

Лекция №9 Тема 4.2. Полный дифференциал; дифференцируемость.

Полный дифференциал, необходимые и достаточные условия дифференцируемости.

Определение: Полным дифференциалом функции $z = f(x, y)$ называется главная линейная относительно Δx и Δy приращения функции Δz в точке (x, y) .

$$dz = f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy$$

Для функции произвольного числа переменных:

$$df(x, y, z, \dots, t) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \dots + \frac{\partial f}{\partial t} dt$$

Пример. Найти полный дифференциал функции $u = x^{y^2z}$.

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y^2 z x^{y^2z-1}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x^{y^2z} \ln x \cdot 2yz; \quad \frac{\partial u}{\partial z} = x^{y^2z} \ln x \cdot y^2;$$

$$du = y^2 z x^{y^2z-1} dx + 2x^{y^2z} yz \ln x dy + y^2 x^{y^2z} \ln x dz$$

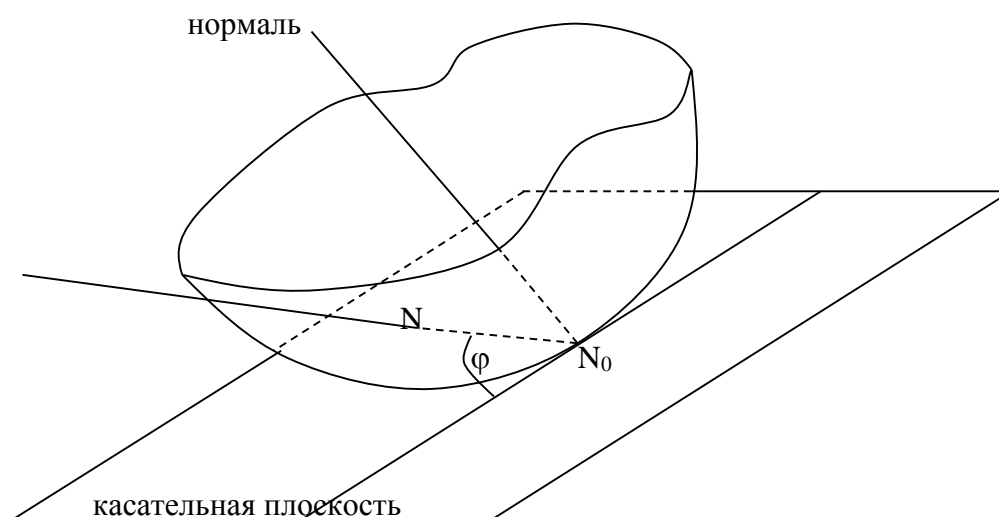
Пример. Найти полный дифференциал функции $z = \frac{y}{x^2 - y^2}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-2yx}{(x^2 - y^2)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y'(x^2 - y^2) - y(-2y)}{(x^2 - y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2 + 2y^2}{(x^2 - y^2)^2} = \frac{x^2 + y^2}{(x^2 - y^2)^2}$$

$$dz = -\frac{2xy}{(x^2 - y^2)^2} dx + \frac{x^2 + y^2}{(x^2 - y^2)^2} dy$$

4. Геометрический смысл полного дифференциала. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.



Пусть N и N_0 – точки данной поверхности. Проведем прямую NN_0 . Плоскость, которая проходит через точку N_0 , называется **касательной плоскостью** к поверхности, если угол между секущей NN_0 и этой плоскостью стремится к нулю, когда стремится к нулю расстояние NN_0 .

Определение. **Нормалью** к поверхности в точке N_0 называется прямая, проходящая через точку N_0 перпендикулярно касательной плоскости к этой поверхности.

В какой – либо точке поверхность имеет, либо только одну касательную плоскость, либо не имеет ее вовсе.

Если поверхность задана уравнением $z = f(x, y)$, где $f(x, y)$ – функция, дифференцируемая в точке $M_0(x_0, y_0)$, касательная плоскость в точке $N_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ существует и имеет уравнение:

$$z - f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Уравнение нормали к поверхности в этой точке:

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0, y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0, y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}$$

Геометрическим смыслом полного дифференциала функции двух переменных $f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) является приращение аппликаты (координаты z) касательной плоскости к поверхности при переходе от точки (x_0, y_0) к точке $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$.

Как видно, геометрический смысл полного дифференциала функции двух переменных является пространственным аналогом геометрического смысла дифференциала функции одной переменной.

Пример. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности

$$z = x^2 - 2xy + y^2 - x + 2y$$

в точке $M(1, 1, 1)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2y - 1; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -2x + 2y + 2$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_M = -1; \quad \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_M = 2;$$

Уравнение касательной плоскости:

$$z - 1 = -(x - 1) + 2(y - 1); \quad x - 2y + z = 0;$$

Уравнение нормали:

$$\frac{x - 1}{-1} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z - 1}{-1};$$

4. Приближенные вычисления с помощью полного дифференциала.

Пусть функция $f(x, y)$ дифференцируема в точке (x, y) . Найдем полное приращение этой функции:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$$

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y) + \Delta z$$

Если подставить в эту формулу выражение

$$\Delta z \approx dz = \frac{\partial f}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \Delta y$$

то получим приближенную формулу:

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) \approx f(x, y) + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Delta y$$

Пример. Вычислить приближенно значение $\sqrt{1,04^{1,99} + \ln 1,02}$, исходя из значения функции $u = \sqrt{x^y + \ln z}$ при $x = 1, y = 2, z = 1$.

Из заданного выражения определим $\Delta x = 1,04 - 1 = 0,04$, $\Delta y = 1,99 - 2 = -0,01$, $\Delta z = 1,02 - 1 = 0,02$.

Найдем значение функции $u(x, y, z) = \sqrt{1^2 + \ln 1} = 1$

Находим частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{y \cdot x^{y-1}}{2\sqrt{x^y + \ln z}} = \frac{2 \cdot 1}{2\sqrt{1}} = 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x^y \ln x}{2\sqrt{x^y + \ln z}} = 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\frac{1}{z}}{2\sqrt{x^y + \ln z}} = \frac{1}{2}$$

Полный дифференциал функции u равен:

$$du = 0,04 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} - 0,01 \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + 0,02 \cdot \frac{\partial u}{\partial z} = 1 \cdot 0,04 - 0 \cdot 0,01 + \frac{1}{2} \cdot 0,02 = 0,04 + 0,01 = 0,05$$

$$\sqrt{1,04^{1,99} + \ln 1,02} \approx u(1,2,1) + du = 1 + 0,05 = 1,05$$

Точное значение этого выражения: 1,049275225687319176.

Лекция №10-11 Тема 4.3. Частные производные и дифференциалы высших порядков.

Частные производные и дифференциалы высших порядков. Частные производные сложных функций, неявно заданных функций.

5. Частные производные высших порядков.

Если функция $f(x, y)$ определена в некоторой области D , то ее частные производные $f'_x(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ тоже будут определены в той же области или ее части.

Будем называть эти производные **частными производными первого порядка.**

Производные этих функций будут **частными производными второго порядка.**

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= f''_{xx}(x, y); & \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= f''_{yy}(x, y); \\ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= f''_{xy}(x, y); & \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} &= f''_{yx}(x, y); \end{aligned}$$

Продолжая дифференцировать полученные равенства, получим частные производные более высоких порядков.

Определение. Частные производные вида $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$; $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}$; $\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial y}$ и т.д. называются

смешанными производными.

Теорема. Если функция $f(x, y)$ и ее частные производные $f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}$ определены и непрерывны в точке $M(x, y)$ и ее окрестности, то верно соотношение:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Т.е. частные производные высших порядков не зависят от порядка дифференцирования. Аналогично определяются дифференциалы высших порядков.

$$\begin{aligned} dz &= f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy \\ d^2 z &= d[f'_x(x, y)dx + f'_y(x, y)dy] = f''_{x^2}(x, y)(dx)^2 + 2f''_{xy}(x, y)dxdy + f''_{y^2}(x, y)(dy)^2 \\ d^3 z &= f'''_{x^3}(x, y)(dx)^3 + 3f'''_{x^2 y}(x, y)(dx)^2 dy + 3f'''_{xy^2}(x, y)dx(dy)^2 + f'''_{y^3}(x, y)(dy)^3 \end{aligned}$$

$$\dots \dots \dots$$

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x} dx + \frac{\partial}{\partial y} dy \right)^n f(x, y)$$

Здесь n – символическая степень производной, на которую заменяется реальная степень после возведения в нее стоящего с скобках выражения.

Элементы теории скалярного поля.

1. Производная по направлению.

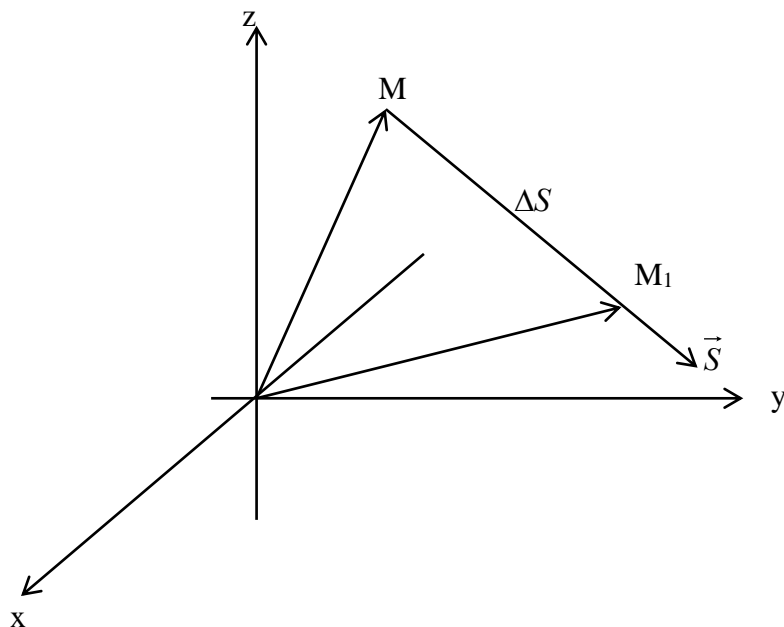
Рассмотрим функцию $u(x, y, z)$ в точке $M(x, y, z)$ и точке $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$.

Проведем через точки M и M_1 вектор \vec{S} . Углы наклона этого вектора к направлению координатных осей x , y , z обозначим соответственно α , β , γ . Косинусы этих углов называются **направляющими косинусами** вектора \vec{S} .

Расстояние между точками M и M_1 на векторе \vec{S} обозначим ΔS .

$$\Delta S = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$

Высказанные выше предположения, проиллюстрируем на рисунке:



Далее предположим, что функция $u(x, y, z)$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные по переменным x , y и z . Тогда правомерно записать следующее выражение:

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \Delta z + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y + \varepsilon_3 \Delta z,$$

где величины $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ – бесконечно малые при $\Delta S \rightarrow 0$.

Из геометрических соображений очевидно:

$$\frac{\Delta x}{\Delta S} = \cos \alpha; \quad \frac{\Delta y}{\Delta S} = \cos \beta; \quad \frac{\Delta z}{\Delta S} = \cos \gamma;$$

Таким образом, приведенные выше равенства могут быть представлены следующим образом:

$$\frac{\Delta u}{\Delta S} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma + \varepsilon_1 \cos \alpha + \varepsilon_2 \cos \beta + \varepsilon_3 \cos \gamma;$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta S} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma$$

Заметим, что величина s является скалярной. Она лишь определяет направление вектора \vec{S} . Из этого уравнения следует следующее определение:

Определение: Предел $\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta S}$ называется **производной функции $u(x, y, z)$ по направлению**

вектора \vec{S} в точке с координатами (x, y, z) .

Поясним значение изложенных выше равенств на примере.

Пример. Вычислить производную функции $z = x^2 + y^2$ в точке $A(1, 2)$ по направлению вектора \vec{AB} . $B(3, 0)$.

Решение. Прежде всего необходимо определить координаты вектора \overrightarrow{AB} .

$$\overrightarrow{AB} = (3-1; 0-2) = (2; -2) = 2\vec{i} - 2\vec{j}.$$

Далее определяем модуль этого вектора:

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Находим частные производные функции z в общем виде:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y^2; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2yx;$$

Значения этих величин в точке A : $\frac{\partial z}{\partial x} = 6$; $\frac{\partial z}{\partial y} = 4$;

Для нахождения направляющих косинусов вектора \overrightarrow{AB} производим следующие преобразования:

$$\vec{S} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} = \vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \cos \beta = \frac{2}{2\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{2}{2\sqrt{2}}\vec{j}$$

За величину \vec{S} принимается произвольный вектор, направленный вдоль заданного вектора, т.е. определяющего направление дифференцирования.

Отсюда получаем значения направляющих косинусов вектора \overrightarrow{AB} :

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \cos \beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Окончательно получаем: $\frac{\partial z}{\partial s} = 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ - значение производной заданной функции по направлению вектора \overrightarrow{AB} .

2. Градиент.

Определение: Если в некоторой области D задана функция $u = u(x, y, z)$ и некоторый вектор, проекции которого на координатные оси равны значениям функции u в соответствующей точке

$$\frac{\partial u}{\partial x}; \quad \frac{\partial u}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial z},$$

то этот вектор называется **градиентом** функции u .

$$\text{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}$$

При этом говорят, что в области D задано поле градиентов.

Теорема: Пусть задана функция $u = u(x, y, z)$ и поле градиентов

$$\text{grad} u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}.$$

Тогда производная $\frac{\partial u}{\partial s}$ по направлению некоторого вектора \vec{S} равняется проекции вектора $\text{grad} u$ на вектор \vec{S} .

Доказательство: Рассмотрим единичный вектор $\vec{S} = \vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \cos \beta + \vec{k} \cos \gamma$ и некоторую функцию $u = u(x, y, z)$ и найдем скалярное произведение векторов \vec{S} и $\text{grad} u$.

$$\text{grad} u \cdot \vec{S} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma$$

Выражение, стоящее в правой части этого равенства является производной функции u по направлению s .

Т.е. $\text{grad}u \cdot \vec{S} = \frac{\partial u}{\partial s}$. Если угол между векторами $\text{grad}u$ и \vec{S} обозначить через φ , то скалярное произведение можно записать в виде произведения модулей этих векторов на косинус угла между ними. С учетом того, что вектор \vec{S} единичный, т.е. его модуль равен единице, можно записать:

$$|\text{grad}u| \cdot \cos \varphi = \frac{\partial u}{\partial s}$$

Выражение, стоящее в правой части этого равенства и является проекцией вектора $\text{grad}u$ на вектор \vec{S} .

Теорема доказана.

Для иллюстрации геометрического и физического смысла градиента скажем, что градиент – вектор, показывающий направление наискорейшего изменения некоторого скалярного поля u в какой-либо точке. В физике существуют такие понятия как градиент температуры, градиент давления и т.п. Т.е. направление градиента есть направление наиболее быстрого роста функции.

С точки зрения геометрического представления градиент перпендикулярен поверхности уровня функции.