2. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

К системам линейных уравнений приводит множество прикладных задач.

Основные понятия и определения

Система m линейных уравнений с n переменными имеет вид

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1j}x_j + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2j}x_j + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ij}x_j + \ldots + a_{in}x_n = b_i; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mj}x_j + \ldots + a_{mn}x_n b_m. \end{cases}, \qquad (2)$$

где $a_{ij}, b_i \left(i = 1, 2\ldots, m;\ j = 1, 2, \ldots, n\right)$- произвольные числа, называемые соответственно **коэффициентами при переменных** и **свободными членами** уравнений. В более краткой записи с помощью знаков суммирования систему можно записать в виде

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad \left(i = 1, 2, \ldots, m\right)$$

Решением системы (2) называется такая совокупность n чисел $\left(x_1 = k_1,\ x_2 = k_2, \ldots, x_n = k_n\right)$, при подстановке которых каждое уравнение системы обращается в верное равенство.

Система уравнений называется **совместной**, если она имеет хотя бы одно решение, и **несовместной**, если она не имеет решений. Совместная система уравнений называется **определенной**, если она имеет единственное решение, и **неопределенной**, если она имеет более одного решения. Например, система уравнений $\begin{cases} x_1 + x_2 = 10, \\ x_1 - x_2 = 10 \end{cases}$ - совместная и определенная, так как имеет единственное решение (10;0); система $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 10, \\ 2x_1 + x_2 = 15 \end{cases}$ - несовместная, а система уравнений $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 10, \\ 4x_1 + 2x_2 = 20 \end{cases}$ - совместная и неопределенная, так как имеет более одного, а точнее, бесконечное множество решений $\left(x_1 = c,\ x_2 = 10 - 2c, \text{ где } c - \text{любое число}\right)$.

Две системы уравнений называются **равносильными**, или **эквивалентными**, если они имеют одно и то же множество решений.

Запишем систему (2) в матричной форме. Обозначим

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix},$$

где A – матрица коэффициентов при переменных, или матрица системы, X – матрица-столбец переменных; B – матрица-столбец свободных членов.

Так как число столбцов матрицы $A_{m\times n}$ равно числу строк матрицы $X_{n\times 1}$, их произведение $AX=\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_x+...+a_{2n}x_n \\ .... \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n \end{pmatrix}$ есть матрица-столбец. Элементами полученной матрицы являются левые части системы (2). На основании определе-ния равенства матриц систему (2) можно записать в виде

$$AX=B. \qquad (3)$$

Система n линейных уравнений с n переменными. Метод обратной матрицы и формулы Крамера

Пусть число уравнений системы (2) равно числу переменных, т.е. $m=n$. Тогда матрица системы является квадратной, а ее определитель $\Delta=|A|$ называется **определителем системы**.

Для получения решения системы (2) при $m=n$ предположим, что квадратная матрица системы $A_{n\times n}$ невырожденная, т.е. ее определитель $|A|\neq 0$. В этом случае существует обратная матрица A^{-1}.

Умножая слева обе части матричного равенства (3) на матрицу A^{-1}, получим $A^{-1}(AX)=A^{-1}B$. Так как $A^{-1}(AX)=(A^{-1}A)X=EX=X$, то решением системы методом обратной матрицы будет матрица-столбец

$$X=A^{-1}B. \qquad (3)$$

Теорема Крамера. Пусть Δ - определитель матрицы системы (2), а Δ_j- определитель матрицы, получаемой из матрицы A заменой j-го столбца столбцом свободных членов. Тогда, если $\Delta\neq 0$, система имеет единственное решение, определяемое по формулам

$$x_j=\frac{\Delta_j}{\Delta} \qquad (j=1,2,...,n). \qquad (4)$$

Формулы (4) получили название формул Крамера. В соответствии с формулой (1) обратная матрица $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\tilde{A}$, где $\tilde{A}$- матрица, присоединенная к матрице A. Так как элементы матрицы $\tilde{A}$ есть алгебраические дополнения элементов матрицы A', транспонированной к A, запишем равенство (3) в развернутой форме:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & ... & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & ... & A_{n2} \\ ... & ... & ... & ... \\ A_{1n} & A_{2n} & ... & A_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ ... \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что $|A|=\Delta$, получим после умножения матриц

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} b_1A_{11} + b_2A_{21} + \dots + b_nA_{n1} \\ b_1A_{12} + b_2A_{22} + \dots + b_nA_{n2} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_1A_{1n} + b_2A_{2n} + \dots + b_nA_{nn} \end{pmatrix},$$

откуда следует, что для любого j $(j = 1, 2, \dots, n)$

$$x_j = \frac{1}{\Delta}\left(b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + \dots + b_nA_{nj}\right).$$

На основании свойства 10 определителей $b_1A_{1j} + b_2A_{2j} + \dots + b_nA_{nj} = \Delta_j$, где Δ_j - определитель матрицы, полученной из матрицы А заменой j-го столбца $(j = 1, 2, \dots, n)$ столбцом свободных членов. Следовательно, $x_j = \dfrac{\Delta_j}{\Delta}$.

Пример. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8. \end{cases}.$$

а) методом обратной матрицы; б) по формулам Крамера.

Решение. а) Обозначим $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$; $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix}$. Тогда в матрич-ной форме данная система имеет вид $AX = B$. Найдем определитель $|A| = 5$. Так как $|A| \neq 0$, матрица А – невырожденная, и существует обратная матрица

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}; \quad X = A^{-1}B = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

т. е. решение системы (4; 2; 1) .

б) Найдем определитель системы $\Delta = |A| = 5$. Так как $\Delta \neq 0$, по теореме Крамера система имеет единственное решение.

Вычислим определители матриц $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$, полученных из матриц А, заменой соответственно первого, второго и третьего столбцов столбцом свободных членов:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 11 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 20; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 11 & 1 \\ 1 & 8 & 2 \end{vmatrix} = 10; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 5.$$

Теперь по формулам Крамера (4) $x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{20}{5} = 4$; $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{10}{5} = 2$; $x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = \dfrac{5}{5} = 1$,

т. е. решение системы (4; 2; 1).

Метод Гаусса

Рассмотрим решение системы (2) m линейных уравнений с n переменными в общем виде.

Метод Гаусса – метод последовательного исключения переменных – заключается в том, что с помощью элементарных преобразований система уравнений приводится к равносильной системе ступенчатого (или треугольного) вида. Из нее последовательно, начиная с последних (по номеру) переменных, находятся все остальные переменные.

Предположим, что в системе (2) коэффициент при переменной x_1 в первом уравнении $a_{11} \neq 0$ (если это не так, то перестановкой уравнений местами добьемся того, что $a_{11} \neq 0$).

Шаг 1. Умножая первое уравнение на подходящие числа (а именно на $-a_{21}/a_{11}$, $-a_{31}/a_{11}, \ldots, -a_{m1}/a_{11}$) и прибавляя полученные уравнения соответствен-но ко второму, третьему, …, m-му уравнению системы (2), исключим перемен-ную x_1, из всех последующих уравнений, начиная со второго.

Получим

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{i2}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{in}^{(1)}x_n = b_i^{(1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m2}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{mn}^{(1)}x_n = b_m^{(1)}, \end{cases}.$$

где буквами с верхним индексом (1) обозначены новые коэффициенты, полученные после первого шага.

Шаг 2. Предположим, что $a_{22}^{(1)} \neq 0$ (если это не так, то соответствующей перестановкой уравнений или переменных с изменением их номеров добьемся того, чтобы $a_{22}^{(1)} \neq 0$).

Умножая второе уравнение на подходящие числа $\left(-a_{32}^{(1)}/a_{22}^{(1)}, -a_{42}^{(1)}/a_{22}^{(1)}, \ldots, \right.$ $\left. \ldots, -a_{m2}^{(1)}/a_{22}^{(1)} \right)$ и прибавляя полученные уравнения соответственно к третьему, четвертому, …, m–му уравнению системы, исключим переменную x_2 из всех последующих уравнений, начиная с третьего.

Продолжая процесс последовательного исключения переменных $x_3, x_4, \ldots, x_{r-1}$, после $(r-1)$–го шага, получим систему

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r + a_{1,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\
\qquad a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2r}^{(1)}x_r + a_{2,r}^{(1)}x_{r+1} + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\qquad\qquad a_{rr}^{(r-1)}x_r + a_{r,r+1}^{(r-1)}x_{r+1} + \ldots + a_{2n}^{(r-1)}x_n = b_r^{(r-1)}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = b_{r+1}^{(r-1)}, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\qquad\qquad\qquad\qquad 0 = b_m^{(r-1)}.
\end{cases} \qquad (5)
$$

Число нуль в последних $m-r$ уравнениях означает, что их левые части имеют вид $0\cdot x_1 + 0\cdot x_2 + \ldots + 0\cdot x_n$. Если хотя бы одно из чисел $b_{r+1}^{(r-1)},\ldots,b_m^{(r-1)}$ не равно нулю, то соответствующее равенство противоречиво, и система (2) несовместна.

Таким образом, для любой совместной системы числа $b_{r+1}^{(r-1)},\ldots,b_m^{(r-1)}$ в системе (5) равны нулю. В этом случае последние $m-r$ уравнений в системе (5) являются тождествами и их можно не принимать во внимание при решении системы (2). Очевидно, что после отбрасывания «лишних» уравнений возможны два случая: а) число уравнений системы (5) равно числу переменных, т. е. $r = n$ (в этом случае система (5) имеет треугольный вид); б) $r < n$ (в этом случае система (5) имеет ступенчатый вид). Переход системы (2) к равносильной ей системе (5) называется **прямым ходом** метода Гаусса, а нахождение переменных из системы (5) – **обратным ходом.**

Преобразования Гаусса удобно проводить, осуществляя преобразования не с самими уравнениями, а с матрицей их коэффициентов. Рассмотрим матрицу

$$
A_1 = \left(\begin{array}{cccc|c}
a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\
\ldots & \ldots & & \ldots & \ldots \\
a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m
\end{array}\right),
$$

называемую **расширенной матрицей системы** (2),так как в нее, кроме матрицы системы A, дополнительно включен столбец свободных членов.

Пример. Решить систему уравнений
$$
\begin{cases}
x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6, \\
2x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 18, \\
3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4, \\
2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8.
\end{cases}
$$

Решение. Расширенная матрица системы имеет вид

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\
2 & 4 & -2 & -3 & 18 \\
3 & 2 & -1 & 2 & 4 \\
2 & -3 & 2 & 1 & -8
\end{array}\right).
$$

Шаг 1. Так как $a_{11} \neq 0$, исключим переменную x_1 из всех строк, начиная со второй, умножая вторую, третью и четвертую строки матрицы на числа (-2), (-3),
(-2) и прибавляя полученные строки соответственно ко второй, третьей, четвертой строкам.

Заметив, что в новой матрице $a_{22}^{(1)}=0$, поменяем местами вторую и третью строки:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & 20 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & -7 & -4 & 5 & -20 \end{array}\right).$$

Шаг 2. Так как теперь $a_{22}^{(1)}=-4\neq 0$, исключим переменную x_2 из всех строк, начиная с третьей, умножая вторую строку на $(-7/4)$ и
прибавляя полученную строку к четвертой:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 13{,}5 & 9 & 4{,}5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -4 & -10 & 8 & -14 \\ 0 & 0 & -8 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{117}{16} & \dfrac{117}{8} \end{array}\right).$$

Шаг 3. Учитывая, что $a_{33}^{(2)}=-8\neq 0$, умножаем третью строку на $13{,}5/8=27/16$ и, прибавляя полученную строку к четвертой, исключим из нее переменную x_3. Получим (см. последнюю матрицу) систему уравнений

$$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-2x_4=6, \\ -4x_2-10x_3+8x_4=-14, \\ -8x_3+x_4=6, \\ -\dfrac{117}{16}x_4=\dfrac{117}{8}, \end{cases}$$

откуда, используя обратный ход метода Гаусса, найдем из четвертого уравнения $x_4=-2$; из третьего $x_3=\dfrac{6-x_4}{-8}=\dfrac{6+2}{-8}=-1$; из второго
$x_2=\dfrac{-14-8x_4+10x_3}{-4}=\dfrac{-14-8(-2)+10(-1)}{-4}=2$ и из первого уравнения
$x_1=6+2x_4-3x_3-2x_2=6+(-2)-3(-1)-2\cdot 2=1$, т.е. решение системы $(1;\,2;\,-1;\,2)$.

Пример. Методом Гаусса решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3=7, \\ 2x_1-3x_2+x_3=3, \\ 4x_1+x_2-x_3=16. \end{cases}$$

Решение. преобразуем расширенную матрицу системы

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 2 & -3 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 & 16 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & -7 & 3 & -11 \\ 0 & -7 & 3 & -12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & -7 & 3 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Итак, уравнение, соответствующее третьей строке последней матрицы, противоречиво – оно привелось к неверному равенству $0=-1$, следовательно, данная система несовместна.