6. Двойственность в линейном программировании

Понятие **двойственности** является одним из важнейших в теории ЛП. С каждой задачей ЛП связывается другая вполне определенная задача, которая называется **двойственной** к исходной **(прямой)** задаче. Изучение связей между прямой и двойственной задачами помогает понять свойства каждой из них. Понятие двойственности и связанный с ним **двойственный симплекс-метод** решения задач ЛП используются при анализе зависимости оптимальных планов от изменений в условиях задачи ЛП.

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \quad - \max, \tag{1}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots a_{mn}x_n \le b_m, \end{cases} \tag{2}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \ldots, \quad x_n \ge 0. \tag{3}$$

Двойственной к стандартной задаче (14) – (16) называется задача ЛП от m переменных $y_1, \ldots, y_m$ вида

$$G = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \quad - \min, \tag{9}$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \ge c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \ge c_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \ge c_n, \end{cases} \tag{10}$$

$$y_1 \ge 0, \ y_2 \ge 0, \ldots, y_m \ge 0. \tag{11}$$

Связь между условиями **прямой** задачи (1) – (3) и **двойственной** (9) – (11) показана схематически в таблице 5:

Таблица 5

$$\begin{array}{c|cccccc|c|c|}
 & x_1 & x_2 & \ldots & x_j & \ldots & x_n & & G \\
\hline
y_1 & a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n} & \le & b_1 \\
y_2 & a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2j} & \ldots & a_{2n} & \le & b_2 \\
. & . & . & \ldots & . & \ldots & . & . & . \\
y_i & a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{ij} & \ldots & a_{in}. & \le & b_i \\
. & . & . & \ldots & . & \ldots & . & . & . \\
y_m & a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mj} & \ldots & a_{mn} & \le & b_m \\
\hline
 & \ge & \ge & \ldots & \ge & \ldots & \ge & & \downarrow \ \min \\
F & c_1 & c_2 & \ldots & c_j & \ldots & c_n & \rightarrow \max &
\end{array}$$

Ограничения и целевая функция прямой задачи «записаны» в **строках** таблицы 5, ограничения и целевая функция двойственной задачи «читаются» по **столбцам.** Ограничению с номером i прямой задачи соответствует переменная y_i двойственной; переменной x_j прямой задачи - j – ое ограничение двойственной.

Пример 1. запасы ресурсов (последний столбец), доходы от реализации одной единицы каждого вида продукции (последняя строка), технологическая матрица (остальная часть таблицы). Построить математическую модель задачи. Найти оптимальный план производства, максимальный доход и остатки ресурсов.

2	0	1	9
2	1	0	10
2	1	1	11
1	2	2	13
12	4	5	

Решение. Воспользуемся схемой из таблицы 5. Рядом с ограничениями каждой из задач записаны в скобках соответствующие переменные другой задачи:

Прямая задача

$$F = 12x_1 + 4x_2 + 5x_3 \quad - \max,$$

$$\begin{array}{ll} (y_1) & 2x_1 \qquad\quad + x_3 \le 9, \\ (y_2) & 2x_1 + x_2 \qquad\quad \le 10, \\ (y_3) & 2x_1 + x_2 + x_3 \le 11, \\ (y_4) & x_1 + 2x_2 + 2x_3 \le 13, \end{array}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x \ge 0.$$

Двойственная задача

$$G = 9y_1 + 10y_2 + 11y_3 + 13y_4 \quad - \min,$$

$$\begin{array}{ll} (x_1) & 2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + y_4 \ge 12, \\ (x_2) & \qquad\quad y_2 + y_3 + 2y_4 \ge 4, \\ (x_3) & y_1 \qquad\quad y_3 + 2y_4 \ge 5, \end{array}$$

$$y_1 \ge 0,\ y_2 \ge 0,\ y_3 \ge 0,\ y_4 \ge 0.$$

Двойственную задачу примера 1 можно привести к стандартному виду, затем записать условие двойственной к ней и снова привести к стандартному виду. Проверьте, что результатом таких преобразований будет исходная (прямая) задача. Нетрудно понять, что и в общем случае **задача, двойственная к двойственной совпадает с исходной.** Поэтому прямую и двойственную задачи называют также **взаимодвойственными** или **двойственной парой.**

В теории ЛП доказаны следующие утверждения (**теоремы двойственности),** устанавливающие связи между свойствами задач двойственной пары.

Теорема 1. Если одна из задач двойственной пары разрешима, т. е имеет оптимальные планы, то разрешима и другая задача. При этом для оптимальных планов X^* и Y^* имеет место равенство $F(X^*) = G(Y^*)$.. Для разрешимости одной (а, значит, и другой) задачи необходимо и достаточно, чтобы каждая из них имела хотя бы один допустимый план.

Теорема 2. Для того, чтобы допустимые планы $X^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ и $Y^* = (y_1^*, \ldots y_m^*)$ пары двойственных задач (1) – (3) и (9) – (11) были их оптимальными планами, необходимо и достаточно, чтобы они удовлетворяли системе уравнений

$$x_j^*\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i^* - c_j\right) = 0, \qquad 1 \le j \le n;$$

$$y_i^*\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* - b_i\right) = 0, \qquad 1 \le i \le m.$$

Теорема 1 – центральный результат всей теории ЛП. Теорема 2 позволяет найти оптимальный план одной из задач двойственной пары по оптимальному плану другой.

Пример 2. Решить задачу ЛП

$$F = 6x_1 + 9x_2 + 15x_3 \quad - \min,$$

$$-x_1 + x_2 + 3x_3 \ge 4,$$

$$2x_1 + x_2 - x_3 \ge 2,$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0.$$

Решение. Запишем условие двойственной задачи

$$G = 4y_1 + 2y_2 \quad - \max,$$

$$(x_1) \quad -y_1 + y_2 \le 6,$$

$$(x_2) \quad y_1 + y_2 \le 9,$$

$$(x_3) \quad 3y_1 - y_2 \le 15,$$

$$y_1 \ge 0, \quad y_2 \ge 0.$$

Эту задачу можно решить графически (проделайте самостоятельно), в результате получим $G^* = 30,\ y_1^* = 6,\ y_2^* = 3$. По теореме 1 исходная (прямая) задача также имеет оптимальный план $X^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*)$. Чтобы найти X^*, подставим $y_1^* = 6$, $y_2^* = 3$ в систему уравнений из теоремы 2:

$$\left.\begin{aligned} &x_1^*(-6+3-6) = 0,\\ &x_2^*(6+3-9) = 0,\\ &x_3^*(3\cdot 6 - 3 - 15) = 0, \end{aligned}\right|$$

используются переменные прямой и ограничения двойственной задачи

$$\left.\begin{aligned} &6(-x_1^* + x_2^* + 3x_3^* - 4) = 0,\\ &3(2x_1^* + x_2^* - x_3^* - 2) = 0. \end{aligned}\right| \rightarrow$$

используются переменные двойственной и ограничения прямой задачи.

Второе и третье уравнения представляют собой тождества 0 = 0. Из остальных уравнений находим единственный оптимальный план исходной задачи $x_1^* = 0$, $x_2^* = 5/2,\ x_3^* = 1/2$. Для определения F^* даже не обязательно подставлять эти числа в выражение для целевой функции F, так как из теоремы 1 следует $F^* = G^* = 30$ (проверьте подстановкой).

В заключение выясним **экономический смысл** оптимальных значений переменных **двойственной задачи** (9) – (11) в случае, когда прямая задача (1) – (3) рассматривается как модель **задачи о ресурсах.** Напомним, что в этом случае правые части $b_1, \ldots, b_m$ ограничений прямой задачи (эти же числа – коэффициенты целевой функции G двойственной задачи) представляют собой запасы ресурсов, а величина $\max F = F^*$ – максимально возможный доход от реализации всей произведенной продукции. Предположим, что $Y^* = \left(y_1^*, \ldots, y_m^*\right)$ – единственный оптимальный план двойственной задачи. Из первой теоремы двойственности следует, что

$$F^* = G^* = b_1 y_1^* + \ldots + b_m y_m^* \ .$$

Из последнего равенства видно, что при $y_i^* = 0$ малые изменения запаса i-го ресурса не меняют величину максимального дохода F^*; такие ресурсы называются **недефицитными.** Ресурсы, для которых $y_i^* > 0$, называются **дефицитными** - увеличение (уменьшение) из запасов увеличивает (уменьшает) доход F^*. Числа $y_1^*, \ldots, y_m^*$ определяют скорость возрастания F^* при увеличении соответствующего запаса и называются **ценностями** или **теневыми ценами ресурсов** в данных условиях производства; задача, двойственная к задаче о ресурсах, называется **задачей о ценности ресурсов.**

Используя понятие дефицитности и теневых цен ресурсов, можно дать экономическое истолкование постановке двойственной задачи (9) – (11) и утверждениям теорем двойственности. В частности, вторая группа уравнений теоремы 2 означает, что дефицитные ресурсы $(y_i^* > 0)$ в оптимальных планах производства расходуются полностью $(S_i^* = 0)$, а все ресурсы, которые расходуются не полностью $(S_i^* > 0)$, являются недефицитными $\left(y_i^* = 0\right)$.

Решить задачу ЛП, используя графический метод решения задачи, двойственной к исходной:

а) $F = 4x_1 + 24x_2 + 20x_3 + 6x_4 - \quad \min$,

$$\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 + 5x_3 \geq 2, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 \geq 5, \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

б) $F = 4x_1 + 6x_2 + 9x_3 + 6x_4 - \quad \min$,

$$\begin{cases} 2x_1 + x_3 + 3x_4 \leq 30, \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 20, \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

19. Построить двойственную задачу, решить одну из них и записать оптимальный план и записать оптимальный план другой задачи:

а) $F = 3x_1 + 8x_2 + 5x_3 + \quad \max$,

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 4, \\ x_1 + 2x_3 \leq 7, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 12, \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, \geq 0.$$

б) $F = x_1 + 3x_2 + 2x_3 - \quad \min$,

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 \geq 5, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 10 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 2, \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, \geq 0.$$