Степенные ряды. Определение. Область сходимости.

Определение 1. ***Степенным рядом*** называется выражение вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + \\ + a_n(x-x_0)^n + \ldots, \qquad (2.7)$$

где x – независимая переменная; x_0 – фиксированное число; $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ – постоянные коэффициенты.

Если в ряде (2.7) положить $x = a$, где a – некоторое число, то получим числовой ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (a-x_0)^n = a_0 + a_1(a-x_0) + a_2(a-x_0)^2 + \ldots + \\ + a_n(a-x_0)^n + \ldots \qquad (2.8)$$

Определение 2. Степенной ряд (2.7) ***называется сходящимся в точке*** a, если числовой ряд (2.8), полученный из ряда (2.7) подстановкой $x = a$, является сходящимся рядом. При этом a называется ***точкой сходимости ряда*** (2.7).

Пример 1. Степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{5^n} = 1 + \frac{x+1}{5} + \frac{(x+1)^2}{5^2} + \ldots + \frac{(x+1)^n}{5^n} + \ldots \qquad (2.9)$$

сходится в точке $x = 0$ и расходится в точке $x = 24$. Действительно, подставляя в (2.9) $x = 0$, получим числовой ряд

$1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{5^n} + \ldots$, который, как сумма членов ряда геометрической прогрессии со знаменателем $q = \frac{1}{5}$, сходится. Данный степенной ряд расходится в точке $x = 24$, так как числовой ряд $1 + 5 + 5^2 + \ldots + 5^n + \ldots$ является расходящимся, в силу невыполнения необходимого условия сходимости числового ряда.

Определение 3. Множество всех точек сходимости степенного ряда (2.7) называется ***областью сходимости ряда***.

Теорема Абеля. Радиус сходимости степенного ряда

Теорема 1 (Теорема Абеля. Нильс Хенрик Абель (1802 – 1829) – норвежский математик). *Если степенной ряд* $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ *сходится при* $x = x_1$ *, то он сходится и притом абсолютно для всех* $|x| < |x_1|$.

Следствие. Если при $x = x_1$ ряд расходится, то он расходится для всех $|x| > |x_1|$.

Таким образом, для каждого степенного ряда существует такое положительное число R, что при всех x таких, что $|x| < R$ ряд абсолютно сходится, а при всех $|x| > R$ ряд расходится.

Рассмотрим довольно часто встречающиеся степенные ряды (2.10), для которых, начиная с некоторого номера, все $a_n \neq 0$ и существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell$. Вопрос о сходимости таких рядов может быть решен с помощью признака Даламбера, примененного к ряду

$$|a_0| + |a_1 x| + \left|a_2 x^2\right| + \ldots + \left|a_n x^n\right| + \ldots, \tag{2.11}$$

составленному из модулей членов ряда (2.10). Имеет место следующая теорема.

Теорема 2 (о структуре области сходимости степенного ряда). Пусть существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell. \tag{2.12}$$

Тогда:

а) если $\ell \neq 0$ и $\ell \neq \infty$, то степенной ряд (2.10) сходится абсолютно в интервале $\left(-\frac{1}{\ell};\frac{1}{\ell}\right)$, т.е. при $|x| < \frac{1}{\ell}$, и расходится вне этого интервала, т.е. при $|x| > \frac{1}{\ell}$;

б) если $\ell = 0$, то ряд (2.10) сходится при любом x;

в) если $\ell = \infty$, то ряд (2.10) сходится лишь при $x = 0$.

Теорема 3 (о структуре области сходимости степенного ряда). Пусть существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \ell. \tag{2.14}$$

Тогда:

а) если $\ell \neq 0$ и $\ell \neq \infty$, то степенной ряд (2.10) сходится абсолютно в интервале $\left(-\frac{1}{\ell};\frac{1}{\ell}\right)$, т.е. при $|x| < \frac{1}{\ell}$, и расходится вне этого интервала, т.е. при $|x| > \frac{1}{\ell}$;

б) если $\ell = 0$, то ряд (2.10) сходится при любом x;

в) если $\ell = \infty$, то ряд (2.10) сходится лишь при $x = 0$ [11].

Определение. Число R называется ***радиусом сходимости*** ряда (2.10), если при всех x, для которых $|x| < R$, ряд (2.10) сходится, а при всех x, для которых $|x| > R$, ряд (2.10) расходится.

Из теорем 2 и 3 следует, что в случае, когда $\ell \neq 0$ и $R \neq +\infty$, имеет место равенство $R = \dfrac{1}{\ell}$. Условимся считать $R = 0$ для рядов, расходящихся при всех $x \neq 0$, и $R = +\infty$ для рядов, сходящихся при любых x.

Из этого определения и теорем 2 и 3 следует

$$R = \frac{1}{\ell} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|, \tag{2.15}$$

или

$$R = \frac{1}{\ell} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}}. \tag{2.16}$$

Заметим, что вопрос о сходимости ряда (2.10) в точках $x = +R$ и $x = -R$ решается дополнительными исследованиями.

Таким образом, для области сходимости ряда (2.10) возможны следующие случаи.

1. Ряд (2.10) сходится только при $x = 0$. Область сходимости состоит из одной точки $x = 0$, $R = 0$.

2. Ряд (2.10) не имеет точек расходимости. Область сходимости совпадает со всей числовой прямой $(-\infty; +\infty)$, $R = +\infty$.

3. Ряд (2.10) имеет как отличные от нуля числа точки сходимости, так и точки расходимости. В зависимости от данного ряда область сходимости является одним из промежутков

$$(-R; R),\ [-R; R),\ (-R; R], [-R; R],$$

где $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right|$, или $R = \dfrac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}}$.

Определение. Независимо от того, какой именно случай имеет место, интервал $(-R; R)$ называется ***интервалом сходимости ряда*** (2.10).

Следствие 1. Область сходимости ***степенного ряда либо совпадает с его интервалом сходимости, либо получается из этого интервала добавлением одной или обеих граничных точек.***

Пример 1. Найти область сходимости ряда

$$1 + x + 2!x^2 + 3!x^3 + \ldots + n!x^n + \ldots$$

<u>Решение.</u> По формуле (2.15) имеем

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n\cdot(n+1)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n!(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0.$$

Данный ряд сходится только в точке $x=0$.

Пример 2. Найти область сходимости ряда

$$\frac{x}{2+3}+\frac{x^2}{2^2+3^2}+\frac{x^3}{2^3+3^3}+\ldots+\frac{x^n}{2^n+3^n}+\ldots$$

<u>Решение.</u>

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{2^n+3^n}:\frac{1}{2^{n+1}+3^{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^{n+1}\cdot\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+1\right)}{3^n\cdot\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n}+1\right)}\right|=\lim_{n\to\infty}3\cdot\left|\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+1}{\left(\frac{2}{3}\right)^{n}+1}\right|=3,$$

т.к. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$.

Таким образом, $R=3$, ряд сходится абсолютно в интервале $(-3;3)$. Исследуем ряд на сходимость в концах интервала. При $x=3$ получаем числовой ряд

$$\frac{3}{2+3}+\frac{3^2}{2^2+3^2}+\frac{3^3}{2^3+3^3}+\ldots+\frac{3^n}{2^n+3^n}+\ldots$$

Воспользуемся необходимым признаком сходимости рядов с положительными членами.

Рассмотрим

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{2^n+3^n}=\lim\frac{3^n}{2^n+3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{3^n\cdot\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n+1\right)}=$$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}=1$, значит, ряд расходится. При $x=-3$ приходим к ряду $-\dfrac{3}{2+3}+\dfrac{3^2}{2^2+3^2}-\dfrac{3^3}{2^3+3^3}+\ldots+\dfrac{(-1)^n3^n}{2^n+3^n}+\ldots$, который по признаку Лейбница для знакочередующихся рядов расходится, т.к. не выполняется условие $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

Итак, окончательно получаем, областью сходимости будет промежуток $(-3;3)$.

Пример 3. Найти область сходимости ряда

$$\frac{x}{5}+\frac{x^2}{5^2}+\frac{x^3}{5^3}+\ldots+\frac{x^{2n-1}}{5^n}+\ldots$$

Решение. К этому ряду формула (2.15) неприменима, так как отсутствуют четные степени переменной x, т.е. $a_{2k}=0$, $k=1,2,3,\ldots$

Применяем непосредственно признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+1}}{5^{n+1}}:\frac{x^{2n-1}}{5^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+1}\cdot5^n}{x^{2n-1}\cdot5^{n+1}}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n-1}\cdot x^2\cdot5^n}{x^{2n-1}\cdot5^n\cdot5}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{5}.$$

Данный ряд сходится для $\dfrac{x^2}{5}<1$, или $x^2<5$, т.е. $|x|<\sqrt{5}$, следовательно, $x\in\left(-\sqrt{5};\sqrt{5}\right)$. Проверим сходимость на концах интервала. При $x=\pm\sqrt{5}$ получаем ряды

$$\frac{\sqrt{5}}{5}\pm\frac{\left(\sqrt{5}\right)^3}{5^2}\pm\frac{\left(\sqrt{5}\right)^5}{5^3}\pm\ldots\pm\frac{\left(\sqrt{5}\right)^{2n-1}}{\left(\sqrt{5}\right)^n}\pm\ldots,$$

т.е.

$$\sqrt{5}\pm\frac{1}{\sqrt{5}}\pm\frac{1}{\sqrt{5}}\pm\ldots\pm\frac{1}{\sqrt{5}}\pm\ldots,$$

которые, очевидно, расходятся.

Следовательно, областью сходимости будет $\left(-\sqrt{5};\sqrt{5}\right)$.

Пример 4. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{4n}\right)^n\cdot x^n=\left(\frac{1+1}{4}\right)\cdot x+\left(\frac{2+1}{4\cdot2}\right)^2\cdot x^2+\left(\frac{3+1}{4\cdot3}\right)^3\cdot x^3+$$

$$+\ldots+\left(\frac{n+1}{4n}\right)^n\cdot x^n+\ldots$$

Решение. По формуле (2.16) имеем

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{4n}\right)^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{n+1}{4n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{n+1}=4,$$

т.е. $R=4$, ряд сходится в интервале $(-4;4)$. Исследуем ряд на сходимость в концах интервала. При $x=4$ получаем числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{4n}\right)^n\cdot 4^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^n\cdot 4^n}{4^n\cdot n^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n,$$

который исследуем с помощью необходимого признака сходимости рядов. Имеем

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\ell\neq 0$, т.е. общий член ряда не стремится к нулю и ряд расходится. При $x=-4$ получаем числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{4n}\right)^n\cdot(-4)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\cdot\frac{(-1)^n4^n}{4^n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^n,$$

который по признаку Лейбница для знакочередующихся рядов расходится, т.к. не выполняется условие $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

Итак, окончательно имеем: областью сходимости будет промежуток $(-4;4)$
.

Пример 5. Найти радиус сходимости ряда

$$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots$$

Решение. К этому ряду неприменима формула (2.15), так как отсутствуют нечетные степени переменной x, т.е. $a_{2k+1}=0$, $k=0,1,2,\ldots$ Применяем непосредственно признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{(2n+2)!}:\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+2}\cdot(2n)!}{x^{2n}\cdot(2n+2)!}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n}\cdot x^2\cdot(2n)!}{x^{2n}\cdot(2n)!(2n+1)(2n+2)}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{(2n+1)(2n+2)}=0,$$

при любом x, т.е. ряд сходится на всей числовой прямой.

Замечание. Если степенной ряд имеет вид (2.7), то, как мы отмечали, подстановкой $x - x_0 = z$ он приводится к степенному ряду вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots + a_n z^n + \ldots, \qquad (2.17)$$

интервалом сходимости которого будет $(-R; R)$, т.е. $|z| < R$ или $|x - x_0| < R$, или $-R < x - x_o < R$,или $x_0 - R < x < x_0 + R$. Следовательно, интервалом сходимости ряда (2.7) будет $(x_0 - R; x_0 + R)$, а радиус сходимости ряда (2.17) и (2.7) совпадают.

Пример 6. Найти область сходимости степенного ряда

$$1 + \frac{(x-3)}{2^3} + \frac{(x-3)^2}{3^3} + \frac{(x-3)^3}{4^3} + \ldots + \frac{(x-3)^n}{(n+1)^3} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{(n+1)^3}$$

Решение.

Здесь $x_0 = 3, a_n = \dfrac{1}{(n+1)^3}, a_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1+1)^3} = \dfrac{1}{(n+2)^3}$,

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{(n+1)^3} : \frac{1}{(n+2)^3}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+2)^3}{(n+1)^3}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)+1}{n+1}\right)^3 = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^3 = 1.$$

Следовательно, ряд сходится при $|x-3| < 1$, т.е. при $-1 < x - 3 < 1$.Исследуем ряд на сходимость в концах интервала. При $x = 4$ получаем числовой ряд

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{n^3} + \ldots, \qquad (2.18)$$

который является сходящимся как обобщенный гармонический с $\alpha = 3$. При $x = 2$ имеем $1 - \dfrac{1}{2^3} + \dfrac{1}{3^3} + \ldots + \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^3} + \ldots$, который абсолютно сходится, т.к. сходится ряд (2.18). Следовательно, областью сходимости является отрезок $[1;3]$.

Задачи для решения в аудитории

Задание. Даны степенные ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x-1)^n}{3n-2}$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{n!}$, в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{2^n\sqrt{n^2+1}}$, г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+2)^n}{2^n}$, д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n x^n}{\sqrt{n+1}}$, е) $1 + x + \ldots + n! x^n \ldots$, ж) $x + 4x^2 + \ldots + (nx)^n \ldots$.

Найти область их сходимости и интервал сходимости.

Ответы

Область сходимости: а) $0 \le x < 2$, б) $-\infty < x < \infty$, в) $-2 \le x < 2$, г) $-4 < x < 0$, д) $-\frac{1}{2} \le x < \frac{1}{2}$, е) $x = 0$, ж) $x = 0$.

Задача 1

Индивидуальные задания

Исследовать сходимость следующих степенных рядов. Найти их области сходимости.

6.01 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n + 2}$; 6.02 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(n+1)2^n}$; 6.03 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\left(n^2+1\right)^n}$;

6.04 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2+5}$; 6.05 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n n}{n^2+5}$; 6.06 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^2+8}}$;

6.07 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n+1}}$; 6.08 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{\sqrt{n+1}\cdot 3^n}$; 6.09 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \cdot \left(n^2+1\right)^n}{\left(3n^2+2\right)^n}$;

6.10 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{4^n \cdot \sqrt{n+1}}$; 6.11 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^n \cdot (n+1)}$; 6.12 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{n3^n}$;

6.13 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2+1}{5n^2+4}\right)^n x^n$; 6.14 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (n+1)(x+2)^n$;6.15 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^2+9}}$

6.16 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2+9}$; 6.17 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n \cdot 5^n}$; 6.18 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{3^n \sqrt{n^2+1}}$;

6.19 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$; 6.20 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n \sqrt{n^2+1}}$; 6.21 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{2^n}$;

6.22 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n x^n}{4^n}$; 6.23 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^n}{\sqrt{n+1}}$; 6.24 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n+1}}{2^n} \cdot x^n$;

6.25 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)\cdot x^n}{2^n}$.

Разложение функции в степенные ряды. Ряд Тейлора

Сейчас мы займемся вопросами разложения функций в степенные ряды. В дальнейшем будут рассматриваться также разложения функций в тригонометрические ряды. Наряду со степенными рядами относительно переменной *x*, т. е. рядами вида

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots \qquad (2.26)$$

нам будет удобно рассматривать также ряды, степенные относительно переменной $x - x_0$, ряды вида

$$a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots+a_n(x-x_0)^n+\ldots \quad (2.27)$$

1. Ряд Тейлора

Определение. Ряд

$$f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots \quad (2.36)$$

называется ***рядом Тейлора функции $f(x)$ в точке x_0***.

Из приведенных выше рассуждений следует.

Теорема 1. Если функция $f(x)$ разлагается в степенной ряд (2.36), то это разложение единственно и совпадает с разложением функции $f(x)$ в ряд Тейлора функции в точке $x_0=0$.

Если в (2.36) полагать $x_0=0$, то получим ***ряд Маклорена для функции $f(x)$***

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots, \quad (2.37)$$

который является частным случаем ряда Тейлора.

Из приведенных выше рассуждений следует, что если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 производные любого порядка, то для нее можно составить ряд Тейлора или (при $x_0=0$) ряд Маклорена (2.37).

Определение 3. Функция $f(x)$ называется ***порождающей*** для соответствующего ряда.

Пример 1. Написать формулу Маклорена для функции $f(x)=x^2e^x$ с остаточными членом в форме Лагранжа для $n=4$.

<u>Решение.</u> При $n=4$ из (2.42) имеем

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\frac{f^4(0)}{4!}x^4+\frac{f^5(t)}{5!}x^5.$$

Находим производные до порядка $4+1=5$ включительно:

$f'(x)=e^xx^2+2xe^x=\left(2x+x^2\right)\cdot e^x$;

$f'(x)=e^xx^2+2xe^x=\left(2x+x^2\right)\cdot e^x$;

$f''(x)=(2+2x)\cdot e^x+\left(2x+x^2\right)\cdot e^x=\left(2+4x+x^2\right)\cdot e^x$;

$f'''(x)=(4+2x)\cdot e^x+\left(2+4x+x^2\right)\cdot e^x=\left(6+6x+x^2\right)\cdot e^x$;

$f^{(4)}(x)=(6+2x)\cdot e^x+\left(6+6x+x^2\right)\cdot e^x=\left(12+8x+x^2\right)\cdot e^x$;

$f^{(5)}(x)=(8+2x)\cdot e^x+\left(12+8x+x^2\right)\cdot e^x=\left(20+10x+x^2\right)\cdot e^x$.

Для нашего случая:

$$f(0)=0\cdot e^0=0,\; f'(0)=\left(2\cdot 0+0^2\right)\cdot e^0=0,$$
$$f''(0)=\left(2+4\cdot 0+0^2\right)\cdot e^0=2,$$
$$f'''(0)=\left(6+6\cdot 0+0^2\right)\cdot e^0=6,$$
$$f^{(4)}(0)=\left(12+8\cdot 0+0^2\right)\cdot e^0=12,$$
$$f^{(5)}(t)=\left(20+10\cdot t+t^2\right)\cdot e^t.$$

Следовательно, $x^2e^x=\dfrac{2x^2}{2!}+\dfrac{6x^3}{3!}+\dfrac{12x^4}{4!}+\dfrac{\left(20+10t+t^2\right)\cdot e^t}{5!}x^5$, или $x^2e^x=x^2+x^3+\dfrac{x^4}{2}+\dfrac{\left(20+10t+t^2\right)\cdot e^t}{5!}x^5$, где $|t|<|x|$, t и x одного знака.

2. Разложение элементарных функций в ряд Тейлора

Ограничимся частным случаем $x_0=0$, т.е. рядами Маклорена, которые чаще используются на практике.

а) ***Разложение функции*** $\boldsymbol{f(x)=e^x}$

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots \tag{2.45}$$

б) ***Разложение функции*** $\boldsymbol{f(x)=\sin(x)}$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots \tag{2.46}$$

Нетрудно показать, что $\sin x$ равен сумме этого ряда на всей числовой оси, т.к. все производные функции $\sin x$ ограничены.

в) ***Разложение функции*** $\boldsymbol{f(x)=\cos x}$

Повторяя рассуждения и выкладки, аналогичные случаю функции $\sin x$, получаем

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots \tag{2.47}$$

Нетрудно показать, что данный ряд сходится к порождающей функции на всей числовой оси.

г) ***Разложение функции*** $\boldsymbol{f(x)=\ln(1+x)}$

Для разложения функции $f(x)=\ln(1+x)$ в ряд Маклорена воспользуемся формулой для суммы геометрической прогрессии

$$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots+(-1)^n x^n+\ldots, \tag{2.48}$$

которая имеет место, если $|x|<1$.

Если $x=3$, то получим числовой ряд

$$\ln 2 = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+\frac{(-1)^n}{n+1}+\ldots,$$

который является сходящимся, как гармонический. Таким образом, разложение (2.49) верно в промежутке $(-1;1]$.

д) ***Разложение функции $f(x)=\mathrm{arctg}\,x$***

$$\mathrm{arctg}\,x = x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\ldots, \qquad (2.51)$$

полученный ряд сходится при $x\in(-1;1]$. Действительно, подставим в (2.51) $x=1$ и, учитывая, что $\mathrm{arctg}1=\frac{\pi}{4}$, получаем разложение

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}}{2n-1}+\ldots,$$

которое является сходящимся числовым рядом и может быть использовано для приближенного вычисления π.

е) ***Разложение функции $f(x)=(1+x)^\alpha$***,

где α – произвольное действительное число. Нетрудно показать, что функция $(1+x)^\alpha$ в интервале сходимости $(-1;1)$ представима рядом

$$(1+x)^\alpha = 1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\ldots+$$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots \qquad (2.52)$$

Более того, можно показать, что при $\alpha\ge 0$ разложение (2.52) верно и в обоих концах интервала $(-1;1)$, т.е. имеет место на отрезке $[-1;1]$, а при $-1<\alpha<0$ – в правом конце, т.е. на полуинтервале $(-1;1]$.

Определение 6. Ряд (2.52) называется ***биномиальным рядом.***

Примеры практического применения степенных рядов

1.Вычисление значений функций

Пример1. Вычислить число e, т.е. значение функции e^x при $x=1$, с точностью до 0,001 (если известно, что $e<3$).

Решение. Имеем

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

Тогда

$$e^x \approx 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!},$$

причем абсолютная погрешность этого приближения равна

$h=\left|r_n(x)\right|=\frac{e^t}{(n+1)!}|x|^{n+1}$, где $|t|<|x|$. При $x=1$ получаем

$$e \approx 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}.$$

При этом $h=\frac{e^t}{(n+1)!}\cdot 1^{n+1}=\frac{e^t}{(n+1)!}$, где $0<t<1$,

но так как $e^t<e^1<3$, то $h<\frac{3}{(n+1)!}$.

Число n определим из равенства $\frac{3}{(n+1)!}<0{,}001$.

Откуда $\frac{3}{(n+1)!}<10^{-3}$, т.е. $(n+1)!>3\cdot 10^3=3000$.

Если взять $n=5$, то $(5+1)!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6=720<3000$.

Возьмем $n=6$, $(6+1)!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7=5040>3000$.

Следовательно,

$$e \approx 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}+$$

$$+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\frac{1}{720}\approx$$

≈ 2.718.

Пример 2. Вычислить $\cos 18^\circ$ с четырьмя верными знаками.

Решение. По формуле (2.47) §7 имеем

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}.$$

Так как угол 18° в радианах (с точностью до 10^{-5}) равен

$\frac{\pi\cdot 18^\circ}{180^\circ}\approx 0{,}31416$, то

$$\cos 18^\circ=1-\frac{(0{,}31416)^2}{2}+\frac{(0{,}31416)^4}{2\cdot 3\cdot 4}-\frac{(0{,}31416)^6}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}+\ldots$$

Для знакочередующихся рядов абсолютная погрешность при замене суммы ряда некоторой его частичной суммой не превышает модуля первого отброшенного члена. Поэтому вычисление слагаемых проводим до тех пор, пока слагаемое по модулю не станет меньше 0,0001. Непосредственной проверкой убеждаемся, что

$\frac{(0{,}31416)^6}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}=\frac{(0{,}31416)^6}{720}<0{,}0001$, значит, достаточно ограничиться тремя слагаемыми

$$\cos 18^\circ \approx 1-\frac{(0{,}31416)^2}{2}+\frac{(0{,}31416)^4}{2\cdot3\cdot4}\approx 0.901709\ .$$

2.Интегрирование функций

Пример 3. При изучении теории вероятности важную роль играет функция

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}dx,$$

называемая ***функцией Лапласа,*** или ***интегралом вероятностей***. Вычислить интеграл непосредственным интегрированием нельзя, так как $\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ не выражается через элементарные функции.

Заменяя в разложении (2.45) x на $-\frac{x^2}{2}$, получаем

$$e^{-\frac{x^2}{2}}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2^4\cdot2!}-\frac{x^6}{2^6\cdot3!}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}x^{2n}}{2^{2n}n!}+\ldots$$

Это разложение, как и разложение для e^x, имеет место на всей числовой оси, поэтому его можно почленно интегрировать, т.е.

$$\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\int_0^x\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2^4\cdot2!}-\frac{x^6}{2^6\cdot3!}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}x^{2n}}{2^{2n}n!}\right)dx=$$

$$=\int_0^x dx+\frac{1}{2}\int_0^x x^2\,dx+\frac{1}{2^4\cdot2!}\int_0^x x^4dx-\frac{1}{2^6 3!}\int_0^x x^6dx+\ldots+$$

$$+\frac{(-1)^{n+1}}{2^{24}\cdot n!}\int_0^x x^{2n}dx+\ldots=x-\frac{x^3}{2\cdot3}+\frac{x^5}{2^4\cdot2!\cdot5}-\frac{x^7}{2^6\cdot3!\cdot7}+\ldots+$$

$$+\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+1}}{2^{2n}n!(2n+1)}+\ldots$$

Тогда

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(x-\frac{x^3}{2\cdot3}+\frac{x^5}{2^4\cdot2!\cdot5}-\frac{x^7}{2^6\cdot3!\cdot7}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+1}}{2^{2n}n!(2n+1)}+\ldots\right),$$

сходящимся на всей числовой прямой оси. Вычислить значение функции $F(x)$ очень просто, так как ряд быстро сходится.

3.Вычисление определенного интеграла

Пример 4. Вычислить интеграл $\int_0^1 \frac{1-\cos 2x^2}{x}dx$ с погрешностью $h < 0{,}0001$, где при $x = 0$ значение подынтегральной функции принимается равным единице.

<u>Решение.</u> Из формулы (2.47), заменяя x на $2x^2$, получаем

$$\cos 2x^2 = 1 - \frac{4x^4}{2!} + \frac{2^4x^8}{4!} - \frac{2^6x^{12}}{6!} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{2^{2n}x^{4n}}{(2n)!} + \ldots$$

$$1 - \cos 2x^2 = \frac{4x^4}{2!} - \frac{2^4x^8}{4!} + \frac{2^6x^{12}}{6!} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{2^{2n}x^{4n}}{(2n)!} + \ldots$$

Делением обеих частей последнего равенства на x находим

$$\frac{1-\cos 2x^2}{x} = \frac{4x^3}{2!} - \frac{2^4x^7}{4!} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{2^{2n}x^{4n-1}}{(2n)!} + \ldots$$

Это разложение, как и разложение для $\cos x$, имеет место на всей числовой оси, поэтому можно почленно интегрировать:

$$\int_0^1 \frac{1-\cos 2x^2}{x}dx = \int_0^1 \frac{4x^3}{2!}dx - \int_0^1 \frac{2^4x^7}{4!}dx + \ldots +$$

$$+\int_0^1 (-1)^{n+1}\frac{2^{2n}x^{4n-1}}{(2n)!}dx + \ldots = \frac{4\cdot x^4}{2!\cdot 4}\Big|_0^1 - \frac{2^4\cdot x^8}{4!\cdot 8}\Big|_0^1 + \frac{2^6\cdot x^{12}}{6!\cdot 12}\Big|_0^1 -$$

$$-\frac{2^8x^{16}}{8!\cdot 16} + \ldots = \frac{1}{2} - \frac{1}{12} + \frac{1}{135} - \frac{1}{2520} + \ldots$$

Данный ряд является знакочередующимся, для которого остаток ряда по модулю не превосходит модуль первого члена остатка ряда. Таким образом, вычисления проводятся до тех пор, пока слагаемое по модулю не будет меньше 0,0001.

Так как $h = |r_n| = \left|-\frac{1}{2520}\right| < 0{,}0001$, то достаточно взять

$$\int_0^1 \frac{1-\cos 2x^2}{x}dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{12} + \frac{1}{135} \approx 0{,}1657$$

4.Интегрирование дифференциальных уравнений

Рассмотрим теперь применение рядов Тейлора к решению дифференциальных уравнений. Пусть заданы дифференциальное уравнение и начальные условия, определяющие частное решение. Допустим, что решение уравнения в окрестности точки, в которой заданы начальные условия, можно разложить в степенной ряд,

$$y = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots$$

Продифференцируем этот ряд с неопределенными пока коэффициентами столько раз, каков порядок уравнения.

Подставляя затем в уравнение вместо неизвестной функции и ее производных соответствующие ряды, мы получим тождество, из которого и определим неизвестные коэффициенты ряда. При этом первые коэффициенты ряда определяются из начальных условий. Если, далее, доказать, что полученный ряд сходится, то можно быть уверенным, что он выражает искомое решение.

Достаточно большое число членов ряда дает нам как угодно хорошее приближенное выражение решения в виде многочлена.

Рассмотрим указанный метод на примерах.

Пример 5. Найти решение дифференциального уравнения $y'' - xy = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Решение. Ищем решение в виде ряда

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$$

Дифференцируем полученный ряд дважды, получаем

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots + n a_n x^{n-1} + \ldots$$

$$y'' = 2a_2 + 3 \cdot 2a_3 x + 4 \cdot 3a_4 x^2 + \ldots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2} + \ldots$$

Подставляем в дифференциальное уравнение вместо y и y'' их разложения, получаем тождество

$$\begin{aligned}&2a_2 + 3 \cdot 2a_3 x + 4 \cdot 3a_4 x^2 + \ldots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2} + \ldots = \\ &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots\end{aligned}$$

Приравниваем коэффициенты при одинаковых степенных x, находим $2a_2 = 0$, $3 \cdot 2a_3 = a_0$, $4 \cdot 3a_4 = a_1$, $5 \cdot 4a_5 = a_2, \ldots,$ $n \cdot (n-1)a_n = a_{n-2}, \ldots$

Откуда $a_2 = 0$, $a_3 = \dfrac{a_0}{2 \cdot 3}$, $a_4 = \dfrac{a_1}{3 \cdot 4}$, $a_5 = \dfrac{a_2}{5 \cdot 4}, \ldots,$ $a_n = \dfrac{a_{n-3}}{n \cdot (n-1)}, \ldots$

Для определения a_0 и a_1 воспользуемся начальными условиями: для $a_0 : y(0) = 0$, для $a_1 : y'(0) = 1$.

Тогда $a_3 = 0$, $a_4 = \dfrac{1}{3 \cdot 4}$, $a_5 = \dfrac{0}{5 \cdot 4}, \ldots,$ $a_6 = \dfrac{0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6}$, $a_7 = \dfrac{1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7}$, $a_8 = \dfrac{0}{4 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 8}$, $a_9 = \dfrac{0}{2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 9}$, $a_{10} = \dfrac{1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 10}$.

Нетрудно заметить

$a_{3m-1} = a_{3m} = 0$, $a_{3m+1} = \dfrac{1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \ldots 3m \cdot (3m+1)}$.

Значит

$$y = x + \frac{1}{3 \cdot 4} x^4 + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} x^7 + \ldots + \frac{1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \ldots 3m \cdot (3m+1)} + \ldots$$

С помощью признака Даламбера легко убедиться, что этот ряд является сходящимся на всей числовой прямой и, следовательно, представляет искомое решение дифференциального уравнения при всех x.

Заметим, что ***порядок уравнения*** нисколько не влияет на метод решения его при помощи рядов. Данный метод решения позволяет решить и нелинейные дифференциальные уравнения, которые не решаются в квадратурах, т.е. непосредственным интегрированием уравнения.

Пример 6. Найти решение дифференциального уравнения $y' = xy^2 + 1$, удовлетворяющее начальному условию $y(1) = 0$.

Решение. Это уравнение нелинейное, и поэтому подстановка вместо y его разложения в ряд

$$y = a_0 + a_1(x-1) + a_2(x-1)^2 + \ldots + a_n(x-1)^n$$

привела бы к сложным уравнениям для определения коэффициентов. Поэтому обычно поступают иначе.

Продифференцируем уравнение несколько раз подряд, рассматривая y как функцию от x:

$$y'' = y^2 + 2xyy',$$
$$y''' = 2yy' + 2yy' + 2x(y')^2 + 2xyy'' = 4yy' + 2x(y')^2 + 2xyy''$$
$$y^{IV} = 4(y')^2 + 4yy'' + 2(y')^2 + 4xy'y'' + 2yy'' + 2xy'y'' + 2xyy''' =$$
$$= 6(y')^2 + 6yy'' + 2xyy''' + 6xy'y''.$$

Подставляя во все уравнения и во все производные $x = 1$ и учитывая начальное условие $y(1) = 0$, последовательно найдем:

$$y'(1) = 1y^2(1) + 1 = 1,\ y''(1) = y^2(1) + 2 \cdot 1 \cdot y(1) \cdot y'(1) = 0^2 + 2 \cdot 0 \cdot 1 = 0,$$
$$y'''(1) = 4y(1)y'(1) + 2 \cdot 1 \cdot (y'(1))^2 + 2 \cdot 1 \cdot y(1) \cdot y''(1) =$$
$$4 \cdot 0 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 1 \cdot 0 \cdot 0 = 2,$$
$$y^{IV}(1) = 6 \cdot (y'(1))^6 + 6 \cdot y(1) \cdot y''(1) + 2 \cdot 1 \cdot y(1) \cdot y'''(1) =$$
$$= 6 \cdot 1 + 6 \cdot 0 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot 0 \cdot 2 = 6, \ldots\ldots$$

Следовательно, искомое решение записывается в виде ряда Тейлора в точке $x_0 = 1$ равно

$$y = (x-1) + \frac{(x-1)^3}{3} + \frac{(x-1)^4}{4} + \ldots$$

Полученный многочлен в окрестности точки $x = 1$ дает как угодно хорошее приближенное выражение решении.

Задачи для решения в аудитории

Задание 1. Разложить $\ln x$ по степеням $(x-1)$.

Задание 2. Пользуясь соответствующим рядом, вычислить $\cos 10^{\circ}$ с точностью до $0{,}0001$.

Задание 3. Пользуясь соответствующим рядом, вычислить $\operatorname{arctg}\frac{1}{5}$ с точностью до $0{,}0001$.

Задание 4. Разлагая подынтегральную функцию в ряд, вычислить интеграл $\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}dx$. Указание. При решении этого примера полезно иметь в виду равенство: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

Задание 5. Найти решение дифференциального уравнения $y''+xy'+y=0$, удовлетворяющее начальному условию $y(0)=0,\ y'(0)=1$.

Ответы

1. $\ln x=(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}+\ldots+(-1)^n\frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}+\ldots$. 2. $0{,}9848$.

3. $0{,}1973$. 4. $\frac{\pi^2}{12}$. 5. $x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{1\cdot 3\cdot 5}-\frac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!!}+\ldots$.

Задача 2.

Индивидуальные задания

Вычислить определенный интеграл с помощью разложения подынтегральной функции в степенной ряд. Обеспечить абсолютную погрешность $h<0{,}001$:

7.01 $\int_0^{0,1} e^{-5x^2}dx$; 7.02 $\int_0^{0,1}\frac{\sin 10x^2}{x}dx$; 7.03 $\int_0^{1/2}\frac{1-\cos x^2}{x^4}dx$;

7.04 $\int_0^{0,2}\frac{e^{-5x^2}-1}{x}dx$; 7.05 $\int_0^{0,9}\frac{\ln\left(1+\frac{x}{5}\right)}{x}dx$; 7.06 $\int_0^{1/2} e^{-x^3}dx$;

7.07 $\int_0^{0,4}\sin 3x^2\,dx$; 7.08 $\int_0^{1/2}\cos 5x^3\,dx$; 7.09 $\int_0^{0,1}\frac{e^{-2x}-1}{x}dx$;

7.10 $\int_0^{0,6}\frac{\ln\left(1+\frac{x}{6}\right)}{x}dx$; 7.11 $\int_0^{3} e^{-\frac{x^2}{90}}dx$; 7.12 $\int_0^{1/2}\sin\frac{x^2}{2}dx$;

7.13 $\int\limits_0^{0,1} \cos 5x^2\,dx$;   7.14 $\int\limits_0^{0,3} e^{-3x^2}\,dx$;   7.15 $\int\limits_0^{1/2} \frac{e^{-x^2}-1}{10x}\,dx$;

7.16 $\int\limits_0^{1/2} e^{-\frac{x^2}{5}}\,dx$;   7.17 $\int\limits_0^{0,4} \frac{1-\cos 7x^2}{x^2}\,dx$; 7.18 $\int\limits_0^{0,2} \sin\frac{x^4}{4}\,dx$;

7.19 $\int\limits_0^{1/2} \cos\left(\frac{x}{5}\right)^2 dx$;   7.20 $\int\limits_0^{0,2} \frac{\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)}{x}\,dx$;   7.21 $\int\limits_0^{0,1} \frac{e^{-5x^2}-1}{x^2}\,dx$;

7.22 $\int\limits_0^{1/2} x^2\cos x^4\,dx$;   7.23 $\int\limits_0^{1/2} \frac{e^{-x^3}-1}{x^2}\,dx$;   7.24 $\int\limits_0^{1/2} \frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^2}\,dx$;

7.25 $\int\limits_0^{1/2} \frac{e^{-2x^2}-1}{x^2}\,dx$.

Задача 3

Найти первые три числа разложения в степенной ряд решения дифференциального уравнения с заданными условиями.

8.01 $y'' = yy' - x^2;\ y(0)=1,\ y'(0)=1.$

8.02 $y' = x^2y^2 - 1, y(0) = 1.$

8.03 $y' = e^y + xy, y(0) = 0.$

8.04 $y' = 2xy, y(1) = 1.$

8.05, $y' = -\frac{y}{x}, y(2) = 2.$

8.06 $y' = \cos x + y^2, y(0) = 1.$

8.07 $y' = e^x + y^2, y(0) = 0.$

8.08 $y'' = y^2 - x^2;\ y(0)=1,\ y'(0)=1.$

8.09 $y'' = yy' + x^2;\ y(0)=1,\ y'(0)=1.$

8.10 $y' = y + y^2, y(0) = 3.$

8.11 $y' = 2e^y - xy, y(0) = 0.$

8.12 $y' = \sin x + y^2, y(0) = 1.$

8.13 $y' = e^x + y, y(0) = 4.$

8.14 $y' = x^2 + y^2, y(0) = 2.$

8.15 $y' = \sin x + 0{,}5y^2, y(0) = 1.$

8.16 $y' = 2e^y + xy, y(0) = 0.$

8.17 $y' = x + x^2 + y^2\ y(0) = 5.$

8.18 $y'' = yy' - x^2;\ y(1) = 0,\ y'(1) = 1.$

8.19 $y'' + xy^2 = 0;\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

8.20 $y' = e^{2x} + y,\ y(1) = 1.$

8.21 $y'' - \sin x + \cos y = 0;\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$

8.22 $y'' + xy + e^{x} = 0;\ y(1) = 0,\ y'(0) = 1.$

8.23 $y'' = e^{3x} + y^2;\ y(1) = 0,\ y'(0) = 0.$

8.24 $y' = e^{2x} + y,\ y(1) = 1.$

8.25 $y'' = xy^2 + x^2;\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1.$