Лекция №10-11 Тема 4.3. Частные производные и дифференциалы высших порядков.

Частные производные и дифференциалы высших порядков. Частные производные сложных функций, неявно заданных функций.

5. Частные производные высших порядков.

Если функция f(x, y) определена в некоторой области D, то ее частные производные $f'_x(x,y)$ и $f'_y(x,y)$ тоже будут определены в той же области или ее части.

Будем называть эти производные **частными производными первого порядка.** Производные этих функций будут **частными производными второго порядка.**

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = f''_{xx}(x,y); \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = f''_{yy}(x,y);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f''_{xy}(x,y); \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = f''_{yx}(x,y);$$

Продолжая дифференцировать полученные равенства, получим частные производные более высоких порядков.

Определение. Частные производные вида $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}; \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}; \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial x}; \frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y \partial y}$ и т.д. называются **смешанными производными.**

Теорема. Если функция f(x, y) и ее частные производные $f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}$ определены и непрерывны в точке M(x, y) и ее окрестности, то верно соотношение:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Т.е. частные производные высших порядков не зависят от порядка дифференцирования.

Аналогично определяются дифференциалы высших порядков.

$$dz = f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)$$

$$d^2 z = d\left[f'_x(x,y)dx + f'_y(x,y)dy\right] = f''_{x^2}(x,y)(dx)^2 + 2f''_{xy}(x,y)dxdy + f''_{y^2}(x,y)(dy)^2$$

$$d^3 z = f'''_{x^3}(x,y)(dx)^3 + 3f'''_{x^2 y}(x,y)(dx)^2 dy + 3f'''_{xy^2}(x,y)dx(dy)^2 + f'''_{y^3}(x,y)(dy)^3$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$d^n z = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^n f(x,y)$$

Здесь n – символическая степень производной, на которую заменяется реальная степень после возведения в нее стоящего с скобках выражения.

Элементы теории скалярного поля.

1. Производная по направлению.

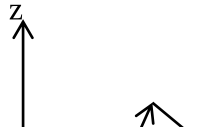
Рассмотрим функцию u(x, y, z) в точке M(x, y, z) и точке M_1(x + Δx, y + Δy, z + Δz).

Проведем через точки M и M_1 вектор $\vec{S}$. Углы наклона этого вектора к направлению координатных осей x, y, z обозначим соответственно α, β, γ. Косинусы этих углов называются **направляющими косинусами** вектора $\vec{S}$.

Расстояние между точками M и M_1 на векторе $\vec{S}$ обозначим ΔS.

$$\Delta S = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$

Высказанные выше предположения, проиллюстрируем на рисунке:



M

ΔS

M_1

$\vec{S}$

y

x

Далее предположим, что функция u(x, y, z) непрерывна и имеет непрерывные частные производные по переменным x, y и z. Тогда правомерно записать следующее выражение:

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y + \varepsilon_3 \Delta z\,,$$

где величины ε_1, ε_2, ε_3 – бесконечно малые при $\Delta S \to 0$.

Из геометрических соображений очевидно:

$$\frac{\Delta x}{\Delta S} = \cos\alpha; \qquad \frac{\Delta y}{\Delta S} = \cos\beta; \qquad \frac{\Delta z}{\Delta S} = \cos\gamma;$$

Таким образом, приведенные выше равенства могут быть представлены следующим образом:

$$\frac{\Delta u}{\Delta S} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma + \varepsilon_1\cos\alpha + \varepsilon_2\cos\beta + \varepsilon_2\cos\gamma\,;$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \lim_{\Delta S \to 0}\frac{\Delta u}{\Delta S} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

Заметим, что величина s является скалярной. Она лишь определяет направление вектора $\vec{S}$.

Из этого уравнения следует следующее определение:

Определение: Предел $\lim\limits_{\Delta S \to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta S}$ называется **производной функции u(x, y, z) по направлению вектора** $\vec{S}$ в точке с координатами (x, y, z).

Поясним значение изложенных выше равенств на примере.

Пример. Вычислить производную функции $z = x^2 + y^2x$ в точке A(1, 2) по направлению вектора $\overrightarrow{AB}$. B (3, 0).

Решение. Прежде всего необходимо определить координаты вектора $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB} = (3\text{-}1;\ 0\text{-}2) = (2;\ \text{-}2) = 2\vec{i} - 2\vec{j}\,.$$

Далее определяем модуль этого вектора:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Находим частные производные функции z в общем виде:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y^2; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2yx;$$

Значения этих величин в точке А : $\frac{\partial z}{\partial x} = 6;\quad \frac{\partial z}{\partial y} = 4;$

Для нахождения направляющих косинусов вектора $\overrightarrow{AB}$ производим следующие преобразования:

$$\vec{S} = \frac{\overrightarrow{AB}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|} = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\cos\beta = \frac{2}{2\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{2}{2\sqrt{2}}\vec{j}$$

За величину $\vec{S}$ принимается произвольный вектор, направленный вдоль заданного вектора, т.е. определяющего направление дифференцирования.

Отсюда получаем значения направляющих косинусов вектора $\overrightarrow{AB}$:

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2};\qquad \cos\beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Окончательно получаем: $\frac{\partial z}{\partial s} = 6\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} - 4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ - значение производной заданной функции по направлению вектора $\overrightarrow{AB}$.

2. Градиент.

Определение: Если в некоторой области D задана функция u = u(x, y, z) и некоторый вектор, проекции которого на координатные оси равны значениям функции u в соответствующей точке

$$\frac{\partial u}{\partial x};\quad \frac{\partial u}{\partial y};\quad \frac{\partial u}{\partial z},$$

то этот вектор называется **градиентом** функции u.

$$grad u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{dy}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}$$

При этом говорят, что в области D задано поле градиентов.

Теорема: *Пусть задана функция u = u(x, y, z) и поле градиентов*

$$grad u = \frac{\partial u}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial u}{dy}\vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}.$$

Тогда производная $\frac{\partial u}{\partial s}$ *по направлению некоторого вектора* $\vec{S}$ *равняется проекции вектора gradu на вектор* $\vec{S}$.

Доказательство: Рассмотрим единичный вектор $\vec{S} = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\cos\beta + \vec{k}\cos\gamma$ и некоторую функцию u = u(x, y, z) и найдем скалярное произведение векторов $\vec{S}$ и *gradu*.

$$grad u\cdot\vec{S} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

Выражение, стоящее в правой части этого равенства является производной функции u по направлению s.

Т.е. $grad u\cdot\vec{S} = \frac{\partial u}{\partial s}$. Если угол между векторами *gradu* и $\vec{S}$ обозначить через φ, то скалярное произведение можно записать в виде произведения модулей этих векторов на косинус угла между ними. С учетом того, что вектор $\vec{S}$ единичный, т.е. его модуль равен единице, можно записать:

$$|grad u|\cdot\cos\varphi = \frac{\partial u}{\partial s}$$

Выражение, стоящее в правой части этого равенства и является проекцией вектора *gradu* на вектор $\vec{S}$.

Теорема доказана.

Для иллюстрации геометрического и физического смысла градиента скажем, что градиент – вектор, показывающий направление наискорейшего изменения некоторого скалярного поля u в какой-либо точке. В физике существуют такие понятия как градиент температуры, градиент давления и т.п. Т.е. направление градиента есть направление наиболее быстрого роста функции.

С точки зрения геометрического представления градиент перпендикулярен поверхности уровня функции.