Раздел 8. Теория вероятностей и математическая статистика.

Лекция №1

Тема 8.1. Основные понятия и теоремы теории вероятностей.

Основные правила комбинаторики (правило суммы, правило произведения). Сочетания, размещения, перестановки.

Понятие события, виды событий. Алгебра событий. Относительная частота и её свойства. Аксиоматическое определение вероятности события. Статистическая устойчивость частот. Пространство элементарных событий. Формула для определения вероятности события. Классическое и статистическое определения вероятности события. Теоремы сложения и умножения вероятностей. Формулы полной вероятности.

§1. Основные правила комбинаторики

1. Правило сложения

Пример 1. Пусть из пункта A в пункт B можно добраться самолётом, поездом и автобусом, причём между этими пунктами существует 2 авиамаршрута, 1 железнодорожный и 3 автобусных. Следовательно, общее число маршрутов между пунктами A и B равно: $2+1+3=6$. Обобщая этот пример, можно сформулировать правило сложения.

Если выбор каждого из объектов $a_i (i=1,2,...,\kappa)$ можно выполнить n_i способами, то выбор "или a_1, или $a_2, \ldots$, или a_κ" можно произвести $n=\sum\limits_{l=1}^{\kappa} n_i$ способами.

2. Правило умножения

Пример 2. Сколькими различными способами можно распределить 4 шара по двум лункам, в которые помещается ровно 1 шар. Очевидно, первую лунку можно заполнить 4 способами, т. к. при выборе первой лунки имеется 4 шара. Вторую лунку можно заполнить двумя шарами, т. к. после заполнения первой лунки осталось 3 шара. Заметим, что с каждым из четырех способов заполнения первой лунки может совпасть любой из трёх способов заполнения второй. Поэтому общее число способов распределения двух лунок равно: $4 \cdot 3 = 12$.

Запишем теперь правило умножения в общем виде.

Если выбор каждого из κ объектов $a_i (i=1, 2, ..., \kappa)$можно осуществить n_i способами, то выбор "и a_1, и $a_2, \ldots$, и a_κ" можно произвести $N=\mathop{\Pi}\limits_{l=1}^{\kappa} n_i$ способами.

3. Размещения

Пусть дано множество, состоящее из n элементов. *Размещением из n элементов по κ* $(0 \le \kappa \le n)$ элементов называется упорядоченное подмножество, содержащее κ различных элементов данного множества [6]. Все эти подмножества отличаются друг от друга или составом элементов, или порядком их распределения. Но число элементов во всех этих подмножествах равно κ. Для определения числа A_n^κ размещений из n элементов по κ учтём, что первый элемент подмножества может быть взят n различными способами, второй –

$(n-1)$ способами, κ-й элемент – $(n-(\kappa-1))$ способами. Отсюда, используя правило умножения, получим

$$A_n^{\kappa} = n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-(\kappa-1)) = \frac{\left[n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-(\kappa-1))\right]\cdot\left[n-\kappa\ldots1\right]}{\left[(n-\kappa)\cdot(n-(\kappa+1))\cdot\ldots\cdot1\right]} =$$

$$= \frac{n!}{(n-\kappa)!}$$

Здесь $n! = 1\cdot2\cdot3\ldots(n-1)\cdot n$ и $(n-\kappa)! = 1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(n-\kappa)$. Условимся считать $0! = 1$, поэтому $A_0^0 = \frac{0!}{0!} = 1$.

Пример 3. В соревнованиях принимают участие 16 команд. Сколькими способами могут распределиться три первых места? Для решения этой задачи необходимо найти число всех подмножеств, состоящих из трёх элементов, отличающихся составом (номерами команд) или порядком их размещения (подмножества №1, №2, №3 и №2, №1, №3 являются разными). Таким образом, имеем дело с размещением. Тогда искомое число равно:

$$A_{16}^3 = \frac{16!}{(16-3)!} = \frac{16!}{13!} = \frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11\cdot12\cdot13\cdot14\cdot15\cdot16}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11\cdot12\cdot13} =$$

$$= 14\cdot15\cdot16.$$

4. Перестановки

Перестановкой из n элементов называется размещение из n элементов по n элементов. Так как каждая перестановка содержит все n элементов множества, то различные перестановки отличаются друг от друга только порядком следования элементов [6].

Число всех возможных перестановок из n элементов обозначают

$$P_n = A_n^n = \frac{n!}{(n-n)!} = \frac{n!}{0!} = n!, \text{ т. е. } P_n = n!.$$

Пример 4. Сколькими способами можно расставить 6 различных книг на одной полке?

Искомое число равно: $P_6 = 6! = 1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6 = 720$. Действительно, первую книгу можно выбрать 6 способами, вторую – 5 способами и т. д., последнюю – 1 способом. По правилу умножения, общее число способов равно: $6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1 = 720$.

5. Сочетания

Пусть дано множество, состоящее из n элементов. Сочетанием из n элементов по $\kappa (0 \le \kappa \le n)$ элементов называется любое подмножество, которое содержит κ различных элементов данного множества. Таким образом, различными подмножествами считаются только те, которые отличаются составом элементов. Подмножества, отличающиеся друг от друга лишь порядком следования элементов, не считаются различными [6].

Число всех возможных сочетаний из n элементов по κ обозначается C_n^{κ}.

Так как число перестановок из κ равно $\kappa!$, то число размещений из n

элементов по κ – A_n^κ будет в $\kappa!$ раз больше, чем число сочетаний из n элементов по κ – C_n^κ, т. е. $A_n^\kappa = \kappa! C_n^\kappa$. Отсюда

$$C_n^\kappa = \frac{A_n^\kappa}{\kappa!} = \frac{n!}{(n-\kappa)!\kappa!}.$$

Пример 5. В бригаде из 25 человек нужно выделить четырёх для работы на определённом участке. Сколькими способами это можно сделать?

Так как порядок выбранных четырёх человек не имеет значения, то это можно сделать C_{25}^4 способами:

$$C_{25}^4 = \frac{25!}{(25-4)! \cdot 4!} = \frac{25!}{21! \cdot 4!} = \frac{21! \cdot 22 \cdot 23 \cdot 24 \cdot 25}{21! \cdot 4!} = \frac{22 \cdot 23 \cdot 24 \cdot 25}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 12650.$$

Задача 1. Сколько различных трёхзначных чисел может быть составлено из цифр 1, 2, 3, 4, 5 при условии:

а) в каждом числе нет одинаковых цифр;

б) числа могут содержать одинаковые цифры.

Решение.

а) искомое число чисел равно: $A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

Действительно, все трёхзначные числа представляют собой подмножества из трёх элементов, отличающихся и составом, и порядком следования элементов;

б) если числа могут содержать одинаковые цифры, то для цифры, стоящей на первом месте, в числе существует 5 возможностей; на втором месте – тоже 5, на третьем – также 5. По правилу умножения число всех трёхзначных чисел равно: $5^3 = 125$.

Задача 2. Группа учащихся изучает 8 различных учебных дисциплин. Сколькими способами можно составить расписание занятий в субботу, если в этот день недели должно быть 3 разных дисциплины (порядок дисциплин роли не играет).

Решение. Число способов равно:

$$P_8^3 = \frac{8!}{(8-3)! \cdot 3!} = \frac{8!}{5! \cdot 3!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{6 \cdot 7 \cdot 8}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 56.$$

Действительно, в данном случае мы имеем дело с подмножествами из трёх элементов, которые отличаются лишь составом.

Задача 3. Каким числом различных способов могут быть выбраны κ деталей из партии в n деталей при выборочном контроле качества продукции?

Решение. В этой задаче все подмножества, содержащие κ элементов, отличаются лишь составом элементов. Значит, число различных способов равно C_n^κ.

Задача 4. Карточка ”Спортлото” содержит 49 чисел. Играющий зачёркивает 6 произвольных чисел по своему усмотрению. После тиража объявляется 6 “счастливых” чисел. В случае совпадения по крайней мере 3 зачёркнутых “счастливых” чисел владелец карточки получает выигрыш тем больший, чем больше чисел угадано. Максимальный выигрыш достигается, если угаданы все 6 чисел. Необходимо определить:

а) Сколькими способами можно зачеркнуть 6 чисел на карточке “Спортлото” так, чтобы угадать 4 “счастливых” числа?

б) Сколькими способами можно зачеркнуть 6 чисел на карточке “Спортлото” так, чтобы был обеспечен выигрыш?

Решение. Различные комбинации зачёркнутых чисел отличаются только составом, т. е. являются сочетаниями:

а) Общее число различных способов выбора 6 чисел из 49 равно:

$$C_{49}^{6} = \frac{49!}{6!\cdot 43!} = 13983816 \ = 1{,}4\cdot 10^{7}.$$

б) Выигрыш достигается, если угадано или 3, или 4, или 5, или 6 “счастливых” числа, т. е. выигрыш может быть достигнут четырьмя вариантами. По правилу сложения, число способов в каждом из этих вариантов необходимо сложить. Рассмотрим первый вариант. Выигрыш 3 “счастливых” из 6: 3 “счастливых” числа из 6 можно выиграть C_6^3 способами, 3 “несчастливых” числа из (49 – 6) можно зачеркнуть C_{43}^3способами. Последовательный набор 3 из 6 “счастливых” чисел и 3 из 43 “несчастливых” на основании правила умножения может быть выполнен $C_6^3\cdot C_{43}^3$способами. Аналогично: 4 “счастливых” – $C_6^4\cdot C_{43}^2$,

5 “счастливых” – $C_6^5\cdot C_{43}^1$, 6 “счастливых” – $C_6^6\cdot C_{43}^0$ способами. Используя правило сложения, получим, что число способов, которыми можно зачеркнуть 6 чисел так, чтобы обеспечить выигрыш, равно:

$$C_6^3\cdot C_{43}^3 + C_6^4\cdot C_{43}^2 + C_6^5\cdot C_{43}^1 + C_6^6\cdot C_{43}^0 = 246820 \ = 13545 + 258 + 1 = 260624.$$

§2. Классическое определение вероятности

Событием (или случайным событием) называется всякий факт, который в результате опыта (эксперимента) может произойти или не произойти. Обозначаются события *A, B, C, …*.

Достоверным событием называется событие, которое в результате опыта непременно должно произойти, а *невозможным* – событие, которое в результате опыта не может произойти [7].

Пример 1. Если в урне находятся только цветные шары и из урны извлечён шар, то событие “извлечён цветной шар” является достоверным.

Пример 2. Если в ящике имеются только стандартные детали и из ящика наудачу извлечена деталь, то невозможным будет событие «извлечена нестандартная деталь».

Два события называются *несовместимыми*, если появление одного из них исключает появление другого. В противном случае события называются *совместными*.

Пример 3. В ящике имеются стандартные и нестандартные детали. Наудачу берут одну деталь. Событие *A* – “появилась стандартная деталь” и событие *B* – “появилась нестандартная деталь” являются несовместными событиями.

Пример 4. Брошена игральная кость. Событие *A* – “появление двух очков” и событие *B* – “появление чётного числа очков” совместны, так как появление одного из них не исключает появление другого.

События $A_1, A_2, ..., A_n$ называются *попарно несовместными*, если любые два из этих событий не совместны.

Пример 5. Произведено два выстрела по мишени, события A_1 - “два попадания”, A_2 - “только одно попадание”, A_3 - “ни одного попадания” попарно несовместные.

Полной группой событий называется множество событий таких, что в результате опыта непременно должно произойти хотя бы одно из них.

Элементарными событиями будем называть события ω_i, которые:

1) составляют полную группу событий;

2) несовместны;

3) по известному элементарному событию можно судить, произошло или не произошло событие *A*, возможное в данном эксперименте.

Множество элементарных событий, поставленных в соответствие эксперименту, называется *пространством элементарных событий*, обозначается $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ...\}$.

Пример 6. При однократном бросании игральной кости элементарными событиями являются события: $\omega_1 = \{1\}$ – “появление одного очка”; $\omega_2 = \{2\}$; $\omega_3 = \{3\}$; $\omega_4 = \{4\}$; $\omega_5 = \{5\}$; $\omega_6 = \{6\}$. Событие $A = \{\{1\}, \{3\}, \{5\}\}$ – появление “нечётного числа очков” является подмножеством пространства элементарных событий и является некоторым событием.

Элементарные события, принадлежащие событию *A,* называются *благоприятствующими* наступлению события *A.* В примере 6 это элементарные события ω_1, ω_3, ω_5.

События $A_1, A_2, ...$ называются *равновозможными*, если условия испытания обеспечивают одинаковую возможность осуществления каждого из них.

Пример 7. Появление того или иного числа очков при бросании игральной кости есть события равновозможные, т. к. игральная кость изготовлена из однородного материала и имеет строго симметричную форму.

Таким образом, каждое событие *A* определяется как подмножество пространства элементарных событий Ω. Очевидно, невозможному событию *A* не благоприятствует ни одно элементарное событие из Ω, т. е. оно совпадает с пустым множеством $\varnothing$; достоверному событию благоприятствуют все события пространства Ω.

Вероятностью случайного события *A* называется отношение числа элементарных равновозможных событий, благоприятствующих наступлению события *A*, к числу элементарных равновозможных событий:

$$P(A)=\frac{m}{n}. \qquad (2.1)$$

Рассмотрим некоторую область. Если вероятность попадания случайной точки в любую часть области пропорциональна мере этой области (длине, площади, объёму) и не зависит от её расположения и формы, то может быть использовано геометрическое определение вероятности: пусть геометрическая мера всей области S_D, а геометрическая мера части этой области, попадание в которую благоприятствует данному событию, есть S_d, то вероятность события равна: $P=S_d/S_D$.

Задача 1. Монета брошена два раза. Найти вероятность того, что хотя бы один раз появится герб.

Решение. Пространство элементарных событий представляет собой множество:

ω_1 – герб на первой монете, герб на второй монете;

ω_2 – герб на первой монете, цифра на второй монете;

ω_3 – цифра на первой монете, герб на второй монете;

ω_4 – цифра на первой монете, цифра на второй монете.

Событие A (выпадение хотя бы одного герба) = $\{\omega_1,\omega_2,\omega_3\}$, $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\omega_3,\omega_4\}$. Следовательно, $P(A)=3/4=0{,}75$.

Задача 2. В урне 3 белых и 9 чёрных шаров, из урны наугад вынимают один шар. Какова вероятность того, что вынутый шар оказался чёрным (событие A)?

Решение. Число случаев, благоприятствующих событию A, равно 9. Число всех равновозможных случаев равно 12 (9+3). Следовательно, $P(A)=9/12=0{,}75$.

Задача 3. В урне 4 белых и 7 чёрных шаров. Из урны одновременно вынимают два шара. Какова вероятность того, что оба шара белые (событие A)?

Решение. Найдём число элементарных событий: $n=C_{11}^2=\frac{11\cdot 10}{1\cdot 2}=55$. Число случаев, благоприятствующих событию A, можно определить по формуле

$$m=C_4^2=\frac{4!}{2!\cdot 2!}=\frac{2\cdot 3\cdot 4}{2\cdot 2}=6,$$

т. к. белых шаров 4, а выбираем из них 2. Тогда $P=\frac{m}{n}=6/55=0{,}109$.

Задача 4. Десять различных книг расставляются наудачу на одной полке. Найти вероятность того, что три определённые книги окажутся поставленными рядом.

Решение. Представим себе, что три определённые книги связаны вместе. Тогда число возможных способов расположения связки на полке равно числу перестановок из 8 элементов (связка плюс оставшиеся 7 книг), т. е. $P_8=8!$. Внутри связки три книги можно распределить $P_3=3!$ раз. При этом каждая комбинация внутри связки может сочетаться с каждой из P_8 комбинаций.

Поэтому число m благоприятствующих случаев равно $P_8 \cdot P_3$. Число равновозможных исходов, поставленных в соответствии опыту, $n = P_{10} = 10!$ Таким образом, исходная вероятность

$$P = \frac{P_8 \cdot P_3}{P_{10}} = \frac{8! \cdot 3!}{10!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10} = \frac{1}{15} \approx 0{,}067.$$