operatorname{grad} F$ дает линию уровня $7x_1 + 5x_2 = d_1$, где $d_1 > d$, так как градиент функции указывает направление ее наискорейшего возрастания.

Чтобы найти оптимальный план $X^* = (x_1^*, x_2^*)$ задачи, выберем произвольную точку M внутри области допустимых планов, проведем через нее прямую, перпендикулярную вектору $\operatorname{grad} F$ (на рис. 1 изображена пунктиром) и будем перемещать эту прямую параллельно самой себе в направлении $\operatorname{grad} F$ до тех пор, пока перемещаемая прямая будет содержать хотя бы одну точку области допустимых планов. В «крайнем» возможном положении (рис. 1) линия уровня пройдет через точку C, в которой и достигается $\max F(x_1, x_2)$ среди всех допустимых планов (x_1, x_2). Координаты точки C находятся из системы

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 19 & \text{(уравнение прямой } L_1\text{)} \\ 2x_1 + \ \ x_2 = 13 & \text{(уравнение прямой } L_2\text{)} \end{cases}$$

Отсюда $X^* = (5, 3)$, $F^* = 7 \cdot 5 + 5 \cdot 3 = 50.$

Задача ЛП (1) - (3) является моделью задачи о ресурсах с исходными данными, представленными в таблице 1. Найденное выше решение задачи (1) - (3) означает, что при данных условиях производства 50 является наибольшим из возможных значений дохода. Такой доход может быть достигнут только тогда, когда производятся 5 единиц продукции P_1 и 3 единицы продукции P_2.

Аналогично разобранному примеру можно дать геометрическую интерпретацию **любой** задачи ЛП с **двумя** переменными и ограничениями-**неравенствами,**

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 \quad - \max(\min), \tag{7}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \ \dots \\ a_{m1} + a_{m2}x_2 \le b_m \end{cases} \tag{8}$$

(требования неотрицательности $x_1 \ge 0, x_2 \ge 0$ считаем включенными в (8) в виде $(-1)x_1 + 0 \cdot x_2 \le 0,\ 0 \cdot x_1 + (-1)x_2 \le 0$). **Область допустимых планов** задачи (7) - (8) получается пересечением m **полуплоскостей,** задаваемых неравенствами (8), и представляет собой (в зависимости от расположения этих полуплоскостей) либо пустое множество (рис. 2а), либо единственную точку (рис. 2б), либо выпуклый **многоугольник** (рис. 2в), либо выпуклую **многоугольную область** (рис. 2г).

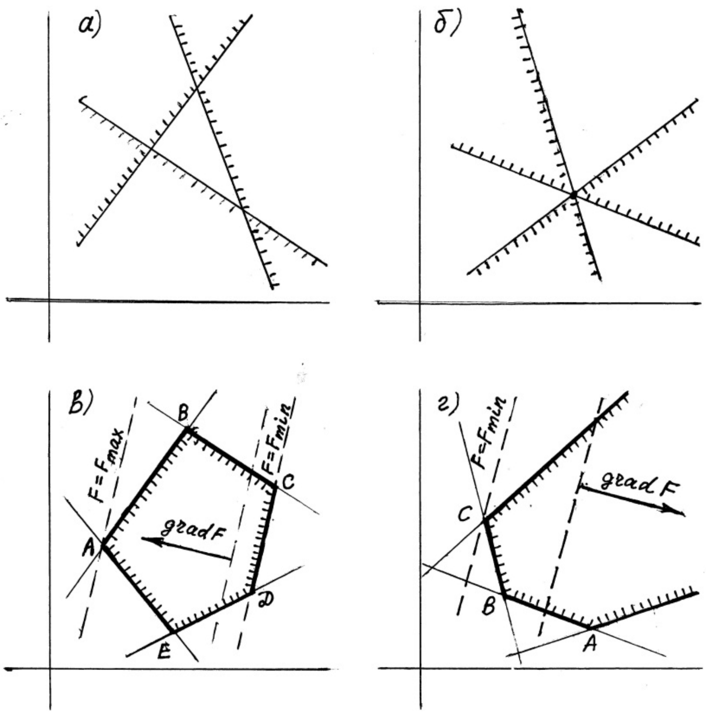


Рис. 2

В первом случае задача ЛП не имеет решения, так как у нее нет допустимых планов; во втором случае единственный допустимый план является оптимальным. В остальных случаях оптимальные планы находятся с помощью **линий уровня** целевой функции (7), пересекающих область допустимых планов. Все эти линии – прямые, перпендикулярные вектору $\operatorname{grad} F = \{c_1; c_2\}$. Оптимальные планы задачи на $\max F$ лежат на прямой, «крайней» в направлении вектора $\{c_1,\ c_2\}$, а задачи на $\min F$ - на прямой, «крайней» в направлении противоположного вектора $\{-c_1,\ -c_2\}$. В зависимости от вида области допустимых планов и направления $\operatorname{grad} F$ возможны следующие случаи:

а) задача ЛП (7) - (8) имеет **единственный** оптимальный план **в вершине** многоугольника или многоугольной области ($\max F$ на рис. 2в достигается в точке A, $\min F$ на рис. 2г– в точке C);

б) множество оптимальных планов **бесконечно** и состоит из всех точек некоторого **ребра** на границе области допустимых планов ($\min F$ на рис. 2в достигается во всех точках ребра CD, включая **вершины** C и D), или в случае неограниченной многоугольной области, из всех точек граничного **луча** (постройте графическое изображение соответствующей задачи ЛП самостоятельно);

в) множество оптимальных планов **пусто** из-за **неограниченности** целевой функции в области допустимых планов ($F \to +\infty$ на рис. 2г).

Упражнения

4. Каждая из деталей А и В должна пройти обработку на каждом из трех станков. Затраты времени на обработку одной детали и максимальное допустимое время работы каждого из станков заданы в таблице:

Станки	Норма времени на обработку детали, ч		Время работы станка, ч
	А	В	
1	0,2	0,1	100
2	0,2	0,5	180
3	0,1	0,2	100

Деталей А требуется произвести не менее 300, деталей В не более 200. Прибыль при реализации детали А составляет 10 руб., детали В – 16 руб. Определить производственную программу, максимизирующую прибыль.

5. На мебельной фабрике из стандартных листов фанеры вырезаются заготовки трех типов А, В, С. Используются два способа раскроя листа. Количество получаемых из одного листа заготовок и отходы для каждого способа раскроя, а также минимальная потребность в заготовках заданы в таблице:

Вид заготовки	Потребность в заготовках	Кол-во заготовок из одного листа	
		1-й способ	2-й способ
А	24	2	6
В	31	5	4
С	18	2	3
Отходы, $см^2$		12	16

Как получить необходимое количество заготовок типов А, В, С с минимальными отходами?

6. При разведении лисиц и песцов на звероферме используют три вида кормов. Расходы кормов на одно животное , запасы кормов и прибыль от реализации одной шкурки заданы в таблице:

Вид корма	Запасы кормов	Потребность в корме на одно животное	
		Лисица	Песец
1	180	2	3
П	240	4	1
Ш	426	6	7
Прибыль		16	12

Сколько лисиц и песцов надо содержать на ферме для получения максимальной прибыли?

7. В суточный рацион включаются два продукта питания $П_1$ и $П_2$, причем продукта $П_1$ не более 200 единиц. Содержание витаминов А и В в единице каждого из продуктов, минимальная суточная потребность в витаминах и стоимость единицы каждого продукта заданы в таблице:

Витамины	Минимальная потребность в витамине	Содержание витамина в единице продукта	
		$П_1$	$П_2$
А	120	0,2	0,2
В	160	0,4	0,2
Стоимость единицы продукта		2	4

Определить рацион минимальной стоимости.

8. Хозяйство имеет 600 га пашни, трудовые ресурсы составляют 4000 чел.-дн. Урожайность зерновых и кормовых культур с 1 га – 28 и 36 ц, затраты труда – 5 и 10 чел.-дн. на гектар. Определить наиболее эффективное сочетание зерновых и кормовых культур при условии, что под кормовые культуры должно быть занято не менее 100 га пашни, а доходы от 1 ц зерновых и 1 ц кормовых культур совпадают.

9. Используя замечание в конце данного параграфа, найти оптимальные планы и значения целевых функций задач ЛП из упражнений 2б), 2в), 3а), 3в), 3г). Во всех случаях рассмотреть оба направления оптимизации.

10. Найти $\max F$, $\min F$ и соответствующие оптимальные планы задачи ЛП с ограничениями $x_1 + x_2 + 2x_3 \le 2$, $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$, $x_3 \ge 0$, если

а) $F = -x_1 + x_2 + x_3$; б) $F = -x_1 - x_2 + x_3$;

в) $F = x_1 + x_2$; г) $F = 2x_1 + 2x_2 + 4x_3$.

Как изменится решение, если удалить ограничение $x_3 \ge 0$?

11. Показать, что а) для любой вершины шестиугольника OABCDE (пример 6, рис.1) два ограничения-неравенства выполнены как равенства; б) допустимый план $(x_1,\ x_2)$ задачи (23)-(24) является вершиной области допустимых планов тогда и только тогда, когда для x_1, x_2 некоторые два из неравенств (24) выполнены как равенства, причем коэффициенты при x_1 и x_2 в этих неравенствах образуют отличный от нуля определитель второго порядка. Сформулировать и обосновать утверждение, аналогичное б), для стандартной задачи ЛП с тремя переменными.