

Лекция №4

Уравнение плоскости.

1. Общее уравнение плоскости.

Определение. Любое уравнение, связывающее координаты x, y, z любой точки поверхности является уравнением этой поверхности.

Определение. **Плоскостью** называется поверхность, все точки которой удовлетворяют общему уравнению:

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

где A, B, C – координаты вектора $\vec{N} = A\vec{i} + B\vec{j} + C\vec{k}$ – вектор **нормали** к плоскости.

Возможны следующие частные случаи:

$A = 0$ – плоскость параллельна оси Ox

$B = 0$ – плоскость параллельна оси Oy

$C = 0$ – плоскость параллельна оси Oz

$D = 0$ – плоскость проходит через начало координат

Найти объем пирамиды.

$A = B = 0$ – плоскость параллельна плоскости xOy

$A = C = 0$ – плоскость параллельна плоскости xOz

$B = C = 0$ – плоскость параллельна плоскости yOz

$A = D = 0$ – плоскость проходит через ось Ox

$B = D = 0$ – плоскость проходит через ось Oy

$C = D = 0$ – плоскость проходит через ось Oz

$A = B = D = 0$ – плоскость совпадает с плоскостью xOy

$A = C = D = 0$ – плоскость совпадает с плоскостью xOz

$B = C = D = 0$ – плоскость совпадает с плоскостью yOz

2. Уравнение плоскости, проходящей через три точки.

Для того, чтобы через три какие-либо точки пространства можно было провести единственную плоскость, необходимо, чтобы эти точки не лежали на одной прямой.

Рассмотрим точки $M_1(x_1, y_1, z_1), M_2(x_2, y_2, z_2), M_3(x_3, y_3, z_3)$ в общей декартовой системе координат.

Для того, чтобы произвольная точка $M(x, y, z)$ лежала в одной плоскости с точками M_1, M_2, M_3 необходимо, чтобы векторы $\vec{M_1M_2}, \vec{M_1M_3}, \vec{M_1M}$ были компланарны.

$$(\vec{M_1M_2}, \vec{M_1M_3}, \vec{M_1M}) = 0$$

$$\vec{M_1M} = \{x - x_1; y - y_1; z - z_1\}$$

Таким образом, $\vec{M_1M_2} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$

$$\vec{M_1M_3} = \{x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1\}$$

Уравнение плоскости, проходящей через три точки:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

3. Уравнение плоскости по двум точкам и вектору, коллинеарному плоскости.

Пусть заданы точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и вектор $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$.

Составим уравнение плоскости, проходящей через данные точки M_1 и M_2 и произвольную точку $M(x, y, z)$ параллельно вектору \vec{a} .

Векторы $\overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1; y - y_1; z - z_1\}$ и вектор $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ должны быть компланарны, т.е.

$$(\overrightarrow{M_1M}, \overrightarrow{M_1M_2}, \vec{a}) = 0$$

Уравнение плоскости:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0$$

4. Уравнение плоскости по одной точке и двум векторам, коллинеарным плоскости.

Пусть заданы два вектора $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$, коллинеарные плоскости. Тогда для произвольной точки $M(x, y, z)$, принадлежащей плоскости, векторы $\vec{a}, \vec{b}, \overrightarrow{MM_1}$ должны быть компланарны.

Уравнение плоскости:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0$$

Уравнение плоскости по точке и вектору нормали.

Теорема. Если в пространстве задана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, то уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 перпендикулярно вектору нормали $\vec{N} (A, B, C)$ имеет вид:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Доказательство. Для произвольной точки $M(x, y, z)$, принадлежащей плоскости, составим вектор $\overrightarrow{M_0M} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$. Т.к. вектор \vec{N} - вектор нормали, то он перпендикулярен плоскости, а, следовательно, перпендикулярен и вектору $\overrightarrow{M_0M}$. Тогда скалярное произведение

$$\overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{N} = 0$$

Таким образом, получаем уравнение плоскости

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

Теорема доказана.

5. Уравнение плоскости в отрезках.

Если в общем уравнении $Ax + By + Cz + D = 0$ поделить обе части на $-D$

$$-\frac{A}{D}x - \frac{B}{D}y - \frac{C}{D}z - 1 = 0,$$

заменив $-\frac{D}{A} = a$, $-\frac{D}{B} = b$, $-\frac{D}{C} = c$, получим уравнение плоскости в отрезках:

$$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1}$$

Числа a, b, c являются точками пересечения плоскости соответственно с осями x, y, z.

6. Уравнение плоскости в векторной форме.

$$\boxed{\vec{r} \cdot \vec{n} = p}, \text{ где}$$

$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ - радиус- вектор текущей точки M(x, y, z),

$\vec{n} = \vec{i} \cos \alpha + \vec{j} \cos \beta + \vec{k} \cos \gamma$ - единичный вектор, имеющий направление, перпендикулярно, опущенного на плоскость из начала координат.

α , β и γ - углы, образованные этим вектором с осями x, y, z.

p - длина этого перпендикуляра.

В координатах это уравнение имеет вид:

$$\boxed{xcos\alpha + ycos\beta + zcos\gamma - p = 0.}$$

Расстояние от точки до плоскости.

7. Расстояние от произвольной точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до плоскости $Ax+By+Cz+D=0$

$$\boxed{d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}$$

Пример. Найти уравнение плоскости, зная, что точка P(4; -3; 12) - основание перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту плоскость.

$$\overrightarrow{OP} = (4; -3; 12); \quad |\overrightarrow{OP}| = \sqrt{16 + 9 + 144} = \sqrt{169} = 13$$

$$\vec{N} = \left(\frac{4}{13}; -\frac{3}{13}; \frac{12}{13}\right)$$

Таким образом, A = 4/13; B = -3/13; C = 12/13, воспользуемся формулой:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

$$\frac{4}{13}(x - 4) - \frac{3}{13}(y + 3) + \frac{12}{13}(z - 12) = 0$$

$$\frac{4}{13}x - \frac{16}{13} - \frac{3}{13}y - \frac{9}{13} + \frac{12}{13}z - \frac{144}{13} = 0$$

$$\frac{4}{13}x - \frac{3}{13}y + \frac{12}{13}z - \frac{169}{13} = 0$$

$$4x - 3y + 12z - 169 = 0.$$

Пример. Найти уравнение плоскости, проходящей через две точки P(2; 0; -1) и Q(1; -1; 3) перпендикулярно плоскости $3x + 2y - z + 5 = 0$.

Вектор нормали к плоскости $3x + 2y - z + 5 = 0$ $\vec{N} = (3; 2; -1)$ параллелен искомой плоскости.

Получаем:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-0 & z+1 \\ 1-2 & -1-0 & 3+1 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x-2 & y & z+1 \\ -1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x-2)(1-8) - y(1-12) + (z+1)(-2+3) = 0$$

$$-7(x-2) + 11y + (z+1) = 0$$

$$-7x + 14 + 11y + z + 1 = 0$$

$$-7x + 11y + z + 15 = 0$$

Пример. Найти уравнение плоскости, проходящей через точки $A(2, -1, 4)$ и $B(3, 2, -1)$ перпендикулярно плоскости $x + y + 2z - 3 = 0$.

Искомое уравнение плоскости имеет вид: $Ax + By + Cz + D = 0$, вектор нормали к этой плоскости $\vec{n}_1(A, B, C)$. Вектор $\vec{AB}(1, 3, -5)$ принадлежит плоскости. Заданная нам плоскость, перпендикулярная искомой имеет вектор нормали $\vec{n}_2(1, 1, 2)$. Т.к. точки A и B принадлежат обеим плоскостям, а плоскости взаимно перпендикулярны, то

$$\vec{n}_1 = \vec{AB} \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 11\vec{i} - 7\vec{j} - 2\vec{k}.$$

Таким образом, вектор нормали $\vec{n}_1(11, -7, -2)$. Т.к. точка A принадлежит искомой плоскости, то ее координаты должны удовлетворять уравнению этой плоскости, т.е. $11 \cdot 2 + 7 \cdot 1 - 2 \cdot 4 + D = 0$; $D = -21$.

Итого, получаем уравнение плоскости: $11x - 7y - 2z - 21 = 0$.

Пример. Найти уравнение плоскости, зная, что точка $P(4, -3, 12)$ – основание перпендикуляра, опущенного из начала координат на эту плоскость.

Находим координаты вектора нормали $\vec{OP} = (4, -3, 12)$. Искомое уравнение плоскости имеет вид: $4x - 3y + 12z + D = 0$. Для нахождения коэффициента D подставим в уравнение координаты точки P :

$$16 + 9 + 144 + D = 0$$

$$D = -169$$

Итого, получаем искомое уравнение: $4x - 3y + 12z - 169 = 0$

Пример. Даны координаты вершин пирамиды $A_1(1; 0; 3)$, $A_2(2; -1; 3)$, $A_3(2; 1; 1)$, $A_4(1; 2; 5)$.

1) Найти длину ребра A_1A_2 .

$$\vec{A_1A_2} = \{2-1; -1-0; 3-3\} = \{1; -1; 0\}; \quad |\vec{A_1A_2}| = \sqrt{1+1+0} = \sqrt{2}(ed).$$

2) Найти угол между ребрами A_1A_2 и A_1A_4 .

$$\overrightarrow{A_1A_4} = \{1-1; 2-0; 5-3\} = \{0; 2; 2\}$$

$$|\overrightarrow{A_1A_4}| = 2\sqrt{2}(e\delta)$$

$$\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_4} = (1; -1; 0)(0; 2; 2) = -2$$

$$\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_4} = |\overrightarrow{A_1A_2}| |\overrightarrow{A_1A_4}| \cos \alpha = 2\sqrt{2}\sqrt{2} \cos \alpha = 4 \cos \alpha$$

$$\cos \alpha = \frac{\overrightarrow{A_1A_2} \cdot \overrightarrow{A_1A_4}}{|\overrightarrow{A_1A_2}| |\overrightarrow{A_1A_4}|} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}; \quad \alpha = 120^\circ$$

3) Найти угол между ребром A_1A_4 и гранью $A_1A_2A_3$.

Сначала найдем вектор нормали к грани $A_1A_2A_3$ \vec{N} как векторное произведение векторов $\overrightarrow{A_1A_3}$ и $\overrightarrow{A_1A_2}$.

$$\overrightarrow{A_1A_3} = (2-1; 1-0; 1-3) = (1; 1; -2);$$

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i}(0-2) - \vec{j}(0+2) + \vec{k}(-1-1) = -2\vec{i} - 2\vec{j} - 2\vec{k}; \quad \vec{N} = (-2; -2; -2)$$

$$|\vec{N}| = 2\sqrt{3}$$

Найдем угол между вектором нормали и вектором $\overrightarrow{A_1A_4}$.

$$\vec{N} \cdot \overrightarrow{A_1A_4} = |\vec{N}| \cdot |\overrightarrow{A_1A_4}| \cos \beta = 2\sqrt{3} \cdot 2\sqrt{2} \cos \beta$$

$$\vec{N} \cdot \overrightarrow{A_1A_4} = -4 - 4 = -8.$$

Искомый угол γ между вектором и плоскостью будет равен $\gamma = 90^\circ - \beta$.

$$\sin \gamma = \cos \beta = \frac{|-8|}{4\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}. \quad \gamma = \arcsin \frac{\sqrt{6}}{3}$$

4) Найти площадь грани $A_1A_2A_3$.

$$S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}| = \frac{1}{2} |\vec{N}| = \sqrt{3}(e\delta^2)$$

5)

$$V = \frac{1}{6} |((\overrightarrow{A_1A_2} \times \overrightarrow{A_1A_3}) \cdot \overrightarrow{A_1A_4})| = \left| \frac{1}{6} \vec{N} \cdot \overrightarrow{A_1A_4} \right| = \frac{4}{3} (e\delta^3).$$

6) Найти уравнение плоскости $A_1A_2A_3$.

Вспользуемся формулой уравнения плоскости, проходящей через три точки.

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-0 & z-3 \\ 2-1 & -1-0 & 3-3 \\ 2-1 & 1-0 & 1-3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-1 & y & z-3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (x-1) \cdot 2 - y(-2) + (z-3)(1+1) =$$

$$= 2x - 2 + 2y + 2z - 6 = 0$$

$$2x + 2y + 2z - 8 = 0$$

$$x + y + z - 4 = 0;$$

