Знакоположительные ряды. Необходимый признак

Теорема 2. Если ряд (1.2) сходится, то его общий член a_n стремится к нулю.

Следствие 1. ***Если $n-$й член стремится к нулю, еще не следует, что ряд сходится, ряд может и расходиться***.

Пример 1. Ряд $\frac{2}{4}+\frac{4}{7}+\frac{6}{10}+\ldots+\frac{2n}{3n+1}+\ldots$

расходится, так как

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{3n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3+\frac{1}{n}}\right)=\frac{2}{3}\neq 0.$$

При вычислении предела воспользовались тем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

Подчеркнем, что рассматриваемый признак является только необходимым, но не является достаточным, т.е. ***из того, что член стремится к нулю, еще не следует, что ряд расходится***, ряд может и расходиться. Примером такого ряда может служить ***гармонический ряд*** (1.5). Он расходится, хотя $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. Чтобы доказать это, напомним, что

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e,\ \text{т.е.}\ \left(\frac{n+1}{n}\right)^n<e\ . \qquad (1.17)$$

Логарифмируя неравенство (2.17) по основанию *e*, получим

$$\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)^n<\ln l\ \ ,\ \text{или}\ \ n\ln\frac{n+1}{n}<1.$$

Отсюда

$$\ln\frac{n+1}{n}<\frac{1}{n}\ \ ,\text{или}\ \ \ln(n+1)-\ln(n)<\frac{1}{n}. \qquad (1.18)$$

Подставим в (2.18) поочередно $n=1,2,3,...,n-1,n$. Получаем неравенства:

$$\ln 2<1,\ln 3-\ln 2<\frac{1}{2},\ln 4-\ln 3<\frac{1}{3},$$

- -

$$\ln n-\ln(n-1)<\frac{1}{n-1},\ln(n+1)-\ln n<\frac{1}{n}.$$

Сложив почленно эти неравенства, получаем

$$\ln(n+1)<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n},$$

т.е. частичная сумма гармонического ряда $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} > \ln(n+1)$.

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} \ln(n+1) = \infty$, получаем $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, следовательно, гармонический ряд расходится. Существует множество рядов, для которых $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, но которые тем не менее расходятся.

Пример 2. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Решение. Заметим, что $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, т.е. необходимое условие сходимости выполнено. Частичная сумма

$$S_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{n}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} = n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}},$$

поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} S_n \geq \lim\limits_{n\to\infty} n \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} = \infty$, а это значит, что ряд расходится по определению.

2) Если ряд сходится, то последовательность его частных сумм ограничена.

Однако, этот признак также не является достаточным.

Например, ряд 1-1+1-1+1-1+ … $+(-1)^{n+1}+\ldots$ расходится, т.к. расходится последовательность его частных сумм в силу того, что

$$S_n = \begin{cases} 0, & \text{при четных } n; \\ 1, & \text{при нечетных } n. \end{cases}$$

Однако, при этом последовательность частных сумм ограничена, т.к. $|S_n| < 2$ при любом n.

Задачи для решения в аудитории

Задача. Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ расходится, если:

а) $u_n = \dfrac{n^2 - 3n + 10}{10n^2 - 3n + 1}$; б) $u_n = \left(\dfrac{3n-1}{3n+2}\right)^{2n}$;

в) $u_n = n \sin \dfrac{\pi}{2n+1}$; г) $u_n = \dfrac{2^{n+1}+1}{2^{n+3}+3}$.

Задача 1

Доказать расходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, используя необходимый признак сходимости.

1. $$u_n = \sqrt{\frac{3n+4}{5n+1}}$$

2. $$u_n = \frac{n+2}{\sqrt[3]{n^3+2n+4}}$$

3. $$u_n = 3^{-\frac{1}{5^n}} \cdot \frac{n+1}{2n+3}$$

4. $$u_n = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^n$$

5. $$u_n = \sqrt{\frac{4n-1}{100n+36}}$$

6. $$u_n = \cos\frac{\pi}{3^n}$$

7. $$u_n = \operatorname{tg}\frac{\pi n}{4n+1}$$

8. $$u_n = \left(\frac{n-3}{n}\right)^n$$

9. $$u_n = \frac{\sqrt{3n^2-4n}}{4n+5}$$

10. $$u_n = \frac{\pi\left(n^2+2n-1\right)}{6n^2-5n+6}$$

11. $$u_n = e^{\frac{n+1}{n^3+2n^2+3}}$$

12. $$u_n = \cos\frac{\pi n+1}{6n^2+5n+4}$$

13. $$u_n = \sqrt[3]{\frac{n+1}{8n+7}}$$

14. $$u_n = \left(n^2+1\right)\sin\frac{\pi}{n^2}$$

15. $$u_n = \frac{6\cdot 3^n+2^{2n}}{7\cdot 2^{2n}-3^{n+1}}$$

16. $$u_n = \frac{2n^2+3n-1}{10n^2+15n+3}$$

17. $$u_n = \sin\frac{\pi n+3}{3n+\pi}$$

18. $$u_n = \left(\frac{2n-1}{2n+1}\right)^{3n}$$

19. $$u_n = \sqrt{n^2+n}-\sqrt{n^2+1}$$

20. $$u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{3\sqrt{n}}{2n+1}}$$

21. $$u_n = \pi n\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{10n+1}$$

22. $$u_n = \cos\frac{\pi}{2n}-\sin\frac{\pi}{4n}$$

23. $$u_n = \frac{5\cdot 2^n+2\cdot 5^n}{2\cdot 5^{n+1}}$$

24. $$u_n = \left(\frac{4n-1}{100n+27}\right)^{\frac{n}{2n+5}}$$

25. $$u_n = \frac{n}{\sqrt{n^2+4}+\sqrt{9n^2+1}}$$

26. $$u_n = \left(\frac{3}{5}\right)^{\frac{n+1}{n\sqrt{n+2}}}$$

27. $u_n = \cos^2 \dfrac{\pi n + 4}{4n + \pi}$

28. $u_n = \sqrt{n^2 + 3n} - \sqrt{n^2 + n}$

29. $u_n = \cos \dfrac{\pi n}{4n + 1}$

30. $u_n = \ln^2 \dfrac{4n - 1}{5n + 7}$

Признак сравнения

К числу признаков сходимости можно отнести также всякого рода теоремы, позволяющие сводить выяснение вопроса о сходимости некоторого данного ряда к аналогичному вопросу о другом ряде, который устроен более просто или хотя бы более знакомый.

Эти теоремы обычно состоят в сравнении членов исследуемого ряда с членами другого ряда, поведение которого уже выяснено. Поэтому они называются *признаками сравнения*.

Теорема 1. Пусть даны два ряда с неотрицательными членами:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots, \; a_n \geq 0. \qquad (1.19)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots, \; b_n \geq 0. \qquad (1.20)$$

Если $b_n \leq a_n$ для любого n, то из сходимости ряда (1.19)следует сходимость ряда (1.20) и сумма ряда (1.20) не превосходит сумму ряда (1.19); из расходимости ряда (1.20) следует расходимость ряда (1.19).

Замечание 1. Утверждение теоремы остается в силе, если существует натуральное N такое, что для любого $n \geq N$ выполняется неравенство $b_n \leq a_n$.

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{1}{\lg 2} + \frac{1}{\lg 3} + \ldots + \frac{1}{\lg n} + \ldots = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\lg n}.$$

Решение. Сравним данный ряд с гармоническим.

Имеем $\ln n \leq n$, значит, $\dfrac{1}{\ln n} \geq \dfrac{1}{n}$.

Так как гармонический ряд $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \ldots + \dfrac{1}{n} + \ldots$ расходится, то и данный ряд расходится.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд

$$1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[3]{n}} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}.$$

Решение. Сравним данный ряд с гармоническим рядом. Имеем $\sqrt[3]{n} \leq n$, значит, $\dfrac{1}{\sqrt[3]{n}} \geq \dfrac{1}{n}$.

Так как гармонический ряд расходится, то и данный ряд расходится.

Пример 3. Исследовать на сходимость ряд

$$1+\frac{1}{n\cdot 5}+\frac{1}{n\cdot 5^2}+\frac{1}{n\cdot 5^3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot 5^n}+\ldots=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\cdot 5^n}.$$

<u>Решение.</u> Сравним данный ряд с рядом геометрической прогрессии $1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{5^n}+\ldots$, который сходится. Имеем

$$\frac{1}{n\cdot 5^n}\le\frac{1}{5^n}.$$

Следовательно, данный ряд сходится.

Пример 4. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Решение. Заметим, что $\lim_{n\to\infty}u_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}=0$, т.е. необходимое условие сходимости выполнено. Частичная сумма

$$S_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}>\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}=n\cdot\frac{1}{\sqrt{n}},$$

поэтому $\lim_{n\to\infty}S_n\ge\lim_{n\to\infty}n\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}=\infty$, а это значит, что ряд расходится по определению.

Несмотря на простоту формулировки признака сравнения, на практике более удобна следующая теорема, являющаяся его следствием.

Теорема 2. Если $a_n>0$, $b_n>0$ и существует предел $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=h$, где h – число, отличное от нуля, то ряды $\sum a_n$ и $\sum b_n$ ведут одинаково в смысле сходимости.

В качестве ряда, используемого для сравнения с данным, часто выбирают ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$; $p>0$. Такой ряд называется *рядом Дирихле*. В примерах 2 и 4 было показано, что ряд Дирихле с $p=\frac{1}{3}$ и $p=\frac{1}{2}$ расходится. Можно показать, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ при $p>1$сходится, а при $p<1$ расходится.

Если $p=1$, то получаем гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

Гармонический ряд расходится.

Пример 5. Исследовать сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)=\left(e^{\frac{1}{1}}-1\right)+\left(e^{\frac{1}{2}}-1\right)+\ldots+\left(e^{\frac{1}{n}}-1\right)+\ldots.$$

Решение.

Возьмем в качестве вспомогательного гармонический ряд, составим соотношение

$$\frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}$$

и вычислим его предел, пользуясь правилом Лопиталя:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{1}{n^2}e^{\frac{1}{n}}}{-\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}}=1$$

Поэтому рассмотренный выше ряд должен расходиться.

Пример 6. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3n^2+5n+1}$ с помощью предельного признака сравнения.

Решение. Так как при достаточно больших n $2n-1\sim 2n$, а $3n^2+5n+1\sim 3n^2$, то $u_n=\frac{2n-1}{3n^2+5n+1}\sim\frac{2n}{3n^2}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{n}$. Выберем для сравнения с данным гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, т.е. $b_n=\frac{1}{n}$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)\cdot n}{3n^2+5n+1}=\frac{2}{3}\quad\text{(см. [5]).}$$

Поскольку предел конечен и отличен от нуля и гармонический ряд расходится, то расходится и данный ряд.

Пример 7. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+3n+4}{4n^4+5n^2+1}$ с помощью предельного признака сравнения.

Решение. При достаточно больших n имеем $n^2+3n+4\sim n^2$, $4n^4+5n^2+1\sim 4n^4$, поэтому $b_n=\frac{n^2}{n^4}=\frac{1}{n^2}$ – общий член ряда, с которым будем сравнивать данный:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n^2+3n+4\right)n^2}{4n^4+5n^2+1}=\frac{1}{4}\quad.$$

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится (ряд Дирихле с $p=2$), поэтому данный ряд также сходится.

Пример 8. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n}\,\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{3}}{n+1}$ с помощью предельного признака сравнения.

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{arctg}\frac{\sqrt{3}}{n+1}=0$, поэтому бесконечно малую $\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{3}}{n+1}$ можно заменить на эквивалентную ей при $n\to\infty$ величину $\frac{\sqrt{3}}{n+1}$ так как $\mathrm{arctg}\, t \sim t$ при $t\to 0$ (см. [5]).

Тогда $b_n=\frac{\sqrt{n}}{n}=\frac{1}{\sqrt{n}}$ – общий член ряда для сравнения.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\,\mathrm{arctg}\frac{\sqrt{3}}{n+1}\cdot\sqrt{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot\sqrt{3}}{n+1}=\sqrt{3}.$$

Так как предел конечен и не равен нулю, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ расходится $\Big($ряд Дирихле с $p=\frac{1}{2}\Big)$, то данный ряд расходится.

Задачи для решения в аудитории

Задание 1. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$, если

а) $u_n=\frac{1}{2^n\cdot n}$; б) $u_n=\frac{1}{\sqrt[3]{n}}$.

Задание 2. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ с помощью предельного признака сравнения, если

а) $u_n=\frac{2n^2+3}{n^3+5n^2+1}$; б) $u_n=\frac{3n^3+2n^2+4}{6n^5+2n^4+1}$; в) $u_n=\sqrt{n}\,\sin\frac{2\pi}{n^2+1}$.

Ответы

1. а) Ряд сходится, б) ряд расходится. 2. а) Ряд расходится, б) ряд сходится, в) ряд сходится.

Задача 2

Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ с помощью предельного признака сравнения.

1. $u_n = \dfrac{2n^2+5n+1}{\sqrt{n^6+3n^2+2}}$

2. $u_n = \dfrac{1}{n^2-n}$

3. $u_n = \dfrac{n^2+n^3}{\sqrt{n^8+n^2+9n}}$

4. $u_n = \dfrac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}$

5. $u_n = \dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}$

6. $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)(n+2)}}$

7. $u_n = \dfrac{\sqrt[3]{n}}{(2n-1)\left(5\sqrt[3]{n}-1\right)}$

8. $u_n = \dfrac{1}{n\sqrt[3]{n}+\sqrt{n}}$

9. $u_n = \dfrac{2^n+n^2}{5^n+n^5}$

10. $u_n = \sin\dfrac{\pi}{4n^2}$

11. $u_n = \operatorname{tg}\dfrac{\pi n}{4n^2+4n+1}$

12. $u_n = \dfrac{2n+1}{\sqrt{n^3+n}+\sqrt[3]{n^2}}$

13. $u_n = \dfrac{n+1}{n+3}\arcsin\dfrac{1}{n^2+2}$

14. $u_n = \sqrt{\dfrac{n^2}{n^6+4n^3+2n^2+1}}$

15. $u_n = \dfrac{3n^2-5n+6}{\sqrt{n^7+4n^5+2}}$

16. $u_n = \dfrac{3^n+2n^2}{2^{n+4}+4n^4+2n^2+3}$

17. $u_n = \dfrac{\sqrt{3n+2}}{n^4+3n^2+2n}$

18. $u_n = \pi n\cdot\operatorname{tg}\dfrac{1}{10n^3}$

19. $u_n = (n+1)\operatorname{arctg}\dfrac{1}{(n+2)^2}$

20. $u_n = \dfrac{n}{\sqrt{(n+1)(n+2)(n+3)}}$

21. $u_n = \dfrac{n^2+2n+5}{n^4+2n^2+5}$

22. $u_n = \dfrac{3^n}{3^{2n}+3^{n+1}+4}$

23. $u_n = n\sin\dfrac{\pi}{2n^3}$

24. $u_n = \dfrac{1}{(4n-1)(4n+3)}$

25. $u_n = \sin\dfrac{2\pi n}{4n^2+1}$

26. $u_n = \dfrac{1}{n}tg^2\dfrac{\pi}{\sqrt{n}}$

27. $u_n = \dfrac{\sqrt[3]{n}}{\sqrt{n^5+2}}$

28. $u_n = n^2 \operatorname{tg}^4 \dfrac{\pi}{n}$

29. $u_n = \dfrac{\operatorname{arctg} \dfrac{\pi}{4\sqrt{n}}}{\sqrt[3]{n+3}}$

30. $u_n = \dfrac{3^n}{6^n + n - 1}$

Признак сходимости Даламбера

Теорема 1. Признак Даламбера (Жан Лерон Даламбер (1717 – 1783) – французский математик). Пусть дан ряд (4.19) с положительными членами. Допустим, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

существует и

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \rho. \tag{1.21}$$

Тогда:

если $\rho < 1$, то ряд (4.19) сходится;

если $\rho > 1$, то ряд (4.19) расходится;

если ρ = 1, то на вопрос о сходимости ответить нельзя.

Замечание 2. Если $\rho = 1$, то ряд (1.19) может быть как сходящимся, так и расходящимся (см. приведенные ниже примеры 4 и 5). В этом случае для решения вопроса о сходимости ряда необходимы дополнительные исследования.

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n}{2n-1} = 3 + \frac{6}{3} + \frac{9}{5} + \ldots + \frac{3n}{2n-1} + \ldots$$

Решение. Имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{3n+1}{2(n+1)-1} : \frac{3n}{2n-1} \right) = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{(3n+1)(2n-1)}{3n(2n+1)} \right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{6 - \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}}{6 + \frac{3}{n}} = \frac{6}{6} = 1.$$

Следовательно, признак Даламбера не дает ответа на вопрос о сходимости данного ряда. Но так как

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{3n}{2n-1} = \lim_{n\to\infty}\frac{3}{2-\frac{1}{n}} = \frac{3}{2} \neq 0,$$ т.е. не выполняется необходимое условие сходимости ряда, значит, предложенный ряд расходится.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)^2} = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots$$

Решение. Для данного ряда получаем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(n+3)^2} : \frac{1}{(n+2)^2}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)^2}{(n+3)^2} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+4n+4}{n^2+6n+9} = \lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{4}{n}+\frac{4}{n^2}}{1+\frac{6}{n}+\frac{9}{n^2}} = 1.$$

Следовательно, признак Даламбера не дает ответа на вопрос о сходимости ряда. Сравним данный ряд с рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 5} + \ldots + \frac{1}{n(n+2)} + \ldots,$$

который, как мы знаем (пример 3, §1), является сходящимся. Имеем

$$(n+2)^2 \leq n(n+2), \text{ т.е. } \frac{1}{(n+2)^2} \leq \frac{1}{n(n+2)},$$

отсюда по теореме 1 получаем сходимость исходного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)^2} = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{(n+2)^2} + \ldots$$

Пример 3. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!} = \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \ldots + \frac{1}{(2n+1)!}.$$

Решение. Напомним,

$$(2n+1)! = (2\cdot 1+1)(2\cdot 2+1)(2\cdot 3+1)\ldots(2(n-1)+1)(2n+1) =$$
$$= 3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots(2n-1)(2n+1).$$

Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(2(n+1)+1)!} ; \frac{1}{(2n+1)!}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!}{(2n+3)!} =$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{3\cdot5\cdot7\cdot\ldots\cdot(2n+1)(2n+3)}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!}{(2n+1)!(2n+3)}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+3}=0<1.$$

Следовательно, по признаку Даламбера данный ряд сходится.

Пример 4. Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{1}{5}+\frac{2}{5^2}+\frac{3}{5^3}+\ldots+\frac{n}{5^n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5^n}.$$

Решение. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{5^{n+1}}:\frac{n}{5^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)5^n}{n\cdot5^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)5^n}{n\cdot5^n\cdot5}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)}{5n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{5}=\frac{1}{5}<1.$$

Следовательно, по признаку Даламбера данный ряд сходится.

Пример 5. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{8+6^n}=\frac{2}{14}+\frac{4}{44}+\ldots+\frac{2^n}{8+6^n}+\ldots$$

Решение. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{n+1}}{8+6^{n+1}}:\frac{2^n}{8+6^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\cdot(8+6^n)}{2^n\cdot(8+6^{n+1})}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\cdot2\cdot(8+6^n)}{2^n\cdot(8+6\cdot6^n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot6^n\cdot\left(\frac{8}{6^n}+1\right)}{6^n\cdot\left(\frac{8}{6^n}+6\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot\left(\frac{8}{6^n}+1\right)}{\frac{8}{6^n}+6}=$$

$=\frac{2\cdot1}{6}=\frac{1}{3}<1$, следовательно, по признаку Даламбера ряд сходится. При решении воспользовались тем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{8}{6^n}=0$.

Пример 6. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3}{n!}=\frac{5}{1}+\frac{7}{2!}+\frac{11}{3!}+\ldots+\frac{2^n+3}{n!}+\ldots$$

Решение. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{n+1}+3}{(n+1)!}:\frac{2^n+3}{n!}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(2^{n+1}+3)\cdot n!}{(2^n+3)\cdot(n+1)!}=$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2^n\left(2+\frac{3}{2^n}\right)\cdot n!}{2^n\left(1+\frac{3}{2^n}\right)\left(1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n\cdot (n+1)\right)} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\left(2+\frac{3}{2^n}\cdot n!\right)}{\left(1+\frac{3}{2^n}\right)\cdot n!(n+1)} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(2+\frac{3}{2^n}\right)}{\left(1+\frac{3}{2^n}\right)(n+1)} =$$

$= \lim_{n\to\infty} \dfrac{2+\frac{3}{2^n}}{1+\frac{3}{2^n}} \cdot \lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{2}{1}\cdot 0 = 0 < 1$, следовательно, по признаку Даламбера ряд сходится.

Пример 7. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{10\cdot n^{20}} = \frac{5}{10} + \frac{5^2}{10\cdot 2^{20}} + \frac{5^2}{10\cdot 3^{20}} + \ldots + \frac{5^n}{10\cdot n^{20}} + \ldots$$

Решение. Имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5^{n+1}}{10\cdot (n+1)^{20}} : \frac{5^n}{10\cdot (n+2)^{20}}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{5^{n+1}\cdot 10\cdot (n+2)^{20}}{5^n\cdot 10\cdot (n+2)^{20}} = \lim_{n\to\infty} \frac{5^n\cdot 5}{5^n}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{20} =$$

$= \lim_{n\to\infty} 5\cdot \left(\dfrac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right)^{20} = 5\cdot\left(\lim_{n\to\infty} \dfrac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right)^{20} = 5\cdot 1^{20} = 5 > 1$, следовательно, по признаку Даламбера ряд расходится.

Без доказательства сформулируем признак Коши, который целесообразно использовать, когда a_n является $n-$ой степенью некоторого выражения, например $a_n = \dfrac{2^n}{n^n}$, или $a_n = \left(\dfrac{n+1}{n}\right)^{n^2}$.

Признак сходимости Коши

Сравнение рядов с прогрессиями приводит ещё и к другому признаку сходимости, принадлежащему Коши.

Теорема 1 (признак Коши). Пусть ряд (1.19) с неотрицательными членами. Допустим, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ существует и

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\rho. \qquad (1.22)$$

Тогда:

если $\rho<1$, то ряд (1.19) сходится;

если $\rho>1$, то ряд (1.19) расходится;

если $\rho=1$, то ряд (1.19) может быть как сходящийся, так и расходящийся (см. приведенные ниже примеры 4 и 5) [6].

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+2}\right)^n=\frac{1}{5}+\left(\frac{2}{7}\right)^2+\left(\frac{3}{11}\right)^2+\ldots+\left(\frac{n}{3n+2}\right)^n+\ldots$$

Решение. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{3n+2}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3+\frac{2}{n}}=\frac{1}{3}<1,$$ следовательно, по признаку Коши ряд сходится.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}=2+\left(\frac{3}{2}\right)^4+\left(\frac{4}{3}\right)^9+\ldots+\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}+\ldots$$

Решение. Напомним, что $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\approx 2{,}7$. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{n}}=$$

$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e>1$, следовательно, по признаку Коши ряд расходится.

Пример 3. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n^2-2n}{3n^2+1}\right)^{n^2}=\left(\frac{3}{28}\right)^9+\left(\frac{8}{49}\right)^{16}+\ldots+\left(\frac{n^2-2n}{3n^2+1}\right)^{n^2}+\ldots$$

Решение. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}=\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n^2-2n}{3n^2+1}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{n^2-2n}{3n^2+1}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-2n}{3n^2+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-\frac{2}{n}}{3+\frac{1}{n^2}}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0<1,$$

следовательно, по признаку Коши ряд сходится.

Пример 4. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\left(1+\frac{1}{1}\right)+\left(1+\frac{1}{2}\right)^2+\ldots+\left(1+\frac{1}{n}\right)^n+\ldots$$

Решение. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}=\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1.$$

Следовательно, по признаку Коши данный ряд исследовать нельзя. С другой стороны, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\neq 0$, следовательно, не выполняется необходимое условие сходимости ряда, значит, данный ряд расходится.

Пример 5. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}+\ldots$$

Решение. Используя равенство $\lim\limits_{\alpha\to 0}\alpha^{\alpha}=1$, получаем

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^2}}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}\right)^2=1^2=1$, но этот ряд сходится, так как если отбросить первых два члена, то он совпадает с рядом $\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)^2}$, который является сходящимся (см. пример 2 §5.).

Интегральный признак сходимости

Теорема 1 (интегральный признак). Пусть дан ряд (1.19) с положительными членами, причем $a_1>a_2>a_3>\ldots>a_n>\ldots$и $f(n)-$такая непрерывная монотонно убывающая функция, что $f(n)=a_n$. Тогда данный ряд и несобственный интеграл $\int\limits_1^{\infty}f(x)dx$одновременно сходится или расходится.

Пример 1. Исследовать на сходимость обобщенный гармонический ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}=1+\frac{1}{2^{\alpha}}+\frac{1}{3^{\alpha}}+\ldots+\frac{1}{n^{\alpha}}+\ldots \quad \alpha>0,\ \alpha\neq 1.$$

Решение. Рассмотрим функцию $f(x)=\frac{1}{x^{\alpha}}$, $x\geq 1$. Эта функция непрерывна, монотонно убывает и $f(n)=\frac{1}{n^{\alpha}}$, следовательно, можно применить интегральный признак. При $\alpha\neq 1$ имеем

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\lim_{M\to\infty}\int_1^{M}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\lim_{M\to\infty}\int_1^{M}x^{-\alpha}dx=\left(\lim_{M\to\infty}\frac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha}\Big|_1^M\right)=$$

$$=\lim_{M\to\infty}\left(\frac{1}{1-\alpha}\left(M^{1-\alpha}-1^{1-\alpha}\right)\right)=\frac{1}{1-\alpha}\lim_{M\to\infty}\left(M^{1-\alpha}-1\right).$$

Здесь необходимо рассмотреть два случая:

1) $1-\alpha<0$, т.е. $\alpha>1$, или $\alpha-1>0$; следовательно, $M^{1-\alpha}=\frac{1}{M^{\alpha-1}}$ стремится к нулю, если M стремится к бесконечности. Тогда $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\frac{1}{1-\alpha}\lim_{M\to\infty}\left(\frac{1}{M^{\alpha-1}}-1\right)=\frac{-1}{1-\alpha}=\frac{1}{\alpha-1}$,
таким образом, при $\alpha>1$ данный ряд сходится.

В частности, ряд $1+\frac{1}{2^{\frac{7}{4}}}+\frac{1}{3^{\frac{7}{4}}}+\ldots+\frac{1}{n^{\frac{7}{4}}}+\ldots$сходится, т.к. $\alpha=\frac{7}{4}>1$.

$1-\alpha>0$, т.е. $\alpha<1$. Тогда $M^{1-\alpha}$ неограниченно возрастает при M, стремящемся к бесконечности, следовательно,

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^{\alpha}}=\frac{1}{1-\alpha}\lim_{M\to\infty}\left(M^{1-\alpha}-1\right)=\infty$$

и данный ряд расходится.

В частности, ряд $1+\frac{1}{\sqrt[3]{2}}+\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt[3]{n}}+\ldots$ расходится, так как $\alpha=\frac{1}{3}<1$.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^3(n+2)}{n+2}=\frac{\ln^3 3}{3}+\frac{\ln^3 4}{4}+\frac{\ln^3 5}{5}+\ldots+\frac{\ln^3(n+2)}{n+2}+\ldots$$

Решение. Рассмотрим функцию $f(x)=\frac{\ln^3(x+2)}{x+2}$, $x\geq 1$. Эта функция непрерывна, монотонно убывает и $f(n)=\frac{\ln^3(n+2)}{n+2}$, следовательно, можно применить интегральный признак $\int_1^{\infty}\frac{\ln^3(x+2)}{x+2}dx=\lim_{M\to\infty}\int_1^{M}\frac{\ln^3(x+2)}{(x+2)}dx=$

$$= \lim_{M\to\infty} \int_1^M \ln^3(x+2)\,d\ln(x+2) = \lim_{M\to\infty} \frac{\ln^4(x+2)}{4}\Big|_1^M =$$

$$= \lim_{M\to\infty} \frac{1}{4}\left[\ln^4(M+2) - \ln^4 3\right] = \infty,$$

т.к. $\ln^4(M+2)$ неограниченно возрастает при M, стремящемся к бесконечности. Следовательно, ряд расходится.

Пример 3. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{e^{n^2}} = \frac{1}{e} + \frac{2}{e^4} + \frac{3}{e^9} + \ldots + \frac{n}{e^{n^2}} + \ldots$$

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{x}{e^{n^2}}$, $x \geq 1$. Эта функция непрерывна, монотонно убывает и $f(n) = \dfrac{n}{e^{n^2}}$, следовательно, можно применить интегральный признак

$$\int_1^{\infty} \frac{x}{e^{x^2}}\,dx = \lim_{M\to\infty} \int_1^M e^{-x^2} x\,dx = \lim_{M\to\infty} \left(-\frac{1}{2}\right) \int_1^M e^{-x^2}(-2x)\,dx =$$

$$= -\frac{1}{2} \lim_{M\to\infty} e^{-x^2}\Big|_1^M = -\frac{1}{2} \lim_{M\to\infty} \left(e^{-M^2} - e^{-1}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2} \lim_{M\to\infty} \left(\frac{1}{e^{M^2}} - \frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{2}\left(0 - \frac{1}{e}\right) = \frac{1}{2e},$$

т.к. e^{M^2} неограниченно возрастает при M, стремящемся к бесконечности. Следовательно, данный ряд сходится по интегральному признаку.

Вывод. Интегральный признак Коши является, как видно из его формулировки, необходимым и достаточным признаком. Это значит, что он устанавливает сходимость любого сходящегося ряда и расходимость любого расходящегося ряда из сферы своей применимости. Иными словами, интегральный признак является идеально чувствительным. В этом отношении он напоминает критерий сходимости Коши. Естественно, что все такие «необходимые и достаточные» признаки, если только они сколько-нибудь широки, неизбежно оказываются по отношению ко многим рядам непрактичными. В этом можно усмотреть проявление весьма общей закономерности: чем шире и богаче возможности того или иного математического аппарата, тем сложнее его логическая природа и тем труднее с ним управляться.

Как видно из рассмотренных выше примеров, путь непосредственного вычисления интеграла при применении интегрального признака сходимости не всегда приемлем. Правда, иногда можно прийти к цели путем каких-нибудь косвенных оценок величины этого интеграла, но это уже будет представлять собой самостоятельную задачу, иногда даже более трудную, чем анализ самого ряда.

Следовательно, при изучении рядов ограничиться одним только интегральным признаком сходимости нельзя, и необходимо использовать еще и другие признаки сходимости, быть может, не столь чувствительными, как интегральный признак, но зато более удобными в обращении, более практичными.

Наконец, для того чтобы применение признака сходимости было не только принципиально возможным и практически выполнимым, но и действительно приводило к цели, признак должен быть достаточно чувствительным.

Такими признаками очевидно являются признаки сходимости Даламбера и Коши. Они весьма практичны и достаточно широки, но зато малочувствительны. Впрочем, как видно из рассмотренных выше примеров, их чувствительности будет хватать для ответа на весьма большое число теоретических вопросов и решения многих практических задач.

Задачи для решения в аудитории

Задание 3. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с помощью признака Даламбера, если:

а) $a_n = \dfrac{2^n}{n^8}$; б) $u_n = \dfrac{n!}{2^n + 3^n}$; в) $a_n = \dfrac{3^n + 1}{n^2 + 1}$;

г) $a_n = \dfrac{3^n}{(2n+1)!}$; д) $u_n = \dfrac{2^n}{2n+3} \cdot \mathrm{tg}\dfrac{\pi}{3^n}$.

Задание 4. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с помощью радикального признака Коши:

а) $a_n = \dfrac{5^n}{(4n+3)^n}$; б) $a_n = \left(\dfrac{n-2}{n+1}\right)^{n^2}$; в) $a_n = \left(\dfrac{3n+5}{5n+4}\right)^{2n}$;

г) $a_n = \mathrm{arctg}^n \dfrac{n}{n+3}$; д) $a_n = \left(\dfrac{3n^2 + 2n}{n^2 + 1}\right)^n \cdot 5^{-n}$.

Задание 5. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с помощью интегрального признака Коши, если:

а) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt[4]{n^3}}$; б) $a_n = \dfrac{1}{1+n^2}$; в) $a_n = \dfrac{3n^2}{e^{n^3}}$;

г) $a_n = \dfrac{1}{n\sqrt{8+\ln^2 n}}$.

Ответы

3. а) Ряд расходится, б) ряд расходится, в) ряд расходится, г) ряд сходится, д) ряд сходится. 4. а) Ряд сходится, б) ряд расходится, в) ряд сходится, г) ряд сходится, д) ряд сходится.

5. а) Ряд расходится, б) ряд сходится, в) ряд сходится, г) ряд расходится.

Задача 3

Исследовать сходимость следующих числовых рядов.

4.01а) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+5}{3^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n+1}{2+3n}\right)^{2n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$.

4.02а) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^n+1}{2^n+1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{3n-1}{3+5n}\right)^{4n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

4.03а) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{n!}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\left(\dfrac{3n-1}{4n+5}\right)^{n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln^7 n}{n}$.

4.04а) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{1+6^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n^2+1}{3n^2+2}\right)^{n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{5n+3}{5n+1}$.

4.05а) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{3^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{5n-1}{7n-2}\right)^{2n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}}$.

4.06а) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+3}{3^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\ln^n(n+1)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{2n+3}}$.

4.07а) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^3}{2^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}3^n\cdot\left(\dfrac{n+1}{2n+1}\right)^{n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\sqrt{n}}$.

4.08а) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{\left(\sqrt{2}\right)^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{3n}{(6n+1)^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln^4(5n+2)}{(5n+2)}$.

4.09а) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{3^n\cdot(n+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+1)^n}{e^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

4.10а) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n}{n(n+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^n}{n^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{\operatorname{arctg} n}}{1+n^2}$.

4.11а) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{3^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^n}{5^n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\operatorname{arctg} n\,(n^2+1)}$.

4.12а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+1}{5^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{(n+1)^n}}{e^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{\ln^3 n}}{n}$.

4.13а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)}{3^n+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n+1}{n^2-1}\right)^n$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\cdot 3^{n^2}$.

4.14а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4n+1}{5^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{100n^2}{n^2+100}\right)^n$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+1}{n^3+n}$.

4.15а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^2+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(4n+1)^n}{3^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n^3+2}{\sqrt{n}}$.

4.16а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6^n+1}{n+2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln^n(n+1)$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5n^2+1}{n}$.

4.17а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^n+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{2n+3}\right)^{n^2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}+3}{n}$.

4.18а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^2+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^n}{2^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$.

4.19а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7^n+1}{2n+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2}\right)^n$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)+1}{(n+1)}$.

4.20а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 3^{2n}}{5^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n+1}{4n^2+1}\right)^n$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$.

4.21а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{5^{2n}+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^2+1}{5n^2+3}\right)^n\cdot 2^n$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{\sqrt[3]{n^2+1}}$.

4.22а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n\cdot 2^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(4n+1)^n}{7^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\ln n$.

4.23а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{6^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2-3n}{5n^2-1}\right)^{n^2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\sqrt{n^2+1}$.

4.24а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+1}{(2n+1)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(n+1)^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{\ln(n+1)}}{(n+1)}$.

4.25а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n1}{2^n+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{5n+3}\right)^n$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+1}{n^3+n}$.