Тема 1

Линейные операции над векторами. Линейная зависимость векторов

Определение 1. Геометрическим вектором, или просто вектором, называется **направленный отрезок.**

Будем обозначать вектор либо как направленный отрезок символом $\overrightarrow{AB}$, где точки A и B - начало и конец данного вектора, либо $\vec{a}$. Начало вектора называют **точкой его приложения**.

Определение 2. Вектор называется **нулевым,** если начало и конец его совпадают.

Нулевой вектор не имеет определенного направления и имеет длину, равную нулю. Это позволяет при записи отождествлять нулевой вектор с вещественным числом нуль.

Определение 3. Векторы называются **коллинеарными**, если они лежат либо на одной прямой, либо на параллельных прямых.

Определение 4. Три вектора называются **компланарными**, если они лежат в одной плоскости.

Определение 5. Два вектора называются **равными**, если они коллиннеарны, имеют одинаковую длину и одинаковое направление.

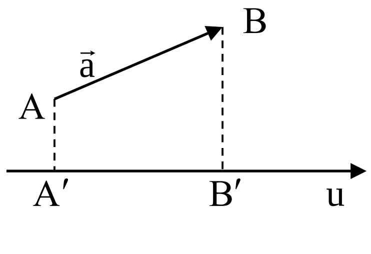
Все нулевые векторы считаются равными.

Определение 6. Суммой $\vec{a}+\vec{b}$ двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется **вектор**, идущий из начала вектора $\vec{a}$ в конец вектора $\vec{b}$ при условии, что вектор $\vec{b}$ приложен к концу вектора $\vec{a}$.

Определение 7. Разностью $\vec{a}-\vec{b}$ вектора $\vec{a}$ и вектора $\vec{b}$ называется такой **вектор** $\vec{c}$, который в сумме с вектором $\vec{b}$ дает вектор $\vec{a}$.

Определение 8. Произведением $\alpha\vec{a}$ вектора $\vec{a}$ на действительное число α называется вектор $\vec{b}$, коллинеарный вектору $\vec{a}$, имеющий длину, равную $|\alpha|\cdot|\vec{a}|$, и имеющий направление, совпадающее с направлением вектора $\vec{a}$ при $\alpha>0$ и противоположное направлению вектора $\vec{a}$ при $\alpha<0$.

Обозначим буквами A' и B' основания перпендикуляров, опущенных на ось u из точек A и B соответственно.



Определение 9. Проекцией вектора $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ на ось u называется **величина** $A'B'$
направленного отрезка $\overrightarrow{A'B'}$ оси u и обозначается $пр_u\vec{a}$. $пр_u\vec{a}=|\vec{a}|\cos\varphi$, где φ - угол между вектором $\vec{a}$ и осью u.

Любой вектор $\vec{a}$ может быть разложен по декартову прямоугольному базису $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$: $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.

Числа x, y, z - называется декартовыми прямоугольными координатами вектора $\vec{a}$. Обозначим буквами α, β и γ углы наклона вектора $\vec{a}$ к осям координат; $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ называются направляющими косинусами вектора $\vec{a}$.

Длина вектора через его координаты имеет вид $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Направляющие косинусы вектора вычисляются по формулам:

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \quad \cos\beta = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}; \quad \cos\gamma = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}},$$

откуда следует $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Определение 10. Ортом вектора $\vec{a}$ называется вектор $\vec{a}^0$, удовлетворяющий условиям:

1) $\vec{a}^0$ коллинеарен вектору $\vec{a}$,
2) $|\vec{a}^0| = 1$.

Координатами орта вектора являются направляющие косинуса.

Если два вектора $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ заданы в декартовых прямоугольных координат $\vec{a}_1 = x_1\vec{i} + y_1\vec{j} + z_1\vec{k}, \vec{a}_2 = x_2\vec{i} + y_2\vec{j} + z_2\vec{k}$, то

$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j} + (z_1 + z_2)\vec{k},$$

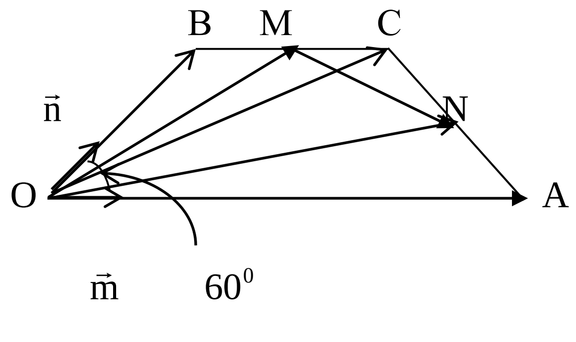
$$\alpha\vec{a} = (\alpha x_1)\vec{i} + (\alpha y_1)\vec{j} + (\alpha z_1)\vec{k}.$$

Условие коллинеарности векторов имеет вид $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$.

Примеры решения задач

Задача 1. В равнобедренной трапеции OACB угол $BOA = \pi/3, OB = BC = CA = 2$,

MN - середина сторон BC и AC. Выразить векторы $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}$ и $\overrightarrow{MN}$ через $\vec{m}$ и $\vec{n}$ - единичные векторы направлений $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$.



Решение. $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BM}$. Так как $\overrightarrow{OB}=2\vec{n},\ \overrightarrow{BM}=\vec{m},\ \overrightarrow{OM}=2\vec{n}+\vec{m}$. Найдем
вектор $\overrightarrow{AC}$. Из треугольника OCA $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OA}$, а так как $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}$, а $\overrightarrow{OA}=4\vec{m}$, то $\overrightarrow{AC}=2\vec{n}+2\vec{m}-4\vec{m}$, вектор $\overrightarrow{AC}=2(\vec{n}-\vec{m})$. Найдем $\overrightarrow{ON}$ из треуголь-
ника ONC $\overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{NC}$, а так как $\overrightarrow{OC}=2(\vec{n}+\vec{m})$, $\overrightarrow{NC}=\vec{n}-\vec{m}$, $\overrightarrow{ON}=\vec{n}+3\vec{m}$.

Из треугольника OMN $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=-2\vec{n}-\vec{m}+\vec{n}+3\vec{m}=-\vec{n}+2\vec{m}$.

Тема 2
Скалярное произведение векторов

Определение. Скалярным произведением ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число $(\vec{a},\vec{b})=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)$; $(\vec{a},\vec{b})=|\vec{a}|\cdot \text{пр}_{\vec{a}}\vec{b}$.

Свойства скалярного произведения:

1) $(\vec{a},\vec{b})=(\vec{b},\vec{a})$ (переместительное);

2) $(\alpha\vec{a},\vec{b})=\alpha(\vec{a},\vec{b})$ (сочетательное относительно числового множителя);

3) $(\vec{a}+\vec{b},\vec{c})=(\vec{a},\vec{c})+(\vec{b},\vec{c})$ (распределительное относительно суммы векторов).

Если $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$, то $(\vec{a},\vec{b})=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$, $\cos(\vec{a},\vec{b})=\dfrac{(\vec{a},\vec{b})}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$.

Условие перпендикулярности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $(\vec{a},\vec{b})=0$.

Длина вектора $\vec{a}$: $|\vec{a}|=\sqrt{(\vec{a},\vec{a})}$.

Физический смысл скалярного поизведения: если вектор $\vec{F}$ представляет силу, точка приложения которой перемещается из начала в конец вектора $\vec{S}$, то работа A этой силы определяется равенством $A=(\vec{F},\vec{S})$.

Примеры решения задач

Задача 1. Определить длины диагоналей параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}=3\vec{m}+\vec{n}$ и $\vec{b}=2\vec{m}+\vec{n}$, где $\vec{m}$ и $\vec{n}$ таковы, что $|\vec{m}|=|\vec{n}|=1$, $\left(\widehat{\vec{m},\vec{n}}\right)=60^0$.

Решение. Диагонали параллелограмма есть векторы $\vec{c}=\vec{a}+\vec{b}$ и $\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}$. Вычислим длину вектора $\vec{c}$:

$$|\vec{c}|=|(5\vec{m}+2\vec{n})|=\sqrt{(5\vec{m}+2\vec{n})^2}=\sqrt{25(\vec{m},\vec{m})+20(\vec{m},\vec{n})+4(\vec{n},\vec{n})}=\sqrt{29+10+4}=\sqrt{43}.$$

Аналогично вычисляется длина вектора $\vec{d}$.

Задача 2. Найдите вектор $\vec{b}$, коллинеарный вектору $\vec{a} = (-1, 2, 2)$ и удовлетворяющий условию $(\vec{b}, \vec{a}) = -2$.

Решение. Обозначим вектор $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, тогда из условий задачи

$$\begin{cases} -b_1 + 2b_2 + 2b_3 = -2 \\ -b_1 = \dfrac{b_2}{2} = \dfrac{b_3}{2} \end{cases} \quad \text{или} \quad b_2 = -2b_1;\ b_3 = -2b_1;\ -9b_1 = -2;\ b_1 = 2/9,$$

тогда $b_2 = b_3 = -4/9$. Итак: $\vec{b} = (2/9, -4/9, -4/9)$.

Задача 3. Найти проекцию вектора $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$ на направление вектора $\vec{b} = \vec{i} + \vec{j}$.

Решение. $\vec{b}^{\,0} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$. По формуле проекции вектора на ось будет иметь место равенство

$$\text{пр}_{\vec{e}}\, \vec{u} = (\vec{u}, \vec{e}) = \frac{3}{\sqrt{2}} + \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{7}{\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{2}.$$

Задача 4. Даны векторы:
$\vec{a} = (3, -3, -2)$, $\vec{b} = (-4, 1, 0)$, $\vec{c} = (-1, -2, -2)$, $\vec{d} = (-6, 6, 4)$.

Проверить, есть ли среди них коллинеарные. Найти $|\vec{a}|$, $|\vec{b}|$, $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$, $\text{пр}_{\vec{b}}\, \vec{a}$.

Решение. Условие коллинеарности имеет вид $\dfrac{x_1}{y_1} = \dfrac{x_2}{y_2} = \dfrac{x_3}{y_3}$. Этому условию удовлетворяют векторы $\vec{a}$ и $\vec{d}$. Следовательно, они коллинеарны. Найдем длины
векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $|\vec{a}| = \sqrt{9 + 9 + 4} = \sqrt{22}$, $|\vec{b}| = \sqrt{16 + 1} = \sqrt{17}$.

Угол между векторами определяется по формуле $\cos\varphi = \dfrac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$.

Тогда $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \dfrac{-12 - 3}{\sqrt{22} \cdot \sqrt{17}} = \dfrac{-15}{\sqrt{374}}$, $\qquad (\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \arccos\left(\dfrac{-15}{\sqrt{374}}\right)$.

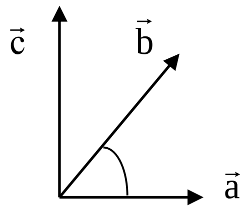
Используя формулу $\text{пр}_{\vec{b}}\, \vec{a} = \dfrac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{b}|}$, получим $\text{пр}_{\vec{b}}\, \vec{a} = \dfrac{-15}{\sqrt{17}}$.

Задача 5. На материальную точку действуют силы $\vec{f}_1 = -\vec{j}$, $\vec{f}_2 = -\vec{i}$, $\vec{f}_3 = -\vec{k}$. Найти работу равнодействующей этих сил $\vec{R}$ при перемещении точки из положения $A(2, -1, 0)$ в положение $B(4, 1, -1)$.

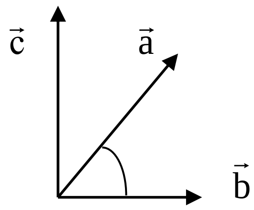
Решение. Найдем силу $\vec{R}$ и вектор перемещения $\vec{R} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 + \vec{f}_3 = -\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$. $\vec{S} = \overrightarrow{AB} = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, тогда искомая работа $A = (\vec{R}, \vec{S}) = -2 - 2 + 1 = -3$.

Тема 3
Векторное произведения векторов. Смешанное произведение векторов

Определение1. Тройка некомпланарных векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется правой (левой) если, находясь внутри телесного угла, образованного приведенными к общему началу векторами $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и от него к $\vec{c}$, човершающимся против часовой стрелки (по часовой стрелке)



Тройка правая



Тройка левая

Определение 2. Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$, длина и направление которого определяются условиями:

1. $\left|\left[\vec{a}, \vec{b}\right]\right| = |\vec{a}| \cdot \left|\vec{b}\right| \sin\varphi$, где φ - угол между $\vec{a}$ и $\vec{b}$.
2. $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] \perp \vec{a}$, $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] \perp \vec{b}$.
3. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ - правая тройка векторов.

Свойства векторного произведения

1. $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = -\left[\vec{b}, \vec{a}\right]$ (свойство антиперестановочности сомножителей);
2. $\left[\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}\right] = -\left[\vec{a}, \vec{c}\right] + \left[\vec{b}, \vec{c}\right]$ (распределительное относительно суммы векторов);
3. $\left[\alpha\vec{a}, \vec{b}\right] = \alpha\left[\vec{a}, \vec{b}\right]$ (сочетательное относиельно числового множителя);
4. $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$ (равенство нулю векторного произведения означает коллинеарность векторов);
5. $\vec{M} = \left[\vec{d}, \vec{F}\right]$, т. е. момент сил равен векторному произведению силы на плечо.

Если вектор $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, то $\left[\vec{a}, \vec{b}\right] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$.

Определение 3. Смешанным произведением $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right)$ трех векторов называется число, определяемое следующим образом: $\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \left(\left[\vec{a}, \vec{b}\right], \vec{c}\right)$. Если векторы заданы своими координатами: $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$, $\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$, то

$$\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right) \sim \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Свойства смешанного произведения

1. Необходимым и достаточным условием компланарности векторов $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ является равенство $\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)=0$.

2. Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$,
$\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$,
$\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$: $V=\left|\left(\vec{a},\vec{b},\vec{c}\right)\right|$.

Примеры решения задач

Задача 1. Найти координаты векторного произведения $\left(2\vec{a}-3\vec{b}\right)\times\left(2\vec{a}-4\vec{b}\right)$, если $\vec{a}=3\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$, $\vec{b}=2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$.

Решение. Найдем $2\vec{a}-3\vec{b}=(0,\ 1,\ 1)$ и $2\vec{a}-4\vec{b}=(-2,\ 2,\ 0)$. Векторное произведение, по определению, равно $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \end{vmatrix}=-2\vec{i}-2\vec{j}+2\vec{k}$.

Задача 2. Силы $\vec{F}_1=-2\vec{i}-\vec{j}+5\vec{k}$ и $\vec{F}_2=3\vec{i}+5\vec{j}-\vec{k}$ приложены к точке $A(3,\ 4,\ -1)$. Вычислить величину момента равнодействующей этих сил $\vec{R}$ относительно точки $B(1,\ 3,\ 0)$.

Решение. Найдем силу $\vec{R}$ и плечо $\vec{d}$: $\vec{R}=\vec{i}+4\vec{j}+4\vec{k}$, $\vec{d}=-2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k}$. Момент
сил $\vec{M}$ вычисляется по формуле

$\vec{M}=\vec{R}\times\vec{d}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 4 & 4 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix}=8\vec{i}-a\vec{j}+7\vec{k}$, а его модуль $\left|\vec{M}\right|=\sqrt{64+81+49}=\sqrt{194}$.

Задача 3. Даны координаты вершин параллелепипеда: $A(1,2,3)$, $B(0,1,2)$, $C(1,1,3)$, $D(0,0,3)$. Найти объем параллелепипеда, его высоту, опущенную из вершины C, угол между вектором AD и гранью, в которой лежат векторы AB и AC.

Решение. По определению, объем параллелепипеда равен смешанному произведению векторов, на которых он построен. Найдем эти векторы:

$$\overrightarrow{AB} = (-1,-1,-1), \quad \overrightarrow{AC} = (0,-1,0), \quad \overrightarrow{AD} = (-1,-2,0).$$

Объем этого параллелепипеда $V = \left(\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AD}\right) = \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 1.$

С другой стороны, объем параллелепипеда $V = S_{осн} \cdot h$, $S_{осн}$ - это площадь параллелограмма: $S = \left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right|$.

$S_{осн} = \left\| \begin{matrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{matrix} \right\| = \left| -\vec{i} - \vec{k} \right| = \sqrt{2}$, тогда высота $h = \dfrac{v}{S_{осн}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Угол между вектором и гранью φ найдем по формуле

$$\psi = \frac{\pi}{2} - \arccos \cdot \frac{\left| \overrightarrow{AD} \cdot \left(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right) \right|}{\left| \overrightarrow{AD} \right| \left| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right|}.$$

так как вектор $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ перпендикулярен грани, в которой лежат векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Угол между этим вектором и вектором $\overrightarrow{AD}$ находим по известной формуле

$\cos\varphi = \dfrac{\left| \left(\vec{a} \cdot \vec{b} \right) \right|}{\left| \vec{a} \right| \cdot \left| \vec{b} \right|}$. Очевидно, что искомый угол $\varphi = \dfrac{\pi}{2} - \varphi$.

Итак: $\psi = \dfrac{\pi}{2} - \arccos\dfrac{1}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{2}} = \dfrac{\pi}{2} - \arccos\dfrac{1}{\sqrt{10}}$.

Задача 4. Проверить, лежат ли в одной плоскости точки $A(0, 0, 1)$, $B(2, -1, 3)$, $C(1, 2, -2)$, $D(3, -4, 8)$. Найти линейную зависимость вектора $\overrightarrow{AB}$ от $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$, если это возможно.

Решение. Найдем три вектора: $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AD}$.

$\vec{a} = (2, -1, 2)$, $\vec{b} = (1, 2, -3)$, $\vec{c} = (3, -4, 7)$.

Три вектора лежат в одной плоскости, если они компланарны, т. е. их смешанное произведение равно нулю: $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 3 & -4 & 7 \end{vmatrix} = 0$. Следовательно, эти

три вектора линей-
но зависимы. Найдем линейную зависимость $\overrightarrow{AB}$ от $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AD}$: $\vec{a} = \alpha\vec{b} + \beta\vec{c}$.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{cases} \alpha + 3\beta = 2 \\ 2\alpha - 4\beta = -1 \\ -3\alpha + 7\beta = 2, \end{cases}.$$

Решая эту систему, получим $\alpha = \beta = 1/2$, т.е. $\vec{a} = 1/2\vec{b} + 1/2\vec{c}$.