Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами

Определение. *Линейным однородным дифференциальным уравнением второго порядка с постоянными коэффициентами* называется уравнение вида

$$y'' + py' + qy = 0, \tag{2.35}$$

где p и q – постоянные величины.

Теорема Коши для линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами (2.35) формируется следующим образом.

Теорема Коши. При любых начальных данных $(x_0; y_0; y'_0)$ задача Коши имеет, причем единственное, решение, т.е. при любых начальных данных x_0, y_0, y'_0 существует, причем единственное, решение уравнения (2.35), удовлетворяющее начальным условиям $y(x_0) = x_0$, $y'(x_0) = y'_0$.

Определение. Два частных решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ уравнения (2.35) образуют *фундаментальную систему решений*, если для любого x

$$W(x) = y_1(x) \cdot y'_2(x) - y'_1(x) \cdot y_2(x) \neq 0. \tag{2.36}$$

Определение. Выражение $W(x)$ называется определителем Вронского, или вронскианом, решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$.

Пример1. Известно, что функции $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = e^x$ и $y_3 = 5e^{2x}$ являются частными решениями уравнения $y'' - 3y' + 2y = 0$.

Доказать, что решение y_1 и y_2 образуют фундаментальную систему решений, а y_1 и y_3 не образуют.

<u>Решение</u>. $y'_1 = 2e^{2x}$, $y'_2 = e^x$, $y'_3 = 5 \cdot 2e^{2x}$.

Найдем вронскиан пары решений y_1 и y_2:

$$W_1(x) = y_1(x) \cdot y'_2(x) - y'_1(x) \cdot y_2(x) =$$
$$= e^{2x} \cdot e^x - 2e^{2x} \cdot e^x = -e^{3x} \neq 0.$$

Найдем вронскиан пары решений y_1 и y_3

$$W_2(x) = y_1(x) \cdot y'_3(x) - y'_1(x) \cdot y_3(x) =$$
$$= e^{2x} \cdot 10e^{2x} - 2e^{2x} \cdot 5e^{2x} = 10e^{4x} - 10e^{4x} = 0.$$

Вронскиан $W_1(x) \neq 0$, следовательно, $y_1(x)$ и $y_2(x)$ *образуют фундаментальную пару решений.*

Вронскиан $W_2(x) = 0$, следовательно, $y_1(x)$ и $y_3(x)$ не образуют *фундаментальную пару решений.*

Теорема (о структуре общего решения). *Если два частных решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами образуют фундаментальную систему, то общее решение этого уравнения имеет вид*

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2, \tag{2.37}$$

где C_1 и C_2–произвольные постоянные.

Выражение $C_1 y_1 + C_2 y_2$ называется *линейной комбинацией функций* $y_1(x)$ и $y_2(x)$.

Доказательство: докажем, что функция (2.37) является решением уравнения (2.35). Для этого подставим в уравнение (2.35) вместо y линейную комбинацию (2.37) и докажем, что оно превращается в тождество. Так как y_1 y_2 и являются решениями уравнения (2.35), то

$$y''_1 + py'_1 + qy_1 = 0 \text{ и } y''_2 + py'_2 + qy_{2=0}. \tag{2.38}$$

Далее имеем

$$(C_1y_1+C_2y_2)''+p(C_1y_1+C_2y_2)'+q(C_1y_1+C_2y_2)=$$
$$=C_1y_1''+C_2y_2''+pC_1y_1'+pC_2y_2'+qC_1y_1+qC_2y_2=$$
$$=C_1(y_1''+py_1'+qy_1)+C_2(y_2''+py_2'+qy_2)=0.$$

А это означает, что функция (2.37) является решением уравнения (2.35).

Теперь докажем, что формула (2.37) представляет общее решение уравнения (2.35). Для этого надо показать, что любое решение уравнения (2.35) можно получить из формулы (2.37) при некоторых значениях постоянных C_1 и C_2. Пусть $y=\varphi(x)$ – какое-либо частное решение уравнения (2.35). Пусть, далее, x_0 некоторое число из области определения решения $y=\varphi(x)$; обозначим $\varphi(x_0)=y_0$, $\varphi'(x_0)=y_0'$. Отсюда следует, что решение $y=\varphi(x)$ удовлетворяет начальным условиям с начальными данными (x_0,y_0,y_0'). Осталось показать, что решение $y=\varphi(x)$ может быть получено из формулы (2.37) при надлежащих значениях $C_1=C_{10}$ и $C_2=C_{20}$. Для этого рассмотрим систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} y_0=C_1y_1(x)+C_2y_2(x), \\ y_0'=C_1y_1'(x)+C_2y_2'(x), \end{cases} \qquad (2.39)$$

где $y_1(x)$ и $y_2(x)$– решение из данной фундаментальной системы решений, (x_0,y_0,y_0')–полученные выше начальные данные; C_1 и C_2–неизвестные, которые предстоит определить. Умножая первое уравнение из (2.39) на $y_2'(x_0)$, второе – на $y_2(x_0)$ и вычитая второе уравнение из первого, получим

$$(y_1(x_0)\cdot y_2'(x_0)-y_2'(x_0)\cdot y_2(x_0))\cdot C_1=$$
$$=y_0\cdot y_2'(x_0)-y_0'\cdot y_2(x_0),$$

или $W(x_0)\cdot c_1=y_0\cdot y_2'(x_0)-y_0'\cdot y_2(x_0)$,

откуда ввиду того, что $W(x_0)\neq 0$, найдем

$$C_1=C_{10}=\frac{y_0\cdot y_2'(x_0)-y_0'\cdot y_2(x_0)}{W(x_0)}.$$

Аналогично получаем

$$C_2=C_{20}=-\frac{y_0\cdot y_2'(x_0)-y_0'\cdot y_1(x_0)}{W(x_0)}.$$

Рассмотрим сейчас частное решение, которое получается из (2.37), если взять $C_1=C_{10}$ и $C_2=C_{20}$: $y(x)=C_{10}\cdot y_1(x)+C_{20}\cdot y_2(x)$. Ввиду (2.39) составленное решение $y(x)$ удовлетворяет начальным условиям с начальными данными (x_0,y_0,y_0'), т.е. $y(x_0)=\varphi(x_0)$, $y'(x_0)=\varphi'(x_0)$.

Следовательно, согласно теореме Коши о единственности решения, удовлетворяющего данным начальным условиям, имеем

$$\varphi(x)=y(x)=C_{10}\cdot y_1+C_{20}\cdot y_2. \qquad (2.40)$$

Найдем решение линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.

Для нахождения общего решения уравнения (2.35) достаточно найти два его частных решения, образующих фундаментальную систему.

Будем искать эти частные решения уравнений (2.35) в виде

$$y=e^{kx}, \qquad (2.41)$$

где k=const;

тогда $y'=ke^{kx}$, $y''=k^2\cdot e^{kx}$.

Подставим выражение для y, y' и y'' в уравнение(2.35), получим

$$k^2e^{kx}+pke^{kx}+qe^{kx}=0,\text{ т.е. } e^{kx}\left(k^2+pk+q\right)=0.$$

Так как $e^{kx}\neq 0$, то

$$k^2+pk+q=0. \qquad (2.42)$$

Определение. Уравнение (2.42) называется *характеристическим уравнением* линейного однородного дифференциального уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами.

Для составления характеристического уравнения (2.42) достаточно в уравнении (2.35) заменить y'', y' и y соответственно на k^2, k и 1.

Решив характеристическое уравнение по формуле: $k_{1,2} = \dfrac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$, найдем его корни k_1 и k_2, а следовательно, и частные решения уравнения (2.35):

$$y_1 = e^{k_1 x},\ y_2 = e^{k_2 x}. \tag{2.43}$$

При решении характеристического уравнения возможны три случая.

Случай 1. *Корни характеристического уравнения действительны и различны* .

В этом случае имеем два частных решения уравнения (2.35):

$$y_1 = e^{k_1 x} \text{ и } y_2 = e^{k_2 x}.$$

Покажем, что эти решения образуют фундаментальную систему решений. Для этого рассмотрим вронскиан:

$$W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) = e^{k_1 x}k_2 e^{k_2 x} -$$
$$-k_1 e^{k_1 x}e^{k_2 x} = k_2 e^{(k_1+k_2)x} - k_1 e^{(k_1+k_2)x} = e^{(k_1+k_2)x}(k_2 - k_1) \neq 0,$$

т.е. $e^{(k_1+k_2)x} \neq 0$ и $k_2 \neq k_1$.

Следовательно, в этом случае решение общего уравнения (2.35) имеет вид

$$y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}. \tag{2.44}$$

Случай 2. *Корни характеристического уравнения действительны и равны*: $k_1 = k_2 = k$.

В этом случае непосредственно находим лишь одно частное решение: $y_2 = xe^{kx}$.

Вторым частным решением является решение $y_2 = xe^{kx}$.Действительно,

$$y_2' = \left(xe^{kx}\right) = x'e^{kx} + x\left(e^{kx}\right)' = e^{kx} + xke^{kx} = e^{kx}(1+kx),$$
$$y_2'' = \left(e^{kx}\right)'(1+kx) + e^{kx}(1+kx)' = ke^{kx}(1+kx) + e^{kx}k =$$
$$= e^{kx}\left(2k + k^2 x\right).$$

Подставим выражение для y, y' и y'' в уравнение (2.35), получим

$$e^{kx}\left(2k + k^2 x\right) + pe^{kx}(1+kx) + qxe^{kx} =$$
$$= e^{kx}\left[x\left(k^2 + pk + q\right) + 2k + p\right] = 0.$$

Так как k является корнем характеристического уравнения $k^2 + pk + q = 0$, корни квадратного трехчлена находятся по формуле $k_{1,2} = \dfrac{-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}}{2}$.

Если $k_1 = k_2 = k$, то $p^2 - 4q = 0$, т.е. $k = -\dfrac{p}{2}$ или $2k + p = 0$.

Покажем, что $y_1 = e^{kx}$ и $y_2 = xe^{kx}$ образуют фундаментальную систему решений. Для этого рассмотрим вронскиан:

$$W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_1'(x)y_2(x) = e^{kx}e^{kx}(1+kx) =$$
$$= e^{2kx}[1 + kx - kx] = e^{2kx} \neq 0.$$

Таким образом, в этом случае общее решение уравнения (2.35) имеет вид

$$y = e^{kx}(C_1 + C_2 x). \tag{2.45}$$

Случай 3. *Корни характеристического уравнения комплексные*:

$$k_{1,2}=\frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2},\ p^2-4q<0.$$

Тогда $k_{1,2}=\frac{-p\pm\sqrt{i^2\left(4q-p^2\right)}}{2}=-\frac{p}{2}\pm\frac{i\sqrt{4q-p^2}}{2}$.

Обозначив $a=\frac{-p}{2}$ и $b=\frac{\sqrt{4q-p^2}}{2}$, получим: $k_1=a+bi$ и $k_2=a-bi \quad (b\neq 0)$.

В этом случае $y_1=e^{ax}\cos bx$ и $y_2=e^{ax}\sin bx$ являются решениями уравнения (2.35) и, вычисляя вронскиан, убедимся, что они составляют фундаментальную систему. Действительно,

$$y_1'=\left(e^{ax}\right)'\cdot\cos bx+e^{ax}\cdot(\cos bx)'=a\cdot e^{ax}\cdot\cos bx+$$
$$+e^{ax}\cdot(-\sin bx)\cdot b=e^{ax}\cdot(a\cdot\cos bx-b\cdot\sin bx).$$
$$y_2'=\left(e^{ax}\right)'\cdot\sin bx+e^{ax}\cdot(\sin bx)'=a\cdot e^{ax}\cdot\sin bx+$$
$$+e^{ax}\cdot\cos bx\cdot b=e^{ax}(a\cdot\sin bx+b\cdot\cos bx).$$

Подставим выражения для $y_1(x)$, $y_1'(x)$, $y_2(x)$ и $y_2'(x)$ в вронскиан (2.36), получим:

$$W(x)=y_1y_2'-y_1'y_2=e^{ax}\cos bx\, e^{ax}(a\sin bx+b\cos bx)-$$
$$-e^{ax}(a\cos bx-b\sin bx)e^{ax}\sin bx=e^{2ax}\cos bx(a\sin bx+b\cos bx)-$$
$$-e^{2ax}\sin bx(a\cos bx-b\sin bx)=e^{2ax}\left(a\cos bx\sin bx+b\cos^2 bx-\right.$$
$$\left.-a\sin bx\cos bx+b\sin^2 bx\right)=e^{2ax}b\left(\cos^2 bx+\sin^2 bx\right)=e^{2ax}b\neq 0.$$

При вычислении воспользовались основным тригонометрическим тождеством: $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$.

Таким образом, общее решение уравнения (2.35) в случае комплексных корней характеристического уравнения имеет вид

$$y=C_1e^{ax}\cos bx+C_2e^{ax}\sin bx,\ \text{или}$$
$$y=e^{ax}(C_1\cos bx+C_2\sin bx). \tag{2.46}$$

Рассмотрим примеры решения дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Пример 2. Найти частное решение уравнения $y''+7y'+12y=0$ удовлетворяющее начальным условиям $y(0)=1$, $y'(0)=-2$.

<u>Решение</u>. Составим характеристическое уравнение, заменив y'', y', y на k^2, k, 1 соответственно, получим $k^2+7k+12=0$.

Корни найдем по формуле $k_{1,2}=\frac{-7\pm\sqrt{7^2-4\cdot 12}}{2}=\frac{-7\pm\sqrt{1}}{2}=\frac{-7\pm 1}{2}$, откуда $k_1=-3$ и $k_2=-4$. Подставляя найденные значения k_1 и k_2 в формулу (2.44), получим общее решение $y=C_1e^{-3x}+C_2e^{-4x}$.

Дифференцируя общее решение, получим

$$y'=C_1e^{-3x}(-3)+C_2e^{-4x}(-4)=-3C_1e^{-3x}-4C_2e^{-4x}.$$

Согласно заданным начальным условиям имеем

$$\begin{cases}1=C_1e^{-3\cdot 0}+C_2e^{-4\cdot 0}\\ -2=-3C_1e^{-3\cdot 0}-4C_2e^{-4\cdot 0}\end{cases},\ \text{или}\ \begin{cases}1=C_1+C_2\\ -2=-3C_1-4C_2\end{cases},$$

или $\begin{cases}C_2=1-C_1\\ -2=-3C_1-4(1-C_1)\end{cases}$, или $\begin{cases}C_2=1-C_1\\ 2=C_1\end{cases}$, откуда

$C_1 = 2$ и $C_2 = -1$. Таким образом, искомым частным решением является функция $y = 2e^{-3x} - e^{-4x}$.