Определение 1. ***Тригонометрическим рядом*** называется ряд

$$\frac{a_0}{2}+a_1\cos x+b_1\sin x+a_2\cos 2x+b_2\sin 2x+\ldots+a_n\cos nx+$$
$$+b_n\sin nx+\ldots \qquad (2.54)$$

Числа $\frac{a_0}{2}$, a_1, $b_1,\ldots$, a_n, $b_n,\ldots$ называются ***коэффициентами*** тригонометрического ряда (2.54).

Допустим, что функция $f(x)$ представляется на отрезке $[-\pi;\pi]$ тригонометрическим рядом

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx), \qquad (2.55)$$

и предположим, что этот ряд является сходящимся для любого x отрезка $[-\pi;\pi]$, следовательно, его можно почленно интегрировать. Не будем приводить вывод коэффициентов a_n и b_n, а лишь отметим, что с помощью приемов интегрирования получаем

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx, \qquad (2.56)$$

где $n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots$,

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx, \qquad (2.57)$$

где $n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots$.

Пример 1. Разложить функцию $f(x)$,

$f(x)=\begin{cases}\pi, & -\pi\le x<0,\\ \pi-x, & 0\le x\le\pi\end{cases}$ на интервале $[-\pi;\pi]$ в ряд Фурье (рис.5).

<u>Решение.</u> Изобразим функцию графиком. Так как функция $f(x)$ кусочно-дифференцируема на отрезке $[-\pi;\pi]$, в силу того, что ее производная

$$f'(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x<0,\\ -1, & 0\le x\le\pi\end{cases}$$

имеет лишь одну точку разрыва $x=0$ внутри отрезка $[-\pi;\pi]$, то ряд Фурье функции $f(x)$ сходится к порождающей его функции во всех точках $x\in[-\pi;\pi]$. При этом значение полученного ряда в концах интервала равно

$$\frac{f(-\pi+0)+f(\pi-0)}{2}=\frac{\pi+0}{2}=\frac{\pi}{2}.$$

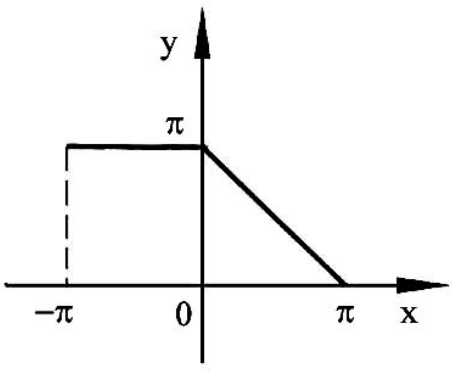

Рис.5

Вычислим коэффициенты Фурье. По формуле (2.56) имеем

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \pi\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} (\pi - x)\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \pi\,dx - \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\,dx = x\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{x^2}{2\pi}\Big|_{0}^{\pi} = \pi - (-\pi) - \left(\frac{\pi^2}{2\pi} - 0\right) =$$

$$= 2\pi - \frac{\pi}{2} = \frac{3}{2}\pi.$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \pi\cos nx\,dx +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} (\pi - x)\cos nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx - \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos nx\,dx.$$

При вычислении интеграла $\int_{0}^{\pi} x\cos nx\,dx$ воспользуемся формулой интегрирования по частям

$$\int_{a}^{b} u\,dv = u\cdot v\Big|_{a}^{b} - \int_{a}^{b} v\,du. \qquad (2.58)$$

Приняв $u = x$, $dv = \cos nx\,dx$, откуда $du = dx$, $v = \int \cos nx\,dx = \frac{1}{n}\int \cos nx\,dnx = \frac{\sin nx}{n}$.

Тогда

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{x\sin nx}{n}\Big|_{0}^{\pi} - \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin nx\,dx\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi\sin \pi n}{n} - \frac{0\cdot \sin 0n}{n} - \frac{1}{n^2}\int_{0}^{\pi} \sin nx\,dnx\right) =$$

$$= \frac{\cos nx}{\pi\cdot n^2}\Big|_{0}^{\pi} = \frac{\cos \pi n}{\pi n^2} - \frac{\cos 0}{\pi n^2} = \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2}.$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dnx = -\frac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} =$$

$$= -\left(\frac{\sin \pi n - \sin(-\pi n)}{n}\right) = -\left(\frac{\sin \pi n + \sin \pi n}{n}\right) = -\frac{2\sin \pi n}{n} = 0.$$

Окончательно имеем

$$a_n = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx - \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos nx\,dx = 0 - \frac{(-1)^n - 1}{\pi n^2} = \frac{(-1)^{n+1} + 1}{\pi n^2}.$$

По формуле (2.57) имеем

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} \pi\sin nx\,dx +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} (\pi - x)\sin nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,dx - \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\sin nx\,dx =$$

$$=-\frac{1}{\pi}\cos nx|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx.$$

При вычислении интеграла $\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx$ воспользуемся формулой (2.58). Приняв $u=x$, $dv=\sin nx\,dx$, откуда $du=dx$, $v=\int\sin nx\,dx=\frac{1}{n}\int\sin nx\,dnx=-\frac{\cos nx}{n}$.

Тогда

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx=-\frac{x\cos nx}{\pi n}\Big|_0^{\pi}+\frac{1}{\pi n}\int_0^{\pi}\cos nx\,dx=$$

$$=-\left(\frac{\pi\cos\pi n}{\pi n}-\frac{0\cdot\cos 0}{\pi n}\right)+\frac{1}{\pi n^2}\int_0^{\pi}\cos nx\,dnx=$$

$$=\frac{(-1)^n}{n}+\frac{1}{\pi n^2}\sin nx|_0^{\pi}=\frac{(-1)^{n+1}}{n}+\frac{1}{\pi n^2}(\sin\pi n-\sin 0)=\frac{(-1)^{n+1}}{\pi n^2}.$$

Окончательно имеем

$$b_n=\frac{\cos nx}{x}\Big|_{-\pi}^{\pi}-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x\sin nx\,dx=\frac{\cos\pi n-\cos(-\pi n)}{n}-$$

$$-\frac{(-1)^{n+1}}{\pi n^2}=\frac{\cos\pi n-\cos\pi n}{n}+\frac{(-1)^{n+2}}{\pi n}=0+\frac{(-1)^{n+2}}{\pi n}=\frac{(-1)^{n+2}}{\pi n}.$$

Следовательно, функции $f(x)$ соответствует ряд Фурье

$$f(x)=\frac{3}{4}\pi+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{n+1}+1}{\pi n}\cos nx+\frac{(-1)^n}{\pi n}\sin nx\right).$$

3. Разложение в ряд Фурье функций, заданных на отрезке $[-\ell;\ell]$

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{\pi n}{\ell}x+b_n\sin\frac{\pi n}{\ell}x\right), \tag{2.59}$$

где

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{\pi n}{\ell}x\cdot\frac{\pi}{\ell}dx=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\cos\frac{\pi n}{\ell}x\,dx,$$
$$n=0,\ 1,\ 2,\ldots, \tag{2.60}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{\pi n}{\ell}x\cdot\frac{\pi}{\ell}dx=\frac{1}{\ell}\int_{-\ell}^{\ell} f(x)\sin\frac{\pi n}{\ell}x\,dx,$$
$$n=0,\ 1,\ 2,\ldots, \tag{2.61}$$

Таким образом, функцию $f(x)$, определенную на отрезке $[-\ell;\ell]$ можно разложить в ряд Фурье (2.59), коэффициенты которого вычисляются по формулам

(2.60), (2.61). Равенство (2.59) может нарушиться лишь в точках разрыва функции и на концах отрезка $[-\ell;\ell]$.

Пример 2. Разложить функцию $f(x)=x$ на интервале $(-1;1)$ в ряд Фурье.

Решение. По формуле (2.59) (при $\ell=2$) имеем

$$f(x)=x=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\pi nx+b_n\sin\pi nx\right).$$

Вычислим коэффициенты ряда a_n по формуле (2.60) и воспользовавшись формулой интегрирования по частям (2.58), где $U=x$, $dV=\cos\,\pi nx\,dx$, откуда $dU=dx$, $V=\frac{1}{\pi n}\sin\pi nx$, получим

$$a_n=\frac{1}{1}\int_{-1}^{1}x\cos\pi nx\,dx=x\frac{\sin\pi nx}{\pi n}\Big|_{-1}^{1}-\int_{-1}^{1}\frac{\sin\pi nx}{\pi n}dx=$$

$$=\frac{\sin\pi n+\sin(-\pi n)}{\pi n}-\frac{1}{\pi^2n^2}\int_{-1}^{1}\sin\pi nx\,d\pi nx=\frac{\sin\pi n-\sin\pi n}{\pi n}+$$

$$+\frac{\cos\pi nx}{\pi^2n^2}\Big|_{-1}^{1}=0+\frac{\cos\pi n-\cos(-\pi n)}{\pi^2n^2}=\frac{\cos\pi n-\cos\pi n}{\pi^2n^2}=0.$$

Вычислим коэффициенты ряда b_n по формуле (2.61) и воспользовавшись формулой интегрирования по частям (2.58), где $U=x$, $dV=\sin\,\pi nx\,dx$, откуда $dU=dx$, $V=-\frac{1}{\pi n}\cos\pi nx$, получим

$$b_n=\frac{1}{1}\int_{-1}^{1}x\sin\pi nx\,dx=-x\frac{\cos\pi nx}{\pi n}\Big|_{-1}^{1}+\int_{-1}^{1}\frac{\cos\pi nx}{\pi n}dx=$$

$$=-\left(\frac{\cos\pi n+\cos(-\pi n)}{\pi n}\right)+\frac{1}{\pi^2n^2}\sin\pi nx\Big|_{-1}^{1}=$$

$$=-\frac{\cos\pi n-\cos\pi n}{\pi n}+\frac{\sin\pi n-\sin(-\pi n)}{\pi n}=$$

$$=-\frac{2\cos\pi n}{\pi n}+\frac{\sin\pi n+\sin\pi n}{\pi^2n^2}=\frac{2(-1)^{n+1}}{\pi n}+0=\frac{2(-1)^{n+1}}{\pi n}.$$

Таким образом,

$$f(x)=x=\frac{2}{\pi}\left(\sin\pi x-\frac{\sin 2\pi x}{2}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{\sin\pi nx}{n}+\ldots\right)$$

для $-1<x<1$.

4. Разложение в ряд Фурье периодических функций

Если данная функция $f(x)$ является периодической с периодом,

$T=2\pi$, $f(x+2\pi k)=f(x)$ и для нее имеет место разложение в ряд Фурье на отрезке $[-\pi;\pi]$, то оно справедливо и на всей прямой $(-\infty;\infty)$.

Действительно, сумма тригонометрического ряда Фурье

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

если она существует, является периодической функцией с периодом 2π, так как $\cos nx$ и $\sin nx$ периодические функции.

Аналогично, если функция имеет период, то разложение (2.59) имеет место для всей прямой.

Пример 3. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию $f(x)$, определенную следующим образом на периоде (рис. 6):

$$f(x)=\begin{cases}0,\ -\pi\le x\le 0,\ 2<x\le\pi,\\ 1,\ 0<x<2,\\ 1/2,\ x=0,\ x=2.\end{cases}$$

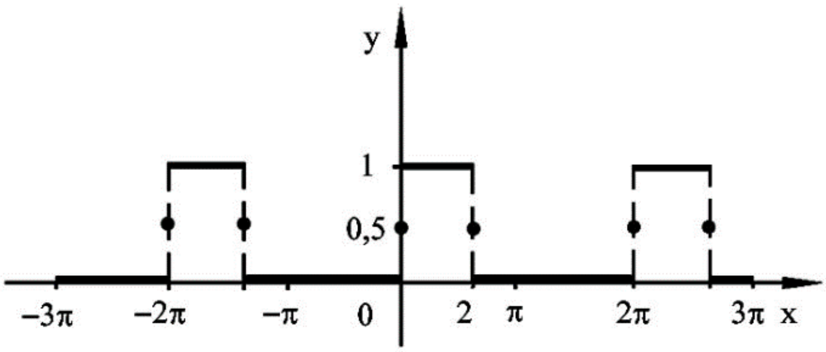

Рис.6

Решение. Данная функция кусочно-дифференцируема (рис.6), следовательно,

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx).$$

Изобразим график функции с ее периодическим продолжением.

Применив формулы (2.56) и (2.57), найдём коэффициенты Фурье.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^2 dx=\frac{x}{\pi}\Big|_0^2=\frac{2}{\pi},$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_1^2 1\cdot\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi n}\sin nx\Big|_0^2=$$

$$=\frac{\sin 2n}{\pi n}-\frac{\sin 0}{\pi n}=\frac{\sin 2n}{\pi n},$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_1^2 1\cdot\sin nx\,dx=-\frac{1}{\pi n}\cos nx\Big|_0^2=$$

$$=-\frac{\cos 2n}{\pi n}-\frac{\cos 0}{\pi n}=\frac{1-\cos 2n}{\pi n}.$$

Следовательно, разложение в ряд Фурье функции $f(x)$ имеет вид

$$f(x)=\frac{1}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin 2n}{\pi n}\cos nx+\frac{1-\cos 2n}{\pi n}\sin nx\right).$$

Оно справедливо во всех точках непрерывности функции $f(x)$.

5. Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций

Как было установлено, задачу разложения функции *f(x)* в ряд Фурье на произвольном сегменте [*a*, *b*] можно свести к задаче разложения несколько видоизмененной функции на сегменте [-*π*, π]. Поэтому мы далее будем ограничиваться только этим свойством.

Итак, пусть функция *f*(*x*) задана на сегменте [-*π*, π] и удовлетворяет условиям Дирихле. Займемся исследованием двух частных случаев.

Напомним, что функция *f(x)* называется *четной*, если

$$f(-x)=f(x)$$

во всей области ее задания; и *нечетной*, если $f(-x)=-f(x))$
(также для всех тех *x*, для которых значение функции определено).

Как легко проверить, произведение четной функции на четную, равно как и нечетной на нечетную, четно, а произведение четной и нечетной функции нечетно.

Очевидно, если функция *f(x)* нечетная, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=0,$$

а если функция *f(x)* четная, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx=2\int_{0}^{\pi} f(x)dx.$$

Четность функций изменяется при их дифференцировании и интегрировании.

Пусть $f(x)$ – нечетная на отрезке $[-\pi;\pi]$ функция, т.е. $f(-x)=-f(x)$, ее ряд Фурье содержит только синусы, т.е.

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx\, dx, \qquad (2.62)$$

где

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx,\ n=1,\ 2,\ 3,\ldots \qquad (2.63)$$

Если $f(x)$ – четная на отрезке $[-\pi;\pi]$ функция, т.е. $f(-x)=f(x)$, ее ряд Фурье содержит только свободный член и косинусы, т.е.

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx, \tag{2.64}$$

где

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos nx\,dx,\ n=0,\ 1,\ 2,\ldots \tag{2.65}$$

Аналогичные формулы можно получить для функции $f(x)$ с периодом 2ℓ.

Если $f(x)-$нечетная функция, ее ряд Фурье имеет вид

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{\pi nx}{\ell}, \tag{2.66}$$

где

$$b_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}f(x)\sin\frac{\pi nx}{\ell}dx,\ n=1,\ 2,\ 3,\ldots \tag{2.67}$$

Если $f(x)-$четная функция, ее ряд Фурье имеет вид

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{\pi nx}{\ell}, \tag{2.68}$$

где

$$a_n=\frac{2}{\ell}\int_0^{\ell}f(x)\cos\frac{\pi nx}{\ell}dx,\ n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ldots \tag{2.69}$$

Задачи для решения в аудитории

Задача 1. Разложить $\ln x$ по степеням $(x-1)$.

Задача 2. Пользуясь соответствующим рядом, вычислить $\cos 10^{\circ}$ с точностью до $0{,}0001$.

Задача 3. Пользуясь соответствующим рядом, вычислить $\operatorname{arctg}\frac{1}{5}$ с точностью до $0{,}0001$.

Задача 4. Разлагая подынтегральную функцию в ряд, вычислить интеграл $\int_0^1\frac{\ln(1-x)}{x}dx$. Указание. При решении этого примера полезно иметь в виду равенство: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

Задача 5. Найти решение дифференциального уравнения $y''+xy'+y=0$, удовлетворяющее начальному условию $y(0)=0, y'(0)=1$.

Ответы

1. $\ln x=(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\frac{(x-1)^3}{3}+\ldots+(-1)^n\frac{(x-1)^{n+1}}{n+1}+\ldots$. 2. $0{,}9848$.

3. $0{,}1973$. 4. $\dfrac{\pi^2}{12}$. 5. $x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{1\cdot 3\cdot 5}-\dfrac{x^7}{7!}+\ldots+(-1)^{n+1}\dfrac{x^{2n-1}}{(2n-1)!!}+\ldots$.

Индивидуальные задания

Разложить данную функцию $\boldsymbol{f(x)}$ в ряд Фурье в интервале $(-\ell;\ell)$.

9.01 $f(x)=x+1$ в интервале $(-\pi;\pi)$.

9.02 $f(x)=x+2$ в интервале $(-2;2)$.

9.03 $f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}$ в интервале $(-\pi;\pi)$.

9.04 $f(x)=1+|x|$ в интервале $(-1;1)$.

9.05 $f(x)=\begin{cases}0, & -\pi<x<0\\ x, & 0\le x<\pi\end{cases}$ в интервале $(-\pi;\pi)$.

9.06 $f(x)=|1-x|$ в интервале $(-2;2)$.

9.07 $f(x)=|x|$ в интервале $(-\pi;\pi)$.

9.08 $f(x)=x-1$ в интервале $(-1;1)$.

9.09 $f(x)=|x-1|$ в интервале $(-2;2)$.

9.10 $f(x)=\begin{cases}2, & -\pi<x<0;\\ 1, & 0\le x<\pi\end{cases}$ в интервале $(-\pi;\pi)$.

9.11 $f(x)=\begin{cases}0, & -3<x\le 0;\\ x, & 0<x<3\end{cases}$ в интервале $(-3;3)$.

9.12 $f(x)=2x$ в интервале $-1<x<1$.

9.13 $f(x)=\begin{cases}x, & -\pi<x\le\pi;\\ \pi-x, & \dfrac{\pi}{2}<x<\pi\end{cases}$ в интервале $-\pi<x<\pi$.

9.14 $f(x)=\begin{cases}1, & -2<x<0;\\ 3, & 0\le x<2\end{cases}$ в интервале $-2<x<2$.

9.15 $f(x)=\pi-2x$ в интервале $(-\pi;\pi)$.

9.16 $f(x)=3x$ в интервале $-2<x<2$.

9.17 $f(x)=\begin{cases}0, & -4<x\le 0;\\ x, & 0\le x<4\end{cases}$ в интервале $(-4;4)$.

9.18 $f(x)=\begin{cases}x, & -1<x\le 0;\\ 2-x, & 0<x<1\end{cases}$ в интервале $(-1;1)$.

9.19 $f(x)=\begin{cases}0, & -2<x\le 0;\\ \dfrac{x}{2}, & 0\le x<2\end{cases}$ в интервале $(-2;2)$.

9.20 $f(x) = 10 - x$ в интервале $(-5;\ 5)$.

9.21 $f(x) = \begin{cases} x + \pi, & -\pi < x \le 0; \\ \pi - x, & 0 < x < \pi \end{cases}$ в интервале $(-\pi;\ \pi)$.

9.22 $f(x) = -\dfrac{x}{2}$ в интервале $(-\pi;\ \pi)$.

9.23 $f(x) = 4 - x$ в интервале $(-4;\ 4)$.

9.24 $f(x) = \dfrac{x}{3}$ в интервале $(-\pi;\ \pi)$.

9.25 $f(x) = x - 3$ в интервале $(-3;\ 3)$.