Лекция № 8
§9.Законы распределения непрерывных случайных величин

1. Нормальный закон распределения

Среди законов распределения, которым подчиняются встречающиеся на практике случайные величины, чаще всего приходится иметь дело с нормальным законом распределения. В частности, нормальный закон распределения имеет фундаментальное значение при обработке результатов испытаний или эксперимента.

Функция нормального распределения

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_0^x e^{\frac{-(x-a)^2}{2\sigma^2}}\,dx, \tag{1}$$

где a и σ^2 – параметры распределения, представляющие собой соответственно математическое ожидание и дисперсию случайной величины x.

Графики функции нормального распределения для различных значений дисперсий и математического ожидания показаны на рис. 1.9.

Нормальная плотность вероятности

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}. \tag{2}$$

На рис. приведены графики нормальной плотности вероятностей для различных значений дисперсии и математического ожидания.

Поэтому у случайных величин, подчиняющихся нормальному закону распределения, значения математического ожидания, медианы и моды совпадают между собой.

Если в выражениях (1) и (2) перейти к новой переменной, называемой *нормированной, случайной величиной,*

$$z = \frac{x-a}{\sigma}, \tag{3}$$

то получим

$$F(z) = F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{x-a}{\sigma}} e^{\frac{-z^2}{2}}\,dz \tag{4}$$

и

$$\varphi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}. \tag{5}$$

График нормальной плотности вероятности имеет максимальную ординату при $x=a$. Через эту же ординату проходит ось симметрии кривой.

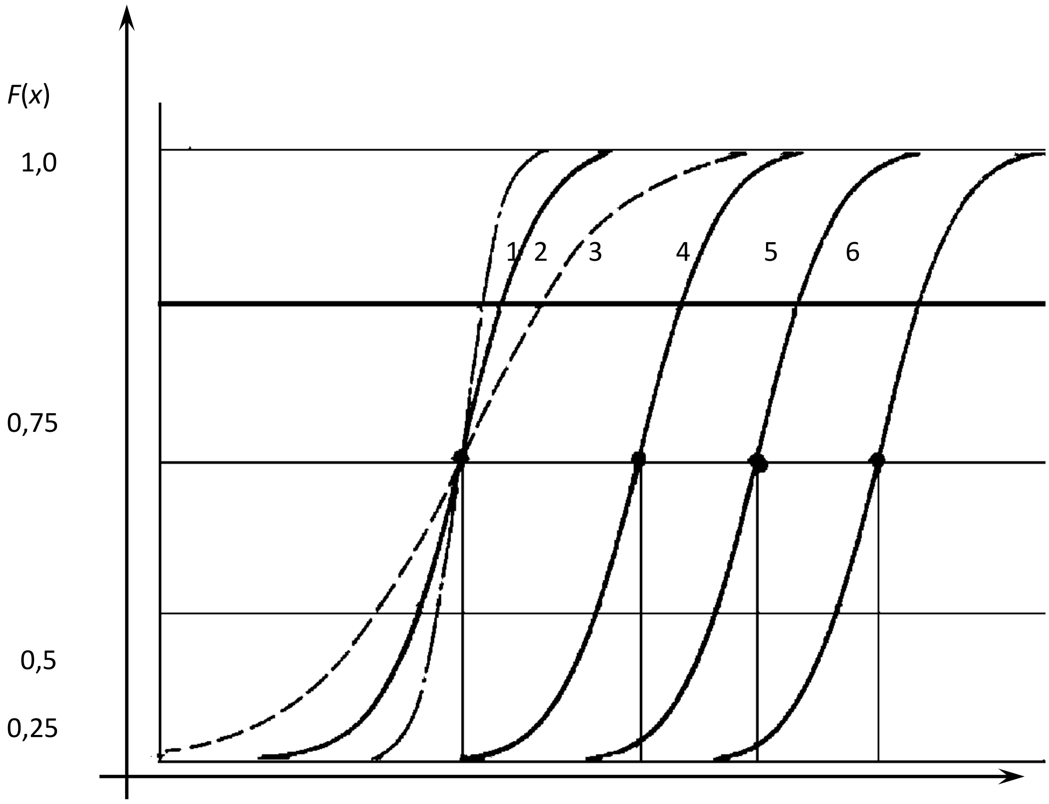


Рис. 1.9 Графики функции нормального распределения:

1, 2, 3–a_1=a_2=a_3=a; σ_1< σ_2< σ_3; 2, 4, 5, 6 – a_2< a_4< a_5< a_6; σ_2= σ_4= σ_5= σ_6

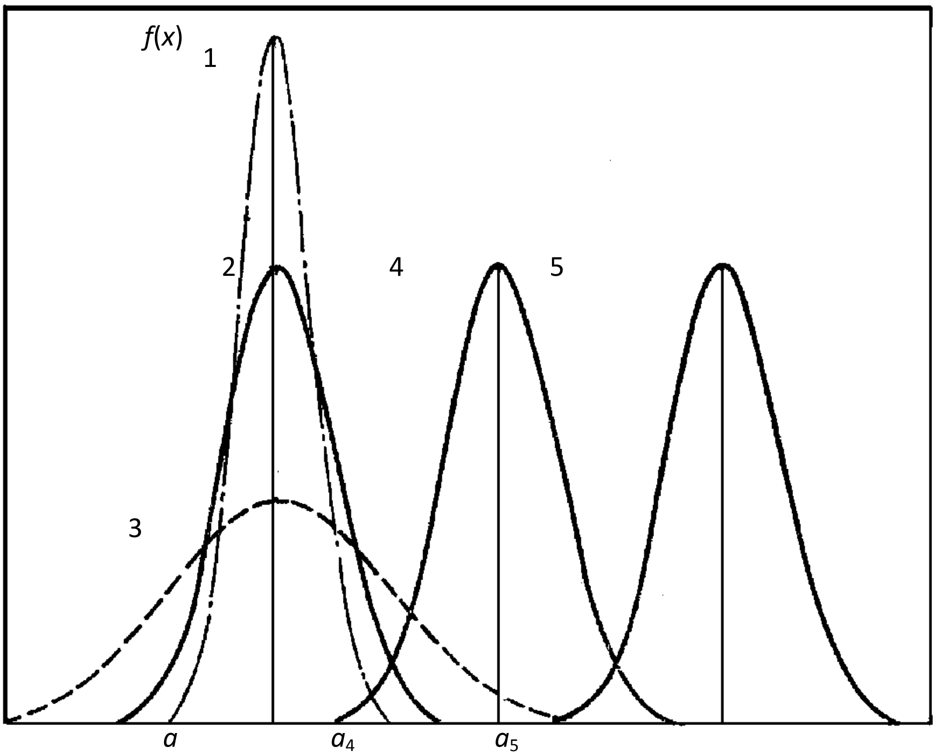


Рис. 1.10 Графики нормальной плотности вероятности:

Выражение (4) представляет собой функцию нормального закона распределения нормированной случайной величины (3) и называется *нормированной функцией нормального распределения*. Функция (5) является плотностью вероятности нормированного нормального распределения. Значения этой функции для различных z приведены в таблице прил.1. С нормальной плотностью вероятности (2) функция (5) имеет следующую связь:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma}\varphi(z). \quad (6)$$

Выражения (4) и (5) показывают, что если случайная величина x распределена нормально со средним, равным a, и дисперсией, равной σ^2, то нормированная случайная величина z (3) также имеет нормальное распределение со средним, равным нулю, и дисперсией, равной единице.

Вероятность нахождения в интервале $(-\infty,\ x_1)$ случайной величины X, следующей нормальному закону распределения, определится как

$$P(X \prec x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z_1} e^{\frac{-z^2}{2}} dz\,, \quad (7)$$

или, что легко доказать,

$$P(X \prec x_1) = 0{,}5 + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{z_1} e^{\frac{-z^2}{2}} dz\,. \quad (8)$$

Интеграл с переменным верхним пределом вида

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{z} e^{\frac{-z^2}{2}} dz \quad (9)$$

носит название функции Лапласа. Геометрически функция Лапласа представляет собой площадь под кривой $\varphi(z)$ в промежутке от 0 до z . Значения этой функции приведены в таблице прил. 2.

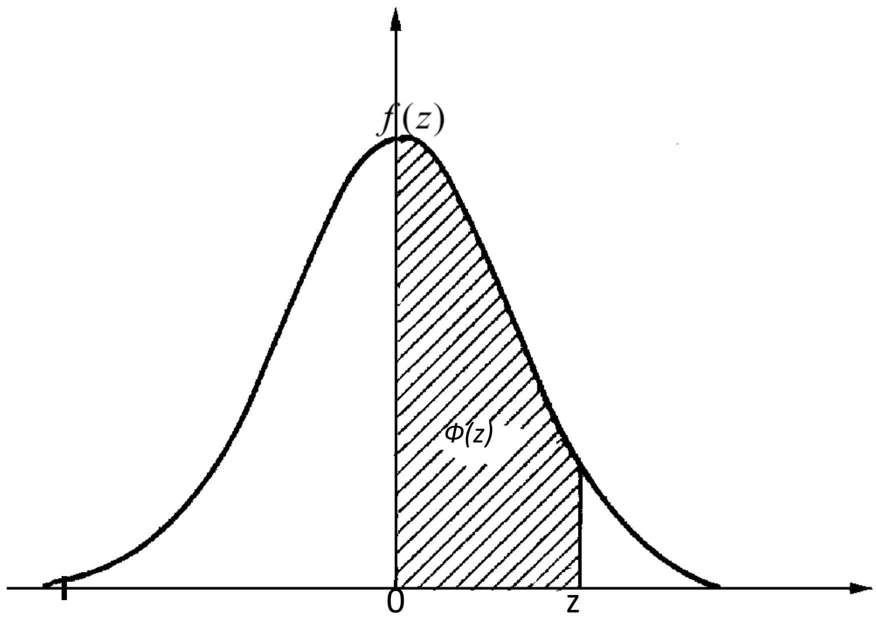


Рис. 1.11 Геометрическое представление функции Лапласа

Следует иметь в виду, что

$$\Phi(-z) = -\Phi(z),\ \Phi(-\infty) = -1/2,\ \Phi(0)=0,\ \Phi(\infty) = 1/2. \qquad (10)$$

С учетом (10) вероятность нахождения в интервале $(-\infty;\ x_1)$ случайной величины X определится из выражения

$$P(X<x_1)=0{,}5+\Phi(z_1). \qquad (11)$$

Для интервала $(x_1;\ x_2)$ соответствующую вероятность можно подсчитать на основании (1) и (6) как

$$P(x_1<X\le x_2)=\Phi(z_2)-\Phi(z_1), \qquad (12)$$

где

$$z_1=\frac{x_1-a}{\sigma} \quad \text{и} \quad z_2=\frac{x_2-a}{\sigma}. \qquad (13)$$

Пользуясь указанными соотношениями и таблицей прил. 2, легко можно определить, что вероятность попадания нормально распределенной случайной величины в интервал $a \pm \sigma$ составляет – $P \approx 0{,}68$, в интервал $a \pm 2\sigma$ – $\approx 0{,}95$ и в интервал $a+3\sigma$ – $P \approx 0{,}997$.

Нетрудно показать, что математическое ожидание и дисперсия случайной величины, распределенной по нормальному закону, равны a и σ^2 соответственно, т. е.

$$M(X) = a,\ D(X) = \sigma^2.$$

Задача 1. Образцы из прессованного дюралюминиевого профиля испытывают на разрыв с целью определения предела прочности $\sigma_в$. Определить вероятность попадания значения предела прочности испытываемого образца в интервал (43 кгс/мм^2; 47 кгс/мм^2), если для случайной величины $X=\sigma_в$, $a=45{,}3$кгс/мм^2 и $\sigma = 1{,}13$ кгс/мм^2.

Решение. Пользуясь формулами (1.44), находим

$$z_1=\frac{43-45{,}3}{1{,}13}=-2{,}03 \quad \text{и} \quad z_2=\frac{47-45{,}3}{1{,}13}=1{,}50.$$

По таблице прил. 2 для вычисленных значений z_1и z_2 определяем:

$$\Phi(z_1)=\Phi(-2{,}03) = -\Phi\ (2{,}03) = -0{,}4788$$

и

$$\Phi(z_2) = \Phi(1{,}50) = 0{,}4332.$$

На основании формулы (1.43) находим

$P(43\ кгс/мм^2<\sigma_в\le 47\ кгс/мм^2) =\Phi(1{,}50) -\Phi(-2{,}03) = 0{,}4332+0{,}4788=0{,}912.$

Приведенные расчеты показывают, что если испытаниям на разрыв подвергнуть большое число образцов, то около 90% из них будут иметь значения предела прочности, лежащие в указанных интервалах.

Задача 2. Длина изготавливаемой автоматом детали представляет собой случайную величину, распределённую по нормальному закону с параметрами $M(X)=1{,}5$ см; $\sigma = 0{,}2$ см. Найти вероятность брака, если допускаемые размеры детали должны быть $15 \pm 0{,}3$ см. Какую точность длины можно гарантировать вероятностью 0,97?

Решение. Остальные часто встречающиеся законы распределений случайных величин сведем в таблицу.

а) $P(|x-M(X)|<0{,}3)=2\Phi(\frac{0{,}3}{\sigma})$,

т.к. параметр $a=M(X)$, $\varepsilon=0{,}3$ для нормального закона распределения.

$$P(|x-15|<0{,}3)=2\Phi(\frac{0.3}{0.2})=2\cdot 0{,}4332=0{,}8664 \text{ (см. прил.1).}$$

Вероятность брака

$$P=1-0{,}8664=0{,}1336.$$

б) $P(|x-M(X)|<\varepsilon)=2\Phi(\frac{\varepsilon}{\sigma})=0{,}97;$ $\Phi(\frac{\varepsilon}{\sigma})=0{,}485$, $\frac{\varepsilon}{\sigma}=2{,}17$ (см. прил.2), т.к. $\varepsilon=2{,}17\cdot\sigma=2{,}17\cdot 0{,}2=0{,}434(\text{см})$.

Следовательно, с вероятностью 0,97 можно гарантировать размеры $15\pm 0{,}434(\text{см})$

.

4. Равномерное распределение вероятностей

Пусть плотность вероятности равна нулю всюду, кроме интервала (*a*, *b*), на котором она постоянна. Если обозначить эту постоянную через *A,* то в силу свойств плотности распределения получим

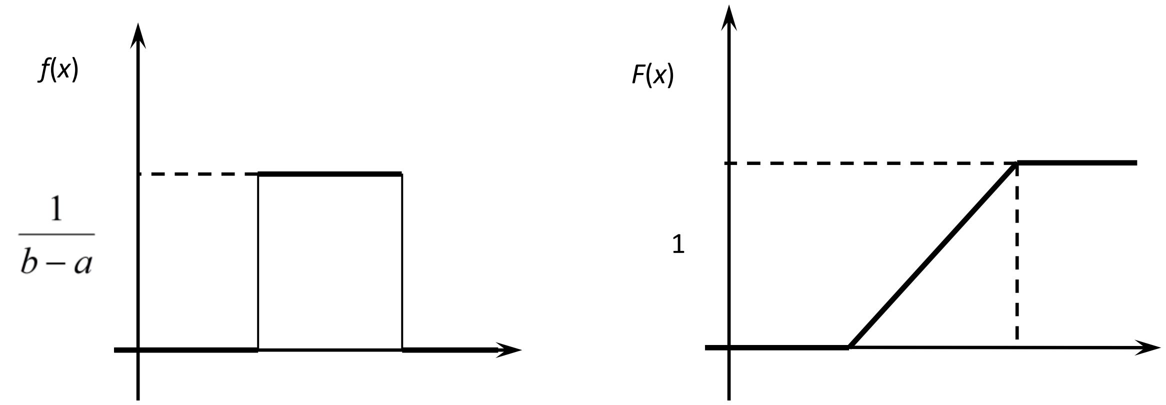
$$\int_a^b A\,dx=1,$$

откуда $A = 1/(b–a)$. Поэтому плотность распределения (дифференциальный закон) равномерного распределения задается формулой

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } -\infty < x < a;\\ \dfrac{1}{b-a} & \text{при } a<x<b;\\ 0 & \text{при } b<x<+\infty\end{cases} \quad F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } -\infty < x < a;\\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{при } a<x<b;\\ 1 & \text{при } b<x<+\infty\end{cases}$$

В точках $x=a$ и $x=b$ функция $f(x)$ разрывна. Для нахождения функции распределения (интегрального закона распределения), воспользовавшись формулой, получим

Эта функция непрерывна всюду.



Пользуясь формулой для математического ожидания, получим

$$M(x)=\int_a^b \frac{x}{b-a}\,dx=\frac{a+b}{2},$$

так что математическое ожидание случайной величины, равномерно распределенной на интервале (a, b), находится в центре этого интервала. Для вычисления дисперсии найдем $M(X^2)$, пользуясь формулой (1.19):

$$M(X^2)=\int_a^b \frac{x^2}{b-a}\,dx=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}=\frac{a^2+ab+b^2}{3}.$$

Поэтому дисперсия равномерно распределенной случайной величины по формуле равна

$$D(X)=\frac{a^2+ab+b^2}{3}-\frac{(a+b)^2}{2}=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Таким образом, для случайной величины, равномерно распределенной на интервале (a, b), среднее квадратическое отклонение равно 0,288675 … длины интервала.

Задача 5. Точка бросается наугад (без прицеливания) на отрезок [0,1]. Случайная величина X–абсцисса точки попадания (считается, что бросаемая точка обязательно попадает на отрезок [0, 1]). Найти функцию плотности распределения и функцию распределения. Вычислить математическое ожидание и дисперсию указанной случайной величины. Найти вероятность того, что точка попадет в интервал [0; 0,5].

Решение. В этом случае мы имеем дело с непрерывной случайной величиной, все значения которой принадлежат отрезку [0, 1]. Поэтому в выражении для плотности распределения и функции распределения $a = 0$, а $b = 1$, т. е.

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{при } -\infty < x < 0;\\ 1 & \text{при } 0<x<1;\\ 0 & \text{при } 1<x<+\infty.\end{cases}\qquad F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } -\infty < x < 0;\\ x & \text{при } 0<x<1;\\ 1 & \text{при } 1<x<+\infty.\end{cases}$$

Согласно формулам (1.51) и (1,53) $M(X)=1/2$, $D(X)$ = 1/12,

$$P(0\le x\le 0{,}5)=F(0{,}5)-F(0)=0{,}5-0=0{,}5.$$

Задача 6. Цена деления шкалы амперметра равна 0,1 А. Показания округляют до ближайшего целого деления. Найти вероятность того, что при отсчете будет сделана ошибка, превышающая 0,02 А.

Решение. Ошибку округления отсчета можно рассматривать как случайную величину X, которая распределена равномерно в интервале между двумя соседними целыми делениями. Плотность равномерного распределения $f(x)$-=1/(b–a), где (b–a)–длина интервала, в котором заключены возможные значения X; вне этого интервала $f(x)$ = 0 (см. (1.50)). В рассматриваемой задаче длина интервала, в котором заключены возможные значения X, равна 0,1, поэтому

$$F(x)=\begin{cases}0 & \text{при } -\infty < x < 0;\\ x/0{,}1=10x & \text{при } 0<x<0{,}1;\\ 1 & \text{при } 1<x<+\infty.\end{cases}$$

Легко сообразить, что ошибка отсчета превысит 0,02, если она будет заключена в интервале (0,02, 0,08).

По формуле $P\ (a < x < b) = F(a)–F(b)$ получим

$$P\ (0{,}02 < x < 0{,}08) = F(0{,}08)–F(0{,}02) = 10\cdot 0{,}08 – 10\cdot 0{,}02 = 0{,}6.$$