Лекция №8 Тема 7.2. Знакопеременные числовые ряды.

Знакопеременные и знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница. Достаточный признак сходимости знакопеременного ряда. Абсолютная и условная сходимости.

1. Знакочередующиеся ряды.

Знакочередующийся ряд можно записать в виде:

$$u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n+1} u_n + \ldots$$

где $u_n > 0, \quad n = 1,2,3,\ldots$

Признак Лейбница.

Если у знакочередующегося ряда $u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \ldots + (-1)^{n+1} u_n + \ldots$ *абсолютные величины* u_i *убывают* $u_1 > u_2 > u_3 > \ldots$ *и общий член стремится к нулю* $u_n \to 0$*, то ряд сходится.*

Абсолютная и условная сходимость рядов.

Рассмотрим некоторый знакопеременный ряд (с членами произвольных знаков).

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \qquad (1)$$

и ряд, составленный из абсолютных величин членов ряда (1):

$$|u_1| + |u_2| + \ldots + |u_n| + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} |u_n| \qquad (2)$$

Теорема. *Из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1).*

Доказательство. Ряд (2) является рядом с неотрицательными членами. Если ряд (2) сходится, то по критерию Коши для любого ε>0 существует число N, такое, что при n>N и любом целом p>0 верно неравенство:

$$|u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \ldots + |u_{n+p}| < \varepsilon$$

По свойству абсолютных величин:

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}| \le |u_{n+1}| + |u_{n+2}| + \ldots + |u_{n+p}| < \varepsilon$$

$$|u_{n+1} + u_{n+2} + \ldots + u_{n+p}| < \varepsilon$$

То есть по критерию Коши из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1).

Определение. Ряд $\sum u_n$ называется **абсолютно сходящимся**, если сходится ряд $\sum |u_n|$.

Очевидно, что для знакопостоянных рядов понятия сходимости и абсолютной сходимости совпадают.

Определение. Ряд $\sum u_n$ называется **условно сходящимся**, если он сходится, а ряд $\sum |u_n|$ расходится.

Признаки Даламбера и Коши для знакопеременных рядов.

Пусть $\sum u_n$ - знакопеременный ряд.

Признак Даламбера. Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \rho$, то при ρ<1 ряд $\sum u_n$ будет абсолютно сходящимся, а при ρ>1 ряд будет расходящимся. При ρ=1 признак не дает ответа о сходимости ряда.

Признак Коши. Если существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|u_n|} = \rho$, то при ρ<1 ряд $\sum u_n$ будет абсолютно сходящимся, а при ρ>1 ряд будет расходящимся. При ρ=1 признак не дает ответа о сходимости ряда.

2. Свойства абсолютно сходящихся рядов.

1) **Теорема.** *Для абсолютной сходимости ряда* $\sum u_n$ *необходимо и достаточно, чтобы его можно было представить в виде разности двух сходящихся рядов с неотрицательными членами.*

Следствие. Условно сходящийся ряд является разностью двух расходящихся рядов с неотрицательными стремящимися к нулю членами.

2) В сходящемся ряде любая группировка членов ряда, не изменяющая их порядка, сохраняет сходимость и величину ряда.

3) Если ряд сходится абсолютно, то ряд, полученный из него любой перестановкой членов, также абсолютно сходится и имеет ту же сумму.

Перестановкой членов условно сходящегося ряда можно получить условно сходящийся ряд, имеющий любую наперед заданную сумму, и даже расходящийся ряд.

4) **Теорема.** *При любой группировке членов абсолютно сходящегося ряда (при этом число групп может быть как конечным, так и бесконечным и число членов в группе может быть как конечным, так и бесконечным) получается сходящийся ряд, сумма которого равна сумме исходного ряда*.

5) Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ сходятся абсолютно и их суммы равны соответственно S и σ, то ряд, составленный из всех произведений вида $u_i v_k$, $i, k = 1,2,...$ взятых в каком угодно порядке, также сходится абсолютно и его сумма равна $S \cdot \sigma$ - произведению сумм перемножаемых рядов.

Если же производить перемножение условно сходящихся рядов, то в результате можно получить расходящийся ряд.