Занятие 4

Линейные операции над векторами. Линейная зависимость векторов

Определение 1. Геометрическим вектором, или просто вектором, называется **направленный отрезок.**

Будем обозначать вектор либо как направленный отрезок символом $\overrightarrow{AB}$, где точки A и B - начало и конец данного вектора, либо $\vec{a}$. Начало вектора называют **точкой его приложения**.

Определение 2. Вектор называется **нулевым,** если начало и конец его совпадают.

Нулевой вектор не имеет определенного направления и имеет длину, равную нулю. Это позволяет при записи отождествлять нулевой вектор с вещественным числом нуль.

Определение 3. Векторы называются **коллинеарными**, если они лежат либо на одной прямой, либо на параллельных прямых.

Определение 4. Три вектора называются **компланарными**, если они лежат в одной плоскости.

Определение 5. Два вектора называются **равными**, если они коллиннеарны, имеют одинаковую длину и одинаковое направление.

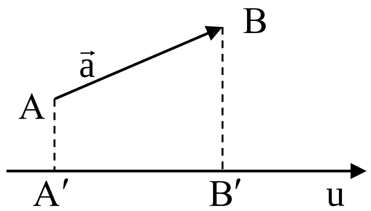
Все нулевые векторы считаются равными.

Определение 6. Суммой $\vec{a}+\vec{b}$ двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется **вектор**, идущий из начала вектора $\vec{a}$ в конец вектора $\vec{b}$ при условии, что вектор $\vec{b}$ приложен к концу вектора $\vec{a}$.

Определение 7. Разностью $\vec{a}-\vec{b}$ вектора $\vec{a}$ и вектора $\vec{b}$ называется такой **вектор** $\vec{c}$, который в сумме с вектором $\vec{b}$ дает вектор $\vec{a}$.

Определение 8. Произведением $\alpha\vec{a}$ вектора $\vec{a}$ на действительное число α называется вектор $\vec{b}$, коллинеарный вектору $\vec{a}$, имеющий длину, равную $|\alpha|\cdot|\vec{a}|$, и имеющий направление, совпадающее с направлением вектора $\vec{a}$ при $\alpha>0$ и противоположное направлению вектора $\vec{a}$ при $\alpha<0$.

Обозначим буквами A' и B' основания перпендикуляров, опущенных на ось u из точек A и B соответственно.



Определение 9. Проекцией вектора $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ на ось u называется **величина** $A'B'$
направленного отрезка $\overrightarrow{A'B'}$ оси u и обозначается $пр_u\vec{a}$. $пр_u\vec{a}=|\vec{a}|\cos\varphi$, где φ - угол между вектором $\vec{a}$ и осью u.

Любой вектор $\vec{a}$ может быть разложен по декартову прямоугольному базису $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$: $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Числа x, y, z - называется декартовыми прямоугольными координатами вектора $\vec{a}$. Обозначим буквами α, β и γ углы наклона вектора $\vec{a}$ к осям координат; $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ называются направляющими косинусами вектора $\vec{a}$.

Длина вектора через его координаты имеет вид $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Направляющие косинусы вектора вычисляются по формулам:

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \quad \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \quad \cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

откуда следует $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Определение 10. Ортом вектора $\vec{a}$ называется вектор $\vec{a}^0$, удовлетворяющий условиям:

1) $\vec{a}^0$ коллинеарен вектору $\vec{a}$,
2) $|\vec{a}^0| = 1$.

Координатами орта вектора являются направляющие косинуса.

Если два вектора $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ заданы в декартовых прямоугольных координат $\vec{a}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}, \vec{a}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$, то

$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j} + (z_1 + z_2)\vec{k},$$

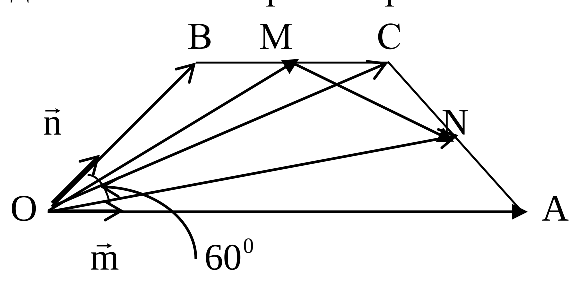
$$\alpha\vec{a} = (\alpha x_1)\vec{i} + (\alpha y_1)\vec{j} + (\alpha z_1)\vec{k}.$$

Условие коллинеарности векторов имеет вид $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$.

Примеры решения задач

Задача 1. В равнобедренной трапеции OACB угол $BOA = \pi/3, OB = BC = CA = 2$,

$M\,N$ - середина сторон BC и AC. Выразить векторы $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}$ и $\overrightarrow{MN}$ через $\vec{m}$ и $\vec{n}$ - единичные векторы направлений $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$.



Решение. $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{BM}$. Так как $\overrightarrow{OB} = 2\vec{n}, \overrightarrow{BM} = \vec{m}$, $\overrightarrow{OM} = 2\vec{n} + \vec{m}$. Найдем вектор $\overrightarrow{AC}$. Из треугольника OCA $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}$, а так как $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}$, а $\overrightarrow{OA}=4\vec{m}$, то $\overrightarrow{AC}=2\vec{n}+2\vec{m}-4\vec{m}$, вектор $\overrightarrow{AC}=2(\vec{n}-\vec{m})$. Найдем $\overrightarrow{ON}$ из треугольника ONC $\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{NC}$, а так как $\overrightarrow{OC}=2(\vec{n}+\vec{m})$, $\overrightarrow{NC}=\vec{n}-\vec{m}$, $\overrightarrow{ON}=\vec{n}+3\vec{m}$.

Из треугольника OMN $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=-2\vec{n}-\vec{m}+\vec{n}+3\vec{m}=-\vec{n}+2\vec{m}$.

Задача 2. Даны векторы $\vec{a}=2\vec{i}-3\vec{j}+6\vec{k}$ и $\vec{b}=-\vec{i}+2\vec{j}-2\vec{k}$, приложены к общей точке. Найти орт биссектрисы угла между $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Решение. Диагональ четырехугольника совпадает с биссектрисой, если этот четырехугольник – ромб (квадрат). Найдя $\overrightarrow{a^0}$ и $\overrightarrow{b^0}$, получим угол с одинаковыми по длине сторонами, равными единице. Таким образом, вектор $\vec{c}=\overrightarrow{a^0}+\overrightarrow{b^0}$ направлен по биссектрисе угла между $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

$$|\vec{a}|=\sqrt{4+9+36}=7,\quad \overrightarrow{a^0}=\left(\frac{2}{7};-\frac{3}{7};\frac{6}{7}\right),$$

$$|\vec{b}|=\sqrt{1+4+4}=3,\quad \overrightarrow{b^0}=\left(-\frac{1}{3};\frac{2}{3};-\frac{2}{3}\right),$$

$$\vec{c}=\overrightarrow{a^0}+\overrightarrow{b^0}=\left(\frac{2}{7}-\frac{1}{3},\ -\frac{3}{7}+\frac{2}{3},\ \frac{6}{7}-\frac{2}{3}\right)=\left(-\frac{1}{21},\frac{5}{21},\frac{4}{21}\right).$$

Найдем длину вектора $\vec{c}$ $|\vec{c}|=\sqrt{\left(\frac{1}{21}\right)^2+\left(\frac{5}{21}\right)^2+\left(\frac{4}{21}\right)^2}=\sqrt{\frac{2}{21}}$, тогда орт биссектрисы равен $\vec{c}^0=\frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}=\left(-\frac{1}{\sqrt{42}},\frac{5}{\sqrt{42}},\frac{4}{\sqrt{42}}\right)$.

Задача 3. Разложить вектор $\vec{S}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ по трем некомпланарным векторам: $\vec{p}=\vec{a}+\vec{b}$, $\vec{q}=\vec{a}-\vec{b}$, $\vec{r}=2\vec{b}+3\vec{c}$.

Решение. $\vec{S}=\alpha\vec{p}+\beta\vec{q}+\gamma\vec{r}$. $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}+\beta\vec{a}-\beta\vec{b}+2\gamma\vec{b}+3\gamma\vec{c}$.
Приравняем коэффициенты справа и слева:

$$\begin{cases}\alpha+\beta=1,\\ \alpha-\beta+2\gamma=1,\\ -2\alpha+3\gamma=1,\end{cases}\ \text{тогда}\ \ \alpha=\frac{2}{5};\ \beta=\frac{3}{5};\ \gamma=\frac{3}{5}\ \ \text{и}\ \ \vec{S}=\frac{2}{5}\vec{p}+\frac{3}{5}\vec{q}+\frac{3}{5}\vec{r}.$$

Задачи

1. Построить вектор $\vec{a}-2\vec{b}$ по данным векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

2. В треугольнике OAB даны векторы $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$. Найти векторы $\overrightarrow{MA}$ и $\overrightarrow{MB}$, где M – середина стороны AB.

3. Даны модуль вектора $|\vec{a}|=2$ и углы $\alpha=45^0$, $\beta=60^0$, $\gamma=120^0$. Вычислить проекции вектора $\vec{a}$ на координатные оси.

4. Вычислить направляющие косинусы вектора $\vec{a}=\{12,-15,-16\}$.

5. Вектор составляет с осями OX и OZ углы $\alpha=120^0$ и $\gamma=45^0$. Какой угол он составляет с осью OY?

6. Даны $\vec{a}\{3,-4,5\}$, $\vec{b}\{-1,0,-2\}$. Найти $\vec{c}=2\vec{a}+5\vec{b}$, $\vec{d}=3\vec{a}-2\vec{b}$.

7. Даны точки $A(-1,5,-10)$, $B(5,-7,8)$ и $D(5,-4,2)$. Проверить, что векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ коллинеарны; установить, какой из них длиннее другого и во сколько раз, как они направлены – в одну сторону или в противоположные.

8. Найти орт вектора $\vec{a}\{6,-2,-3\}$.

9. Доказать, что векторы $\vec{a}\{2,2,3\}$, $\vec{b}\{1,2,3\}$, $\vec{c}\{1,1,1\}$ линейно независимы и разложить по ним вектор $\vec{d}\{3,0,-2\}$.

Домашнее задание

1. Определить точку N, с которой совпадает конец вектора $\vec{a}=\{3,-1,4\}$, если его начало совпадает с точкой M (1, 2,- 3).

2. Вектор $\vec{a}$ составляет с осями координат острые углы α, β, γ при $\alpha=45^0$ и $\gamma=60^0$. Найти его координаты, если $|\vec{a}|=3$.

3. Точка O является центром масс треугольника ABC. Доказать, что $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=0$.

4. Найти орт вектора $\vec{a}=\{3,\ 4,\ -12\}$.

5. Векторы $\overrightarrow{AB}=\{2,\ 6,\ -4\}$ и $\overrightarrow{AC}=\{4,\ 2,\ -2\}$ совпадают со сторонами треугольника ABC. Определить координаты векторов, приложенных к вершинам треугольника и совпадающих с его медианами AM, BN, CP.

6. На плоскости даны четыре точки: $A(1,-2)$, $B(2,1)$, $C(3,2)$ и $D(-2,3)$. Определить разложение векторов $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BD}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CD}$, принимая в качестве базиса векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

7. Даны три вектора: $\vec{p}=\{3,\ -2,\ 1\}$, $\vec{q}=\{-1,\ 1,-2\}$, $\vec{r}=\{2,\ 1,\ -3\}$. Найти разложение вектора $\vec{c}=\{11,\ -6,5\}$ по базису $\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$.

Ответы к задачам

3. $\left(\sqrt{2},1,-2\right)$.

4. $\cos\alpha=\dfrac{12}{25};\ \cos\beta=-\dfrac{3}{5},\ \cos\gamma=-\dfrac{16}{25}$.

6. $\vec{c}=(1,-8,0),\ \vec{d}=(11,-12,19)$.

8. $\vec{a}=\left(\dfrac{6}{7},-\dfrac{2}{7},\dfrac{3}{7}\right)$.

9. $\vec{d}=\vec{a}-3\vec{b}+4\vec{c}$.

Домашнее задание

1. $N(4,1,1)$.

2. $\vec{a}=\left(\dfrac{3}{\sqrt{2}};\dfrac{3}{2};\dfrac{3}{2}\right)$. .

4. $\vec{a}^{0}=\left(\dfrac{3}{12},\ \dfrac{4}{13},\ -\dfrac{12}{13}\right)$.

5. $\overrightarrow{AM}=(3,4,-3),\ \overrightarrow{BN}=\dfrac{1}{2}\vec{c}-\vec{b},\ \overrightarrow{CP}=\dfrac{1}{2}\vec{b}-\vec{c}$.

6. $\overrightarrow{AD}=11\overrightarrow{AB}-7\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{BD}=10\overrightarrow{AB}-7\overrightarrow{AC},\quad \overrightarrow{CD}=11\overrightarrow{AB}-8\overrightarrow{AC},$

$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BD}+\underline{CD}=32\overrightarrow{AB}-22\overrightarrow{AC}$.

7. $\vec{c}=2\vec{p}-3\vec{q}+\vec{r}$.