Знакопеременные и знакочередующиеся ряды

Определение 1. Ряды, содержащие как положительные, так и отрицательные члены, называются ***знакопеременными***.

Пусть дан знакопеременный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (1.23)$$

Если в ряде (1.23) имеется лишь конечное число отрицательных (или положительных) членов, то, отбрасывая их, получим ряд, члены которого имеют постоянный знак. Полученный и первоначальный ряды одновременно сходятся или расходятся. Поэтому будем рассматривать только ряды, которые среди своих членов содержат бесконечно много как положительных, так и отрицательных членов.

Рассмотрим ряд, состоящий из модулей всех членов ряда (12.23):

$$|a_1| + |a_2| + |a_3| + \ldots + |a_n| \ldots \qquad (1.24)$$

Теорема 1. Если ряд (1.24) сходится, то сходится и ряд (1.23).

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{1}{n^2} + \ldots$$

<u>Решение.</u> Ряд, составленный из модулей членов данного ряда

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2},$$

сходится (см. пример 1, §7), следовательно, и данный ряд сходится.

Определение 2. Знакопеременный ряд (1.23) называется ***абсолютно сходящимся***, если сходится ряд (1.24), составленный из модулей его членов.

Определение 3. Ряд

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$$

называется ***условно сходящимся***, если он сходится, а ряд $|a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n| + \ldots$, составленный из модулей его членов, расходится.

Теорема 1 показывает, что исследование сходимости знакопеременных рядов сводится к исследованию сходимости рядов с неотрицательными членами.

Мы ограничимся исследованием знакочередующихся рядов, являющихся частными случаями знакопеременных.

Определение 4. Ряд называется ***знакочередующимся***, если положительные и отрицательные члены следуют друг за другом поочередно. При исследовании таких рядов можно ограничиться знакочередующимися рядами вида

$$a_1 - a_2 + a_3 - \ldots + (-1)^{n+1} a_n + \ldots, \qquad (1.25)$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots -$положительные числа.

Приведем достаточный признак сходимости знакочередующегося ряда.

Теорема 2 (признак Лейбница). Знакочередующийся ряд (1.25) сходится, если:
его члены убывают по модулю,

$$a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq a_n \geq \ldots; \tag{1.26}$$

его общий член стремится к нулю,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0. \tag{1.27}$$

При этом сумма S ряда (1.25) удовлетворяет неравенствам $0 \leq S \leq a_1$.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 1 - \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} - \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} + \ldots$$

Решение. 1. Исследуем ряд на абсолютную сходимость. Для этого рассмотрим ряд, состоящий из абсолютных величин, т.е. ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \frac{1}{\sqrt[3]{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[3]{n}} + \ldots \tag{1.28}$$

Для исследования знакоположительного ряда (1.28) воспользуемся интегральным признаком (см. теорему 1, §7). Рассмотрим функцию $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$, $x \geq 1$. Эта функция непрерывна, монотонно убывает и $f(n) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}$, следовательно, условие интегрального признака удовлетворено. Имеем

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx = \lim_{M\to\infty} \int_1^{M} x^{-\frac{1}{3}} dx = \lim_{M\to\infty} \frac{x^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} \Big|_1^M = \lim_{M\to\infty} \frac{3}{2}\left(M^{\frac{2}{3}} - 1\right) = \infty,$$

так как $\lim\limits_{M\to\infty} M^{\frac{2}{3}} = \infty$.

Итак, ряд (1.28) расходится, т.е. исходный ряд не является абсолютно сходящимся.

Исследуем ряд на условную сходимость.

Воспользуемся признаком Лейбница. Имеем

$$1 > \frac{1}{\sqrt[3]{2}} > \frac{1}{\sqrt[3]{3}} > \frac{1}{\sqrt[3]{4}} > \ldots > \frac{1}{\sqrt[3]{n}} > \ldots,$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0.$$

Оба условия признака Лейбница выполняются, значит, ряд является условно сходящимся.

Пример 3. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^{n+1}}{3^n+1}=\frac{4}{4}-\frac{8}{10}+\frac{16}{28}+\ldots+\frac{(-2)^{n+1}}{3^n+1}+\ldots$$

Решение. Исследуем ряд на абсолютную сходимость. Для этого рассмотрим ряд, состоящий из абсолютных величин

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{3^n+1}=\frac{4}{4}+\frac{8}{10}+\frac{16}{28}+\ldots+\frac{2^{n+1}}{3^n+1}+\ldots \qquad (1.29)$$

Для исследования знакоположительного ряда (1.29) воспользуемся признаком Даламбера. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{n+2}}{3^n+1}:\frac{2^{n+1}}{3^{n+1}+1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{n+2}\cdot(3^{n+1}+1)}{2^{n+1}\cdot\left(3^n+1\right)}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{n+1}\cdot 2\cdot 3^n\left(3+\frac{1}{3^n}\right)}{2^{n+1}\cdot 3^n\cdot\left(1+\frac{1}{3^n}\right)}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2\left(3+\frac{1}{3^n}\right)}{1+\frac{1}{3^n}}\right)=6,$$

т.к. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3^n}=0$.

Следовательно, ряд (1.29) сходится, а исходный ряд является абсолютно сходящимся.

Пример 4. Исследовать данный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sqrt{2}}{\sqrt{2n+1}}=\sqrt{\frac{2}{3}}-\sqrt{\frac{4}{5}}+\ldots+(-1)^{n+1}\sqrt{\frac{2n}{2n+1}}+\ldots \qquad (1.30)$$

Решение. Исследуем данный ряд на абсолютную сходимость. Для этого рассмотрим ряд, состоящий из абсолютных величин

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\frac{2n}{2n+1}}=\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{\frac{4}{5}}+\ldots+\sqrt{\frac{2n}{2n+1}}+\ldots$$

Имеем

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2n}{2n+1}}=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{2n+1}}=\sqrt{\lim_{n\to\infty}\frac{2}{2+\frac{1}{n}}}=\sqrt{\frac{2}{2}}=$$

$=1\neq 0$, т.к. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$.

Таким образом, не выполняется необходимое условие сходимости ряда, мы заключаем, что ряд (1.30) расходится. Значит, исходный ряд не является абсолютно сходящимся. Исследуем его на условную сходимость. Проверим выполнение первого условия признака сходимости Лейбница

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2n}{2n+1}}=1\neq 0.$$

Следовательно, предложенный ряд является расходящимся.

Мы видим, что признак сходимости Лейбница является довольно широким по применимости, весьма практичным и идеально чувствительным. Условная сходимость знакочередующегося ряда является «в среднем», если можно так выразиться, более широким фактом, чем сходимость ряда с положительными членами; поэтому и распознать ее оказывается в каком-то смысле легче [7].

Заметим, наконец, что признак Лейбница является не только достаточным, но и необходимым признаком сходимости для знакочередующихся рядов с монотонно убывающими членами: если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$, то на основании необходимого признака сходимости ряд

$$a_1-a_2+a_3-\ldots+(-1)^{n+1}a_n+\ldots$$

сходиться не может.

Задачи для решения в аудитории

Задание. Исследовать на абсолютную и условную сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, если:

а) $a_n=(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n^2}$;

б) $a_n=(-1)^{n+1}\frac{1}{3^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$;

в) $a_n=(-1)^n\frac{5^{2n-1}}{n!}$;

г) $a_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{n\sqrt[3]{\ln n+8}}$;

д) $u_n=(-1)^n e^{\frac{2n}{n^2+1}}$;

е) $a_n=(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n^2}$;

ж) $a_n=\frac{(-1)^{n+1}n^2}{\left(2^n+1\right)}$.

Ответы

6. а) Ряд сходится условно, б) ряд сходится абсолютно, в) ряд сходится абсолютно, г) ряд сходится условно, д) ряд расходится, е) ряд сходится условно, ж) ряд сходится абсолютно.

Задача

Индивидуальные задания

Исследовать сходимость знакопеременных рядов. Если ряд сходится, то определить, сходится он абсолютно или условно.

5.01 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}$;

5.02 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}2^n\cdot n}{2n-1}$;

5.03 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{n!}$;

5.04 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{2n+1}}$;

5.05 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1}$;

5.06 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{2^n}$;

5.07 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(2n+1)}{n(n+1)}$;

5.08 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{n^2+1}}$;

5.09 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}(1+3n)}{5n+1}$;

5.10 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-5)^{n+1}}{n!}$;

5.11 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{\sqrt{n^2+6}}$;

5.12 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^{n+1}}{2^n+n}$;

5.13 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{n^2+8}$;

5.14 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-2)^{n+1}}{2+3^n}$;

5.15 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n^2}{3n^2+1}$;

5.16 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n^2}{n+7}$;

5.17 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-5)^{n+1}}{5^{n+1}+1}$;

5.18 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{8n+7}}$;

5.19 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}n}{n^4+1}$;

5.20 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-4)^{n+1}}{2^{n+1}+2}$;

5.21 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n$;

5.22 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2+4}$;

5.23 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{4n+5}{5n-4}\right)^n$;

5.24 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{3n+7}$;

5.25 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[3]{2n-1}}$.