Лекция №1

Тема 1. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Определители квадратных матриц

Необходимость введения определителя – числа, характеризующего квадратную матрицу A, тесно связано с решением систем линейных уравнений.
Определитель матрицы A обозначается $|A|$, Δ или det A.

Определителем матрицы первого порядка $A=(a_{11})$, или **определителем первого порядка**, называется элемент a_{11}: $\Delta_1=|A|=a_{11}$. Например, пусть $A=(8)$, тогда $\Delta_1=|A|=8$.

Определителем матрицы второго порядка $A=(a_{ij})$, или **определителем второго порядка**, называется число, которое отыскивается по формуле

$$\Delta_2=|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$ Например, пусть $A=\begin{pmatrix} -2 & 8 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$,

тогда $\Delta_2=|A|=\begin{vmatrix} -2 & 8 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}=-2\cdot 5-8\cdot 1=-18.$

Пусть дана квадратная матрица третьего порядка $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

Определителем матрицы третьего порядка $A=(a_{ij})$**, или определителем третьего порядка,** называется число, которое находится по формуле

$$\Delta_3=|A|=a_{11}\cdot\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\cdot\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Пример 1. Вычислить определитель третьего порядка $|A|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$.

Решение. $\Delta=1\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}-(-1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}+3\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=1\cdot 0+1\cdot 3+3\cdot 6=21.$

Определитель третьего порядка удобно вычислять по правилу треугольников (или по правилу Сарруса). Покажем это на схеме

$$\begin{vmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \bullet & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \circ & \bullet & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \\ \bullet & \circ & \circ \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} \circ & \circ & \bullet \\ \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \bullet & \circ \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} \circ & \circ & \bullet \\ \circ & \bullet & \circ \\ \bullet & \circ & \circ \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} \circ & \bullet & \circ \\ \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} \bullet & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \bullet \\ \circ & \bullet & \circ \end{vmatrix}.$$

Например,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \end{vmatrix}=1\cdot 0\cdot 5+2\cdot 1\cdot 2+(-1)\cdot 4\cdot 3-2\cdot 0\cdot 3-(-1)\cdot 2\cdot 5-4\cdot 1\cdot 1=$$

$$=0+4-12-0+10-4=-2.$$

Для того, чтобы ввести понятие определителя более высокого порядка, потребуются некоторые дополнительные понятия.

Минором M_{ij} **элемента** a_{ij} матрицы A n-го порядка называется определитель матрицы (n-1)-го порядка, полученной из матрицы A вычеркиванием i-й строки и j-го столбца. Например, минором элемента a_{12} матрицы A третьего порядка будет

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{21}a_{33} - a_{31}a_{23}.$$

Каждая матрица n-го порядка имеет n^2 миноров (n-1)-го порядка.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} матрицы n-го порядка называется его минор, взятый со знаком $(-1)^{i+j}$: $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, т.е. алгебраическое дополнение совпадает с минором, если сумма номеров строки и столбца $(i+j)$ - четное число, и отличается от минора знаком, если $(i+j)$ - нечетное число. Например, $A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -M_{23}$; $A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = M_{31}$.

Пример 2. Найти алгебраические дополнения всех элементов матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Решение

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0; \quad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 6;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 14; \quad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -5;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -7; \quad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5; \quad A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 4.$$

Определителем квадратной матрицы A n-го **порядка называется число, равное сумме произведений элементов 1-й строки на их алгебраические дополнения:**

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{s=1}^{n} a_{1S}A_{1S}$$ (разложение по элементам 1-й строки).

Так, например, вычисление определителя 4-го порядка сведется к вычислению четырех определителей 3-го порядка.

Знание свойств определителей позволит избежать громоздких вычислений.

Свойства определителей

1. Если какая-нибудь строка (столбец) матрицы состоит из одних нулей, то её определитель равен нулю.

2. Если все элементы какой-либо строки (столбца) матрицы умножить на число α, то её определитель умножится на это число α.

Замечание. За знак определителя можно выносить общий множитель любой строки или столбц; за знак матрицы можно выносить общий множитель лишь всех элементов.

3. При транспонировании матрицы её определитель не изменяется: $|A'| = |A|$.

4. При перестановке двух строк (столбцов) матрицы её определитель меняет знак на противоположный.

5. Если элементы двух строк (столбцов) матрицы пропорциональны (в частности, равны), то её определитель равен нулю.

6. Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов любой её строки (столбца) на их алгебраические дополнения, т.е. $\Delta=\sum_{s=1}^{n} a_{is}A_{is}$.

7. Сумма произведений элементов какой-либо строки (столбца) матрицы на алгебраические дополнения элементов другой строки (столбца) этой матрицы равна нулю, т. е. $\sum_{S=1}^{n} a_{iS}A_{jS}=0$ при $i\neq j$.

8. Определитель матрицы не изменится, если к элементам какой-либо строки (столбца) матрицы прибавить элементы другой строки (столбца), предварительно умноженные на одно и то же число.

9.Если каждый элемент i-й строки матрицы представляет собой сумму двух слагаемых, то определитель этой матрицы равен сумме определителей таких матриц: у первой из них i-я строка состоит из первых слагаемых, а у второй – из вторых. Все остальные строки у всех трех матриц не изменятся.

Например, $\begin{vmatrix} a_{11}+в_{11} & a_{12}+в_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} в_{11} & в_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$.

10. Сумма произведений произвольных чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n$ на алгебраические дополнения элементов любой строки (столбца) равна определителю матрицы, полученной из данной заменой элементов этой строки (столбца) на числа $b_1, b_2, \ldots, b_n$.

11. Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению их определителей: $|C|=|A|\cdot|B|$, где $C=A\cdot B$; A и B - матрицы n-го порядка.

Замечание. Из свойства 10 следует, что даже если $AB\neq BA$, $|AB|=|BA|$.

Перечисленные свойства определителей позволяют существенно упростить их вычисление, особенно определителей высоких порядков. При вычислении определителей целесообразно так преобразовать исходную матрицу с помощью свойств 1-9, чтобы преобразованная матрица имела строку (или столбец), содержа-щую как можно больше нулей, а потом найти определитель разложением по этой строке (столбцу).

Пример 3. Вычислить определитель четвертого порядка $|A|=\begin{vmatrix} 4 & 6 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & 1 & 0 \\ 6 & 4 & 4 & 6 \end{vmatrix}$.

Решение. Преобразуем матрицу так, чтобы в 3-й строке все элементы, кроме одного, обращались в нуль. Для этого умножим, например, элементы 3-го столбца на (-4) и на 2 и прибавим их соответственно к элементам 1-го и 2-го столбцов. Раскладывая полученный определитель по элементам третьей строки, найдем

$$|A|=\begin{vmatrix}4 & 6 & -2 & 4\\ 1 & 2 & -3 & 1\\ 4 & -2 & 1 & 0\\ 6 & 4 & 4 & 6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}12 & 2 & -2 & 4\\ 13 & -4 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ -10 & 12 & 4 & 6\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}12 & 2 & 4\\ 13 & -4 & 1\\ -10 & 12 & 6\end{vmatrix}.$$

Полученный определитель третьего порядка можно вычислить по правилу треугольников или с помощью свойства 6, однако можно продолжить упрощение матрицы. «Обнулим» в матрице третьего порядка элементы 2-й строки (кроме одного). Для этого элемента 3-го столбца матрицы, предварительно умножив на
(-13) и на 4, сложим с элементами 1-го и 2-го столбцов соответственно:

$$|A|=\begin{vmatrix}12 & 2 & 4\\ 12 & -4 & 1\\ -10 & 12 & 6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-40 & 18 & 4\\ 0 & 0 & 1\\ -88 & 36 & 6\end{vmatrix}.$$

Раскладывая по элементам второй строки и вынося общие множители, получаем

$$|A|=1\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix}-40 & 18\\ -88 & 36\end{vmatrix}=(-1)\cdot(-8)\cdot 18\cdot\begin{vmatrix}5 & 1\\ 11 & 2\end{vmatrix}=-144.$$

Пример 4. Вычислить определитель треугольной матрицы

$$\begin{vmatrix}2 & -3 & 5 & 0\\ 0 & 3 & -2 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{vmatrix}.$$

(Квадратная матрица называется треугольной, если все ее элементы, расположенные ниже (или выше) главной диагонали, равны нулю).

Раскладывая по первому столбцу, получаем

$$\begin{vmatrix}2 & -3 & 5 & 0\\ 0 & 3 & -2 & 1\\ 0 & 0 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 4\end{vmatrix}=2\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}3 & -2 & 1\\ 0 & -1 & 3\\ 0 & 0 & 4\end{vmatrix}+0+0+0=2\cdot 3\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 0 & 4\end{vmatrix}+0+0=$$

$$=2\cdot 3(-1)\cdot 4+0=-24.$$

На частном примере убеждаемся в том, что определитель треугольной (и, очевидно, диагональной) матрицы равен произведению элементов главной диагонали.

Определение. Матрица A^{-1} называется *обратной* к матрице А, если
$A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E$, где Е-единичная матрица.

Необходимым и достаточным условием существования матрицы A^{-1} является невырожденность матрицы А. (т.е. $A\neq 0$)

Замечание. Из определения ясно, что обратную матрицу может иметь только квадратная матрица.

Дана матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$

Обратная матрица A^{-1} к матрице A будет матрица

$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$, где $A_{11}, A_{21}, ..., A_{33}$- алгебраические дополнения всех элементов определителя.

Алгоритм нахождения обратной матрицы.

1.Найти определитель матрицы $|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$

2.Найти алгебраические дополнения всех элементов определителя матрицы A.

$A_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad A_{31} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$

$A_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \quad A_{22} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$

$A_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \quad A_{33} = -\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$

3.Заменить каждый элемент матрицы A его алгебраическим дополнением, получить матрицу $\tilde{A}$.

4.Составить матрицу $A^т$, транспонированную по отношению к матрице $\tilde{A}$

$$A^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

5.Умножить матрицу $A^т$ на число $\frac{1}{|A|}$, найти обратную матрицу A^{-1}.

Пример 5. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}$

Найти обратную ей матрицу A^{-1}.

Решение:

1)Вычисляем определитель $|A|$ матрицы A

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 16 + 6 + 4 - 30 = -4 \neq 0$$

2)Составим алгебраические дополнения

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = 4 \qquad A_{21} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = -8 \qquad A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4$$

$$A_{12} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -7 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = +9 \qquad A_{32} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -5$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -6 \qquad A_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 10 \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6$$

3)Составим матрицу $\tilde{A} : \tilde{A} = \begin{pmatrix} 4 & -7 & -6 \\ -8 & 9 & 10 \\ 4 & -5 & -6 \end{pmatrix}$

4)Транспонируем матрицу $\tilde{A} = A^T = \begin{pmatrix} 4 & -8 & 4 \\ -7 & 9 & -5 \\ -6 & 10 & -6 \end{pmatrix}$

5)Умножаем матрицу A^T на $\frac{1}{|A|} = -\frac{1}{4}$,то $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ \frac{3}{4} & -\frac{9}{4} & \frac{5}{4} \\ \frac{3}{2} & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$

Пример 6. Найти обратные матрицы:

а) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. $A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$. Сначала находим $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$; $\Delta \neq 0$, значит, существует A^{-1}. Находим алгебраические дополнения:

$$A_{11} = \underset{(+)}{(-1)}^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4; \qquad A_{21} = \underset{(-)}{(-1)}^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2; \qquad A_{12} = \underset{(-)}{(-1)}^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -3;$$

$$A_{22} = \underset{(+)}{(-1)}^{2+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1; \qquad A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Ответ: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

.