

Типовой расчёт «Математический анализ»

Задача 11

Правило 1. Чтобы вычислить $A = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{q(x)}$, нужно вместо переменной x поставить её предельное значение x_0 .

Если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} q(x) = q(x_0) = C \neq 0$, то $A = \frac{0}{C} = 0$.

Если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = C \neq 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} q(x) = q(x_0) = 0$, то $A = \frac{C}{0} = \infty$.

Если $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} q(x) = q(x_0) = 0$, то $A = \frac{0}{0}$ - неопределенность.

Правило 2. Чтобы раскрыть неопределенность $\frac{0}{0}$ в алгебраическом выражении, надо в числителе и знаменателе выделить множитель $x - x_0$, который стремится к нулю, и на него под знаком предела сократить.

Правило 3. Если в числителе и знаменателе стоят многочлены, то чтобы получить множитель $x - x_0$, нужно многочлены разложить на множители.

Пример 1

Вычислить предел $A = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{2x^2 - 11x - 6}{3x^2 - 19x + 6} = \frac{0}{0}$.

$$\lim_{x \rightarrow 6} \frac{2x^2 - 11x - 6}{3x^2 - 19x + 6} = \frac{2 \cdot 6^2 - 11 \cdot 6 - 6}{3 \cdot 6^2 - 19 \cdot 6 + 6} = \frac{0}{0}.$$

Найдем корни многочленов $2x^2 - 11x - 6 = 0$, $x_1 = 6$, $x_2 = -\frac{1}{2}$;

$$2x^2 - 11x - 6 = 2(x - 6)\left(x + \frac{1}{2}\right) = (x - 6)(2x + 1);$$

$$3x^2 - 19x + 6 = 0, \quad x_1 = 6, \quad x_2 = \frac{1}{3};$$

$$3x^2 - 19x + 6 = 3(x - 6)\left(x - \frac{1}{3}\right) = (x - 6)(3x - 1).$$

$$A = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{\cancel{(x-6)}(2x+1)}{\cancel{(x-6)}(3x-1)} = \lim_{x \rightarrow 6} \frac{2x+1}{3x-1} = \frac{2 \cdot 6 + 1}{3 \cdot 6 - 1} = \frac{13}{17}.$$

Контрольные варианты к задаче 1

Вычислить пределы функции:

1. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 9x + 9}{x^2 - 5x + 6}$.	2. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + 7x + 6}{3x^2 + 10x + 8}$.	3. $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 + 15x + 25}{5 - 4x - x^2}$.
--	---	---

4. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{3x^2 - 14x - 5}{x^2 - 2x - 15}$.	5. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{4x^2 + 7x + 3}{2x^2 + x - 1}$.	6. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{2x^2 - 11x + 5}{3x^2 - 14x - 5}$.
7. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + 7x + 2}{2x^2 + x - 6}$.	8. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + x - 10}{x^2 - x - 2}$.	9. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 - 2x - 8}{2x^2 + 5x + 2}$.
10. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{6 - x^2 - x}{3x^2 + 8x - 3}$.	11. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 5x - 3}{x^2 + 2x - 3}$.	12. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{6 - 7x - 3x^2}{2x^2 + 7x + 3}$.
13. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 2x - 8}{8 - x^3}$.	14. $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + x - 12}{x^2 + 2x - 8}$.	15. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{2x^2 - 5x + 2}$.
16. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 4x + 1}{x^2 - 3x + 2}$.	17. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 - 9x + 4}{x^2 + x - 20}$.	18. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^2 - 2x - 15}{2x^2 - 7x - 15}$.
19. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 + 5x - 7}{3x^2 - x - 2}$.	20. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - x - 3}{x^2 - 3x - 4}$.	21. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 + x - 10}{x^2 + x - 6}$.
22. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + x - 6}{2x^2 - x - 21}$.	23. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x - 6}{2x^2 + x - 21}$.	24. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 5x - 3}{3x^2 + 11x + 6}$.
25. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 + x - 4}{5 - 3x - 2x^2}$.	26. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 - x - 7}{3x^2 + x - 2}$.	27. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{5x^2 - 16x + 3}{x^2 - 4x + 3}$.
28. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 9x + 9}{x^2 - 7x + 12}$.	29. $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 + 15x + 25}{10 - 3x - x^2}$.	30. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 7x + 3}{10x - x^2 - 21}$.

Задача 2

Если в числителе или знаменателе стоят иррациональные выражения, то для получения сомножителя $x - x_0$ умножим числитель и знаменатель на сопряженные им выражения.

Пример 2

Вычислить $A = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{6-x} - 1}{3 - \sqrt{4+x}} = \left(\frac{0}{0} \right)$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{6-x} - 1}{3 - \sqrt{4+x}} &= \frac{[(\sqrt{6-x} - 1)(\sqrt{6-x} + 1)](3 + \sqrt{4+x})}{(\sqrt{6-x} + 1)[(3 - \sqrt{4+x})(3 + \sqrt{4+x})]} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{[(\sqrt{6-x})^2 - 1^2](3 + \sqrt{4+x})}{(\sqrt{6-x} + 1)[(\sqrt{4+x})^2]} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 5} \frac{(5-x)(3 + \sqrt{4+x})}{(\sqrt{6-x} + 1)(5-x)} = \lim_{x \rightarrow 5} \frac{3 + \sqrt{4+x}}{\sqrt{6-x} + 1} = \frac{6}{2} = 3. \end{aligned}$$

Контрольные варианты к задаче 2

Вычислить пределы функций:

1. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x+3} - 2}$
2. $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2x+3} - 1}{\sqrt{5+x} - 2}$
3. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x+3} - 3}{\sqrt{x-2} - 1}$
4. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x-2} - 2}{\sqrt{2x+5} - 3}$
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+4} - 2}{\sqrt{x^2+16} - 4}$
6. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{3 - \sqrt{x+11}}{2 - \sqrt{x+6}}$
7. $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{\sqrt{9+x} - 2}{\sqrt{4-x} - 3}$
8. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{5 - \sqrt{22-x}}{1 - \sqrt{4+x}}$
9. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2 - \sqrt{5-x}}{3 - \sqrt{8+x}}$
10. $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{3 - \sqrt{x^2-7}}{2 - \sqrt{8+x}}$
11. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{1 - \sqrt{x-3}}{2 - \sqrt{x}}$
12. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{x+5} - 3}$
13. $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{2x+7} - 5}{\sqrt{x} - 3}$
14. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+9} - 3}{\sqrt{x^2+25} - 5}$
15. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{x+4} - 1}{\sqrt{3-2x} - 3}$
16. $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{2x+7} - 5}{4 - \sqrt{x+7}}$
17. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x-2} - \sqrt{2}}$
18. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2 - \sqrt{x}}{\sqrt{6x+1} - 5}$
19. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x+3} - 3}{2 - \sqrt{x+1}}$
20. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x} - \sqrt{1-2x}}{x+x^2}$
21. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x+2} - \sqrt{8}}{\sqrt{2x+5} - 3}$
22. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x^2} - 1}{x^2+x^3}$
23. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{\sqrt{1-x} - 2}{4 - \sqrt{1-5x}}$
24. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x-2} - 2}{\sqrt{x+1} - 2}$
25. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{1+3x} - \sqrt{2x+6}}{x^2-5x}$
26. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2+9} - 3}{\sqrt{4-x^2} - 2}$
27. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x+3} - 2}$
28. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3-x} - \sqrt{3+x}}{5z+x^2}$
29. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+6} - 2}{x^2-4}$
30. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{2x+3} - 3}{\sqrt{3x+7} - 4}$

З а д а ч а 3

Пример 3

Вычислить $A = \lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 + 11x + 5}{3 - \sqrt{14+x}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -5} \frac{2x^2 + 11x + 5}{3 - \sqrt{14+x}} &= \lim_{x \rightarrow -5} \frac{(x+5)(2x+1)(3+\sqrt{14+x})}{(3-\sqrt{14+x})(3+\sqrt{14+x})} = \lim_{x \rightarrow -5} \frac{(x+5)(2x+1)(3+\sqrt{14+x})}{9 - (\sqrt{14+x})^2} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -5} \frac{\cancel{(x+5)}(2x+1)(3+\sqrt{14+x})}{-\cancel{(x+5)}} = \lim_{x \rightarrow -5} [-(2x+1)(3+\sqrt{14+x})] = \\ &= -(-10+1)(3+\sqrt{14-5}) = 9 \cdot 6 = 54. \end{aligned}$$

Контрольные варианты к задаче 3

Вычислить пределы функций:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sqrt{5+x} - \sqrt{5-x}}$.
2. $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{2x+7} - 5}{2x^2 - 19x + 9}$.
3. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 - 7x - 4}{\sqrt{2x+1} - 3}$.
4. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{6x+1} - 5}{4 - \sqrt{x+12}}$.
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+2} - 2}{x-2} - 1$.
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-2x+3x^2} - (1+x)}{\sqrt[3]{x}}$.
7. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}$.
8. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+13} - 2\sqrt{x+1}}{x^2 - 9}$.
9. $\lim_{x \rightarrow 8} \frac{\sqrt{9+2x} - 5}{2x^2 - 15x - 8}$.
10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1-2x+x^2} - (1+x)}{x}$.
11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{7x^2 - x}$.
12. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2 - \sqrt{x+1}}{\sqrt{3+x} - \sqrt{2x}}$.
13. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^3 - 64}{\sqrt{4+x} - \sqrt{2x}}$.
14. $\lim_{x \rightarrow -8} \frac{10 - x - 6\sqrt{1-x}}{2x^2 + 17x + 8}$.
15. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{\sqrt{1-4x} - 3}$.
16. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 6x + 8}$.
17. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{\sqrt{4x+1} - 3}$.
18. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^3 + 27}{4 - \sqrt{1-5x}}$.
19. $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{2+x} - 3}{2x^2 - 13x - 7}$.
20. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1+2x} - 3}{\sqrt{6x+1} - 5}$.
21. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{4 - \sqrt{x+12}}{2x^2 - 7x - 4}$.
22. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x-2} - 2}{x^2 - 5x + 6}$.
23. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{9-x} - 3}{\sqrt{x+4} - 2}$.
24. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{5 - \sqrt{x^2+9}}{\sqrt{2x+1} - 3}$.
25. $\lim_{x \rightarrow -5} \frac{\sqrt{9+x} - 2}{x^2 + 5x}$.
26. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{2x+5} - 3}{2x^2 + 3x - 14}$.
27. $\lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{2x+7} - 5}{\sqrt{x+16} - 5}$.
28. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{5 - \sqrt{22-x}}{\sqrt{1-x} - 2}$.
29. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^2 + 3x - 2}{3 - \sqrt{x+11}}$.
30. $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{2x^2 + 9x + 4}{3 - \sqrt{x^2 - 7}}$.

Задача 4

Если при $x \rightarrow x_0$ $f(x) \rightarrow \infty$ и $q(x) \rightarrow \infty$, то отношение $\frac{f(x)}{q(x)}$ представляет собой неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$. В этом случае рекомендуется числитель и знаменатель разделить почленно на старшую степень переменной x .

Пример 4

Вычислить предел $A = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x - 7 - 2x^2}{7x + x^3} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right)$.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x - 7 - 2x^2}{7x + x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4x - 7 - 2x^2}{x^3}}{\frac{7x + x^3}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{4}{x^2} - \frac{7}{x^3} - 2}{\frac{7}{x^2} + 1} = \frac{0 - 0 - 2}{0 + 1} = -2.$$

Контрольные варианты к задаче 4

Вычислить пределы функций:

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^5 + 7x^3 - 4}{6x^5 - 3x^2 + 2}$
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + 3x^2 - x^5}{2x + 3x^2 - 3x^5}$
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3x + 1}{2x^3 + x^2 - 2}$
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x + 1}{3x^3 + x^2 + 4x}$
5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x + 2x^3 - 5x^4}{2x^5 + 5x^2 - 3}$
6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^5 - 2x + 1}{2x^5 + 4x + 5}$
6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 - 7x^2 + 5x^3}{2 + 2x - x^3}$
8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 + 5x^2 - 3x^5}{8 - 6x - x^5}$
9. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 7x + 1}{3x^4 + x + 3}$
10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - 2x^2 + 5x^4}{2 + 3x^2 + x^4}$
11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 - 2x - 3x^4}{x^5 + x + 3}$
12. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 2x^2 + 3}{5x^5 - x + 4}$
13. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 7x^2 - 2}{6x^3 - 4x + 3}$
14. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 - 8x + 1}{4x^2 + x + 1}$
15. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 4x - 5}{6x^2 - 2x + 1}$
16. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^5 - 3x^2 + 8}{2x^5 + 2x - 1}$
17. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - x^3 + 5}{x^2 + x - 4}$
18. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^3 - 2x + 5}{4 - x^4}$
19. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 - x - x^2}{2x^3 + x + 1}$
20. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^4 - 4x^2 + 3}{x^4 + 1}$
21. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - 5x + 1}{6x^2 + 3x - 4}$
22. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^6 - x^3 + 2x}{2x^6 - 1}$

$$23. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^5 - x^2 + x}{x^5 - 2}.$$

$$24. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - 3x + 1}{7x^4 - x + 5}.$$

$$25. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^4 - 2x^3 + 2}{x^4 + 3}.$$

$$26. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^5 + 6x - 5}{x^5 + 2x^2 - 3}.$$

$$27. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-2x^5 - 2x^3 + 4}{7x^5 + 3x^2 + 2}.$$

$$28. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^5 - 3x^2 + 2}{3x^5 + 4x + 1}.$$

$$29. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 + 5x^2 - 3x^5}{2x^5 + 4x^4 - 1}.$$

$$30. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 + x^2 + 4x}{7 - 7x^3 + 2x}.$$

Задача 5

Пример 5

Вычислить предел $A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+7)^3 - (n-1)^3}{(3n-1)^2 - (5n+1)^2} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right).$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+7)^3 - (n-1)^3}{(3n-1)^2 - (5n+1)^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^3 + 3n^2 \cdot 7 + 3n \cdot 7^2 + 7^3) - (n^3 - 3n^2 + 3n - 1)}{(9n^2 - 6n + 1) - (25n^2 + 10n + 1)} =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3 + 21n^2 + 147n + 343 - n^3 + 3n^2 - 3n + 1}{9n^2 - 6n + 1 - 25n^2 - 10n - 1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{24n^2 + 144n + 344}{-16n^2 - 16n} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right).$$

Здесь старшая степень при n – вторая и n^2 - степень, поэтому

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{24n^2 + 144n + 344}{n^2}}{\frac{-16n^2 - 16n}{n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{24 + \frac{144}{n} + \frac{344}{n^2}}{-16 - \frac{16}{n}} = \frac{24 + 0 + 0}{-16 - 0} = \frac{24}{-16} = -\frac{3}{2}.$$

Контрольные варианты к задаче 5

Вычислить пределы числовых последовательностей:

$$1. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3-n)^2 + (3+n)^2}{(3-n)^2 - (3+n)^2}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3-n)^4 - (2-n)^4}{(1-n)^4 - (1+n)^4}.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3-n)^4 - (2-n)^4}{(1-n)^3 - (1+n)^3}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1-n)^4 - (1+n)^4}{(1+n)^3 - (1-n)^3}.$$

$$5. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(6-n)^2 - (6+n)^2}{(6+n)^2 - (1-n)^2}.$$

$$6. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 - (n+1)^2}{(n-1)^3 - (n+1)^3}.$$

$$7. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(1+2n)^3 - 8n^3}{(1+2n)^2 + 4n^2}.$$

$$8. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3-4n)^2}{(n-3)^3 - (n+3)^3}.$$

$$9. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(3-n)^3}{(n+1)^2 - (n+1)^3}.$$

$$10. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 + (n-1)^2 - (n+2)^3}{(4-n)^3}.$$

- | | |
|---|---|
| 11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2(n+1)^3 - (n-2)^3}{n^2 + 2n - 3}$. | 12. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 + (n+2)^3}{(n+4)^3 + (n+5)^3}$. |
| 13. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(n+3)^3 + (n+4)^3}{(n+3)^4 - (n+4)^4}$. | 14. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4 - (n-1)^4}{(n+1)^3 + (n-1)^3}$. |
| 15. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8n^3 - 2n}{(n+1)^4 - (n-1)^4}$. | 16. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(n+6)^3 - (n+1)^3}{(2n+3)^2 + (n+4)^2}$. |
| 17. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2n-3)^3 - (n+5)^3}{(3n-1)^3 + (2n+3)^3}$. | 18. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(n+10)^2 + (3n+1)^2}{(n+6)^3 - (n+1)^3}$. |
| 19. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^3 + (3n+2)^3}{(2n+3)^3 - (n-7)^3}$. | 20. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(n+7)^3 - (n+2)^3}{(3n+2)^2 - (4n+1)^2}$. |
| 21. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2n+1)^3 - (2n+3)^3}{(2n+1)^2 + (2n+3)^2}$. | 22. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{n^3 - (n-1)^3}{(n+1)^4 - n^4}$. |
| 23. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^4 - (n-2)^4}{(n+5)^2 + (n-5)^2}$. | 24. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^4 - (n-1)^4}{(n+1)^3 + (n-1)^3}$. |
| 25. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 - (n-1)^3}{(n+1)^2 - (n-1)^2}$. | 26. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 - (n-1)^3}{(n+1)^2 + (n-1)^2}$. |
| 27. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^3 + (n-2)^3}{n^4 + 2n^2 - 1}$. | 28. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 + (n-1)^3}{n^3 - 3n}$. |
| 29. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 + (n-1)^3}{n^3 + 1}$. | 30. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(n+2)^2 - (n-2)^2}{(n+3)^2}$. |

Задача 6

Если при $x \rightarrow x_0$, $f(x) \rightarrow +\infty$ и $q(x) \rightarrow +\infty$, то разность $f(x) - q(x)$ представляет собой неопределенность $\infty - \infty$. Чтобы раскрыть такую неопределенность, надо привести её к виду $\frac{0}{0}$ или $\frac{\infty}{\infty}$.

Пример 6

Вычислить предел $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x-3} - \sqrt{2x+1}) = (\infty - \infty)$.

Умножим и разделим на сопряженное выражение $\sqrt{4x-3} + \sqrt{2x+1}$, тогда

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{4x-3} - \sqrt{2x+1})(\sqrt{4x-3} + \sqrt{2x+1})}{\sqrt{4x-3} + \sqrt{2x+1}} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{4x-3})^2 - (\sqrt{2x+1})^2}{\sqrt{4x-3} + \sqrt{2x+1}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x - 4}{\sqrt{4x-3} + \sqrt{2x+1}} = \frac{\infty}{\infty}. \end{aligned}$$

Здесь старшая степень x - первая, поэтому

$$\begin{aligned}
A &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x-4}{x}}{\frac{\sqrt{4x-3} + \sqrt{2x+1}}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{4}{x}}{\sqrt{4x-3} + \sqrt{2x+1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{4}{x}}{\sqrt{\frac{4x-3}{x^2}} + \sqrt{\frac{2x+1}{x^2}}} = \\
&= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 - \frac{4}{x}}{\sqrt{\frac{4}{x} - \frac{3}{x^2}} + \sqrt{\frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}}} = \frac{2}{0} = \infty.
\end{aligned}$$

Контрольные варианты к задаче 6

Вычислить пределы функции:

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+3} - \sqrt{x+2})$.
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+x} - \sqrt{x^2-5x})$.
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x^2+1} - 3x)$.
4. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{2x^2-3} - 5x)$.
5. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+12x} - \sqrt{9x^2+18x-5})$.
6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+6x-3} - x)$.
7. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{x^2+2x})$.
8. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{2x^2-3} - \sqrt{x^2+1})$.
9. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^6+3x^2+1} - x^3)$.
10. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+8x+9} - x)$.
11. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{y^2-2y} - -y)$.
12. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x-1} - \sqrt{2x+1})$.
13. $\lim_{u \rightarrow \infty} (\sqrt{u^2-4} - \sqrt{u^2+4u})$.
14. $\lim_{y \rightarrow +\infty} (\sqrt{(y+2)(y+6)} - y)$.
15. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{4x^2+8x-7} - \sqrt{x^2+4x})$.
16. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x^2+4x} - 3x)$.
17. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{4x+x^2} - x)$.
18. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \sqrt{4x^2+3x})$.
19. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - \sqrt{3x^2+2x+1})$.
20. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-3x})$.
21. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+10x+9} - x)$.
22. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{2x+5} - \sqrt{2x+7})$.
23. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+2x} - \sqrt{x^2-9x})$.
24. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{3x^2-2} - 5x)$.
25. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2-4x+1} - x)$.
26. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{2x^2+5} - \sqrt{x^2+2})$.
27. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2+6x+1} - \sqrt{3x^2+1})$.
28. $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{2x^2+1} - \sqrt{3x^2-1})$.

$$29. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{7x-1} - \sqrt{2x-3}).$$

$$30. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{8x^2+1} - 2x).$$

З а д а ч а 7

Две бесконечно малые функции $\alpha = \alpha(x)$ и $\beta = \beta(x)$ при $x \rightarrow x_0$ или $x \rightarrow \infty$ называются эквивалентными, если предел их отношения равен единице. Эквивалентность бесконечно малых функций записывается в виде $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

Таким образом, если $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \rightarrow \infty}} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$, то $\alpha(x) \sim \beta(x)$.

Таблица эквивалентных бесконечно малых функций

$$1. \lim_{\alpha(x) \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha(x)}{\alpha(x)} = 1 \Rightarrow \sin \alpha(x) \sim \alpha(x) \text{ при } \alpha(x) \rightarrow 0.$$

$$2. \lim_{\alpha(x) \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} \alpha(x)}{\alpha(x)} = 1 \Rightarrow \operatorname{tg} \alpha(x) \sim \alpha(x) \text{ при } \alpha(x) \rightarrow 0.$$

$$3. \lim_{\alpha(x) \rightarrow 0} \frac{\arcsin \alpha(x)}{\alpha(x)} = 1 \Rightarrow \arcsin \alpha(x) \sim \alpha(x) \text{ при } \alpha(x) \rightarrow 0$$

$$4. \lim_{\alpha(x) \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} \alpha(x)}{\alpha(x)} = 1 \Rightarrow \operatorname{arc} \operatorname{tg} \alpha(x) \sim \alpha(x) \text{ при } \alpha(x) \rightarrow 0.$$

$$5. \lim_{\alpha(x) \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \alpha(x))}{\alpha(x)} = 1 \Rightarrow \ln(1 + \alpha(x)) \sim \alpha(x) \text{ при } \alpha(x) \rightarrow 0.$$

$$6. \lim_{\alpha(x) \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha(x)} - 1}{\alpha(x)} = 1 \Rightarrow e^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x) \text{ при } \alpha(x) \rightarrow 0.$$

$$7. \lim_{\alpha(x) \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \alpha(x)} - 1}{\frac{1}{2}\alpha(x)} = 1 \Rightarrow \sqrt{1 + \alpha(x)} - 1 \sim \frac{1}{2}\alpha(x) \text{ при } \alpha(x) \rightarrow 0.$$

Теорема. Предел отношения двух бесконечно малых не изменится, если одну или обе бесконечно малые заменить им эквивалентными, т. е. если $\alpha_1(x) \sim \alpha_2(x)$ и $\beta_1(x) \sim \beta_2(x)$, то

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\alpha_2(x)}{\beta_2(x)}.$$

Заметим, что с помощью эквивалентных бесконечно малых раскрывают неопределенность $\frac{0}{0}$.

Пример 7

Вычислить предел $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 18x}{\operatorname{tg} 13x} = \left(\frac{0}{0} \right)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 18x}{\operatorname{tg} 13x} = \left| \frac{\sin 18x \sim 18x}{\operatorname{tg} 13x \sim 13x} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{18x}{13x} = \frac{18}{13}.$$

Пример 8

Вычислить предел $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg} 3x} - 1}{\ln(1 + 4x)} = \left(\frac{0}{0} \right)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg} 3x} - 1}{\ln(1 + 4x)} = \left| \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg} 3x} - 1 \sim \frac{1}{2} \operatorname{tg} 3x \sim \frac{1}{2} \cdot 3x}{\ln(1 + 4x) \sim 4x} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{3}{2}x}{4x} = \frac{3}{8}.$$

Пример 9

Вычислить предел $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos^3 2x}{\arcsin^2 7x} = \left(\frac{0}{0} \right)$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos^3 2x}{\arcsin^2 7x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x(1 - \cos^2 2x)}{\arcsin^2 7x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x \cdot \sin^2 2x}{\arcsin^2 7x} = \\ &= \left| \frac{\sin^2 2x \sim (2x)^2}{\arcsin^2 7x \sim (7x)^2} \right| = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x \cdot 4x^2}{49x^2} = \frac{4}{49}. \end{aligned}$$

Контрольные варианты к задаче 7

Вычислить пределы функций:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{x \operatorname{tg} 2x}$.

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos 2x}{9x^2}$.

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{tg} x}{1 - \cos x}$.

4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 8x}{\sin^2 5x}$.

5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x^2}{x^2 \sin x^2}$.

6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos 3x}{x^2}$.

7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{x^2}$.

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 3x}{\operatorname{tg}^2 2x}$.

9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{tg} 3x}{\cos x - \cos^3 x}$.

10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}^2 3x}{1 - \cos 4x}$.

$$11. \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{x\sqrt{1-\cos 8x}}{\sin^2 4x}.$$

$$12. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 4x}{1-\cos 2x}.$$

$$13. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^3 x}{x \sin 3x}.$$

$$14. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 3x}{x^2}.$$

$$15. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x \sin x}.$$

$$16. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{tg} x}{1-\cos 4x}.$$

$$17. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - 1}{x \operatorname{tg} 2x}.$$

$$18. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 6x}{1-\cos 4x}.$$

$$19. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 4x}{x \sin x}.$$

$$20. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 8x}{1-\cos 4x}.$$

$$21. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos 2x}{x^2}.$$

$$22. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^5 x}{x \sin 3x}.$$

$$23. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 4x}{x \operatorname{tg} 3x}.$$

$$24. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 6x}{x \operatorname{tg} 4x}.$$

$$25. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x^2}{\arcsin^4 3x}.$$

$$26. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 5x}{2x \operatorname{tg} 2x}.$$

$$27. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 7x}{\sin^2 5x}.$$

$$28. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \operatorname{tg} 2x}{1-\cos x}.$$

$$29. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 2x - \cos 3x}{\arcsin^2 3x}.$$

$$30. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos 3x}{\sin^2 2x}.$$

Задача 8

Пример 10

Вычислить предел $A = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+7} - \sqrt{7}}{\operatorname{arctg} 15x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2x+7} - \sqrt{7}}{\operatorname{arctg} 15x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{2x+7} - \sqrt{7})(\sqrt{2x+7} + \sqrt{7})}{(\sqrt{2x+7} + \sqrt{7}) \cdot \operatorname{arctg} 15x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{2x+7})^2 - (\sqrt{7})^2}{(\sqrt{2x+7} + \sqrt{7}) \cdot \operatorname{arctg} 15x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{(\sqrt{2x+7} + \sqrt{7}) \cdot \operatorname{arctg} 15x} = |\operatorname{arctg} 15x \sim 15x| = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{(\sqrt{2x+7} + \sqrt{7}) \cdot 15x} = \frac{2}{2\sqrt{7} \cdot 15} = \frac{1}{15\sqrt{7}}. \end{aligned}$$

Контрольные варианты к задаче 8

Вычислить пределы функций:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\sqrt{x+16}-4}$.
2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sqrt{x+4}-2}$.
3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x \cdot \sin x}-1}{3x^2}$.
4. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3x+2}-\sqrt{2}}{\operatorname{tg} 3x}$.
5. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+2}-\sqrt{2})\sin \frac{x}{2}}{x^2}$.
6. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\sqrt{x+8}-\sqrt{8}}$.
7. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 3x - \cos 5x}{\sqrt{x^2+3}-\sqrt{3}}$.
8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\operatorname{arctg} 3x}$.
9. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4}-2}{\sin 3x}$.
10. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\sqrt{1-x^2}}{\cos x - \cos^3 x}$.
11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{x}{2}}{5-\sqrt{x+25}}$.
12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}{\operatorname{tg} \frac{x}{4}}$.
13. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}$.
14. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} 5x}{\sqrt{x+4}-2}$.
15. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos^5 x}{\sqrt{9+x^2}-3}$.
16. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2-2\cos x}{x(\sqrt{1+x}-1)}$.
17. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}$.
18. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{8+x}-\sqrt{8})\sin 2x}{x^2}$.
19. $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\alpha^2}{(\sqrt{9-\alpha}-3)\operatorname{tg} 3\alpha}$.
20. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+9}-3)x}{\sin^2 3x}$.
21. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{\sqrt{x+5}-\sqrt{5}}$.
22. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{\sin 3x}$.
23. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 7x}{\sqrt{x+49}-7}$.
24. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arcsin} 7x}{\sqrt{x+4}-2}$.
25. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+2}-\sqrt{2})\operatorname{tg} \frac{x}{2}}{x^2}$.
26. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 13x}{\sqrt{2x+5}-\sqrt{5}}$.
27. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3x+2}-\sqrt{2}}{\operatorname{tg} 3x}$.
28. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2+x \sin x}-\sqrt{2}}{2x^2}$.
29. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{\sqrt{x+25}-5}$.
30. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 3x}{\sqrt{x+9}-3}$.

Задача 9

Пусть нужно найти $\lim_{x \rightarrow x_0} [f(x)]^{\varphi(x)}$. Если при этом при $x \rightarrow x_0$ $f(x) \rightarrow 1$ и $\varphi(x) \rightarrow \infty$, то имеем неопределенность 1^∞ ; если $f(x) \rightarrow \infty$ и $\varphi(x) \rightarrow 0$, то имеем неопределенность ∞^0 ; $f(x) \rightarrow 0$ и $\varphi(x) \rightarrow 0$, то имеем неопределенность 0^0 . Эти неопределенности раскрываются с помощью **второго замечательного предела**.

$$1. \lim_{v \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{v}\right)^v = e, \quad e = 2,71828\dots \quad \text{или} \quad 2. \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^\alpha = e.$$

Пример 11

Вычислить предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+5}{3x+1}\right)^x$.

Здесь $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x+5}{3x+1} = \infty = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{5}{x}}{3 + \frac{1}{x}} = 1$, поэтому получим

неопределенность

вида 1^∞ . Используем первую форму второго замечательного предела. Для этого преобразуем основание к виду $1 + \frac{1}{v}$ следующим образом:

$$\frac{3x+5}{3x+1} = 1 + \left(\frac{3x+5}{3x+1} - 1\right) = 1 + \frac{3x+5-3x-1}{3x+1} = 1 + \frac{4}{3x+1} = 1 + \frac{1}{\frac{3x+1}{4}}.$$

Тогда
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x+5}{3x+1}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\frac{3x+1}{4}}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{3x+1}{4}}\right)^{\frac{3x+1}{4}}\right]^{\frac{4}{3x+1} \cdot x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{\frac{3x+1}{4}}\right)^{\frac{3x+1}{4}}\right]^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{3x+1}} = e^{\frac{4}{3}},$$

т. к. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x}{3x+1} = \frac{4}{3}$, а предел основания равен e .

Контрольные варианты к задаче 9

Вычислить пределы функций:

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 5}{x^2 + 1} \right)^{6-4x^2}$.
2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + 8}{2x^2 + 3x - 1} \right)^{x^2-4}$.
3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 + 2}{x^3 + 1} \right)^{6x^3+4}$.
4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + 3}{x - 1} \right)^{x+2}$.
5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x - 1}{5x - 2} \right)^{3x}$.
6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2 + 4x - 5}{2x^2 - 8} \right)^{2x}$.
7. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 4}{x^2 + 1} \right)^{3-x^2}$.
8. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x - 7}{2x - 3} \right)^{4x+1}$.
9. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x - 1}{3x - 4} \right)^{2x}$.
10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x + 1}{4x - 3} \right)^{1-2x}$.
11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x - 2}{5x + 3} \right)^{3-2x}$.
12. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x - 2}{3x + 4} \right)^x$.
13. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x - 2}{x + 3} \right)^{4-x}$.
14. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x - 5}{4x - 3} \right)^{4x+1}$.
15. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x + 3}{2x + 5} \right)^{1-3x}$.
16. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + 1}{x + 4} \right)^{1-2x}$.
17. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{4x + 5}{4x + 1} \right)^{2x-3}$.
18. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x - 4}{3x - 2} \right)^{6x+1}$.
19. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x - 3}{2x + 1} \right)^{4-x}$.
20. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x + 7}{5x - 3} \right)^{2x}$.
21. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x - 1}{3x + 2} \right)^{2x-4}$.
22. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x - 1}{2x + 5} \right)^{3x-2}$.
23. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7x - 1}{7x + 5} \right)^{4-x}$.
24. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x - 3}{3x - 1} \right)^{1-4x}$.
25. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{5x - 1}{5x + 7} \right)^{3x+1}$.
26. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6 - x}{7 - x} \right)^{3x}$.
27. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{7x + 5}{7x - 1} \right)^{3-x}$.
28. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 - 1}{x^3 + 4} \right)^{5x^3+1}$.
29. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x^2 + 8}{3x^2 - 1} \right)^{x^2-4}$.
30. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x + 4}{3x - 5} \right)^{7x+1}$.