

Элементы теории скалярного поля.

1. Производная по направлению.

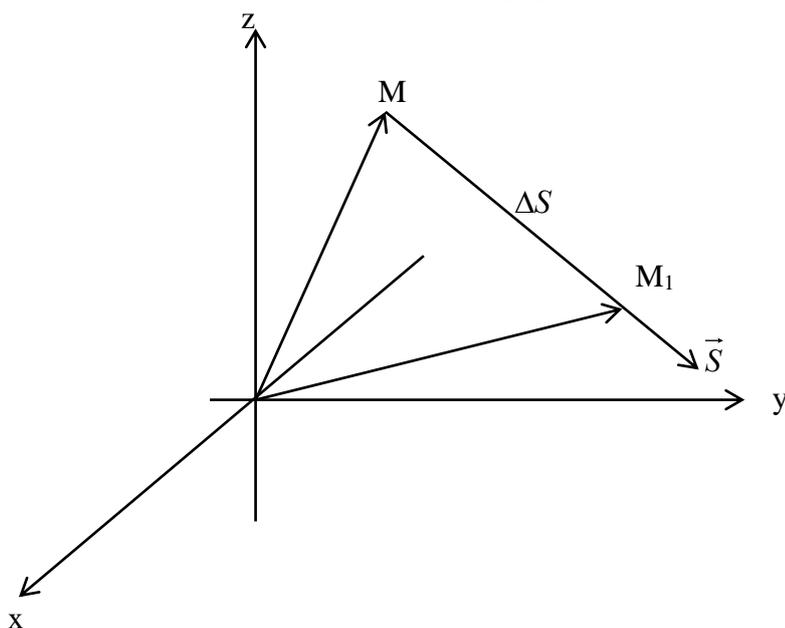
Рассмотрим функцию $u(x, y, z)$ в точке $M(x, y, z)$ и точке $M_1(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$.

Проведем через точки M и M_1 вектор \vec{S} . Углы наклона этого вектора к направлению координатных осей x, y, z обозначим соответственно α, β, γ . Косинусы этих углов называются **направляющими косинусами** вектора \vec{S} .

Расстояние между точками M и M_1 на векторе \vec{S} обозначим ΔS .

$$\Delta S = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2}$$

Высказанные выше предположения, проиллюстрируем на рисунке:



Далее предположим, что функция $u(x, y, z)$ непрерывна и имеет непрерывные частные производные по переменным x, y и z . Тогда правомерно записать следующее выражение:

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial u}{\partial z} \Delta z + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y + \varepsilon_3 \Delta z,$$

где величины $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ – бесконечно малые при $\Delta S \rightarrow 0$.

Из геометрических соображений очевидно:

$$\frac{\Delta x}{\Delta S} = \cos \alpha; \quad \frac{\Delta y}{\Delta S} = \cos \beta; \quad \frac{\Delta z}{\Delta S} = \cos \gamma;$$

Таким образом, приведенные выше равенства могут быть представлены следующим образом:

$$\frac{\Delta u}{\Delta S} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma + \varepsilon_1 \cos \alpha + \varepsilon_2 \cos \beta + \varepsilon_3 \cos \gamma;$$

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta S} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma$$

Заметим, что величина s является скалярной. Она лишь определяет направление вектора \vec{S} . Из этого уравнения следует следующее определение:

Определение: Предел $\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta S}$ называется **производной функции $u(x, y, z)$ по направлению**

вектора \vec{S} в точке с координатами (x, y, z) .

Поясним значение изложенных выше равенств на примере.

Пример. Вычислить производную функции $z = x^2 + y^2$ в точке $A(1, 2)$ по направлению вектора \vec{AB} . $B(3, 0)$.

Решение. Прежде всего необходимо определить координаты вектора \vec{AB} .

$$\vec{AB} = (3-1; 0-2) = (2; -2) = 2\vec{i} - 2\vec{j}.$$

Далее определяем модуль этого вектора:

$$|\vec{AB}| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Находим частные производные функции z в общем виде:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + y^2; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2yx;$$

Значения этих величин в точке A : $\frac{\partial z}{\partial x} = 6$; $\frac{\partial z}{\partial y} = 4$;

Для нахождения направляющих косинусов вектора \vec{AB} производим следующие преобразования:

$$\vec{S} = \frac{\vec{AB}}{|\vec{AB}|} = \vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \cos \beta = \frac{2}{2\sqrt{2}} \vec{i} - \frac{2}{2\sqrt{2}} \vec{j}$$

За величину \vec{S} принимается произвольный вектор, направленный вдоль заданного вектора, т.е. определяющего направление дифференцирования.

Отсюда получаем значения направляющих косинусов вектора \vec{AB} :

$$\cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \cos \beta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Окончательно получаем: $\frac{\partial z}{\partial s} = 6 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ - значение производной заданной функции по направлению вектора \vec{AB} .

2. Градиент.

Определение: Если в некоторой области D задана функция $u = u(x, y, z)$ и некоторый вектор, проекции которого на координатные оси равны значениям функции u в соответствующей точке

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial z},$$

то этот вектор называется **градиентом** функции u .

$$\text{gradu} = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}$$

При этом говорят, что в области D задано поле градиентов.

Теорема: Пусть задана функция $u = u(x, y, z)$ и поле градиентов

$$\text{gradu} = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k}.$$

Тогда производная $\frac{\partial u}{\partial s}$ по направлению некоторого вектора \vec{S} равняется проекции вектора gradu на вектор \vec{S} .

Доказательство: Рассмотрим единичный вектор $\vec{S} = \vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \cos \beta + \vec{k} \cos \gamma$ и некоторую функцию $u = u(x, y, z)$ и найдем скалярное произведение векторов \vec{S} и gradu .

$$\text{gradu} \cdot \vec{S} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma$$

Выражение, стоящее в правой части этого равенства является производной функции u по направлению s .

Т.е. $\text{gradu} \cdot \vec{S} = \frac{\partial u}{\partial s}$. Если угол между векторами gradu и \vec{S} обозначить через φ , то скалярное произведение можно записать в виде произведения модулей этих векторов на косинус угла между ними. С учетом того, что вектор \vec{S} единичный, т.е. его модуль равен единице, можно записать:

$$|\text{gradu}| \cdot \cos \varphi = \frac{\partial u}{\partial s}$$

Выражение, стоящее в правой части этого равенства и является проекцией вектора gradu на вектор \vec{S} .

Теорема доказана.

Для иллюстрации геометрического и физического смысла градиента скажем, что градиент – вектор, показывающий направление наискорейшего изменения некоторого скалярного поля u в какой-либо точке. В физике существуют такие понятия как градиент температуры, градиент давления и т.п. Т.е. направление градиента есть направление наиболее быстрого роста функции.

С точки зрения геометрического представления градиент перпендикулярен поверхности уровня функции.