Глава 1. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

Теория рядов широко используется в теоретических исследованиях различных вопросов естествознания и в приближенных вычислениях. С помощью рядов вычисляются значения различных функций, интегралов, решаются дифференциальные уравнения и т.п., в частности, программы приближенного вычисления значений элементарных функций и решения многих стандартных задач, заложения в память микроЭВМ (включая и микрокалькуляторы), основанные на применении теории рядов [1,2].

§1. Числовые ряды. Основные понятия и свойства

Определение 1. Числовой ряд есть алгебраическая сумма бесконечного числа слагаемых. Всякий ряд имеет, таким образом, вид

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n + a_{n+1} + \ldots . \qquad (1.1)$$

Причем написанное выражение не имеет последнего члена, но за каждым из слагаемых имеется следующее слагаемое.

Для сокращенного обозначения рядов используется знак суммирования $\sum$, а именно:

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n . \qquad (1.2)$$

Определение 2. Числа a_1, a_2,..., a_n,... называются членами ряда (1.2); a_n называется ***общим членом ряда***.

Рассмотрим некоторые примеры рядов. В курсе математики средней школы мы уже встречались с понятием ряда, который получается при вычислении суммы членов геометрической прогрессии:

$$a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} aq^n . \qquad (1.3)$$

Определение 3. Ряд (1.3) называется ***рядом геометрической прогрессии***.

Если, например, $a = 1$, $q = \dfrac{1}{5}$, то получим ряд

$$1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{5^n} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5^n} . \qquad (1.4)$$

Определение 4. Ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots \qquad (1.5)$$

называется ***гармоническим рядом***.

Определение 5. Сумма первых n членов ряда называется ***частичной суммой ряда.***

Если частные суммы ряда становятся все более и более точными приближениями некоторого числа, то ряд мы назовем сходящимся. То есть, если существует число S, для которого S_1, S_2,..., S_n,...являются приближенными значениями, то S называют ***суммой ряда*** и пишут

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots = S. \tag{1.6}$$

Определение 6. Ряд (4.1) называется сходящимся, если последовательность его частных сумм (4.6) сходится, т.е. если существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S. \tag{1.7}$$

Если $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует или $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \infty$, то ряд называется ***расходящимся*** и ему не приписывается никакое числовое значение [3].

Пример 1. Исследуем на сходимость ряд геометрической прогрессии (1.3).

Решение.

$$S_n = a + aq + aq^2 + \ldots + aq^n = \frac{a\left(1-q^{n+1}\right)}{1-q} =$$

$$= \frac{a - aq^{n+1}}{1-q} = \frac{a}{1-q} - \frac{aq^{n+1}}{1-q}. \tag{1.8}$$

Рассмотрим q, удовлетворяющее условию $|q|<1$.

Тогда

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-q} - \frac{aq^{n+1}}{1-q}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{a}{1-q} - \lim_{n\to\infty}\frac{aq^{n+1}}{1-q} =$$

$$= \frac{a}{1-q} - \frac{a}{1-q}\lim_{n\to\infty} q^{n+1} = \frac{a}{1-q} - \frac{a}{1-q}\cdot 0 = \frac{a}{1-q}.$$

Итак, при $|q|<1$ ряд (1.3) сходится и его сумма S равна $\dfrac{a}{1-q}$. В частности, сумма ряда (1.4) равна $S = \dfrac{1}{1-\frac{1}{5}} = \dfrac{5}{4}$.

Если $|q| \geq 1$, то ряд (1.3) сходится лишь при $a=0$. В этом случае $S_n = 0$ и, следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 0$. Если $a \neq 0$ и $|q| \geq 1$, то из (1.8) следует, что

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \frac{a\left(1-q^{n+1}\right)}{1-q} = \frac{a}{1-q} \lim_{n\to\infty}\left(1-q^{n+1}\right) = \frac{a}{1-q}\cdot\infty = \infty,$$ т.е. ряд (1.3) расходится.

Если $a \neq 0$ и $|q| = 1$,то получим при $q = 1$ ряд

$$a + a + \ldots + a + \ldots, \qquad (1.9)$$

а при $q = -1$ ряд

$$a - a + a - a + \ldots + (-1)^{n+1} a + \ldots . \qquad (1.10)$$

Для ряда (1.9) $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} n \cdot a = a \lim\limits_{n\to\infty} n = a\cdot\infty = \infty$, т.е. ряд является расходящимся.

Для ряда (1.10) $S_{2n} = 0$, $S_{2n-1} = a$, следовательно, последовательность частичных сумм a, 0, a, 0,... не имеет предела.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд

$$\ln 2 + \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{4}{3} + \ln\frac{5}{4} + \ldots + \ln\frac{n+1}{n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \ln\frac{n+1}{n}.$$

Решение. Для частных сумм данного ряда имеем

$$S_n = \ln 2 + \ln\frac{3}{2} + \ln\frac{4}{3} + \ln\frac{5}{4} + \ldots + \ln\frac{n+1}{n} + \ldots =$$
$$= \ln\frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots \cdot n \cdot (n+1)}{1\cdot 2\cdot 3 \cdot \ldots \cdot n} = \ln(n+1).$$

Следовательно, $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \ln(n+1) = \infty$.

Согласно определению 6 ряд является расходящимся.

§2. Свойства сходящихся рядов, подобные свойствам сумм

Рассмотрим свойства сходящихся рядов.

Теорема 1. Если ряд (1.2) сходится и его сумма равна S, то для произвольного числа c ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} ca_n = ca_1 + ca_2 + \ldots + ca_n + \ldots . \qquad (1.11)$$

Так же сходится и его сумма, равная cS. Если же ряд (1.2) расходится и $c \neq 0$, то и ряд (1.11) расходится.

Теорема 2. Если ряды

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \qquad (1.13)$$

и $$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n + \ldots \tag{1.14}$$

сходятся и их суммы равны соответственно S' и S'', то и каждый из двух рядов

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) = (a_1 \pm b_1) + (a_2 \pm b_2) + \ldots + (a_n \pm b_n) + \ldots \tag{1.15}$$

сходится и сумма каждого равна соответственно $S' \pm S''$.

Другими словами, ***сходящиеся ряды можно почленно складывать и вычитать***.

Теорема 3. Если в ряде (1.1) добавить или отбросить конечное число членов, то полученный ряд

$$a_1' + a_2' + \ldots + a_n' + \ldots \tag{1.16}$$

сходится или расходится одновременно с данным. В случае сходимости рассматриваемых рядов их суммы отличаются на сумму добавленных или отброшенных членов.

Теорема 4. Если ряд (1.2) сходится, то его общий член a_n стремится к нулю.

Следствие 1. ***Если $n-$й член стремится к нулю, еще не следует, что ряд сходится, ряд может и расходиться***.

Пример 1. Ряд $\frac{2}{4} + \frac{4}{7} + \frac{6}{10} + \ldots + \frac{2n}{3n+1} + \ldots$

расходится, так как

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n}{3n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3+\frac{1}{n}}\right) = \frac{2}{3} \neq 0.$$

При вычислении предела воспользовались тем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$.

§3. Признаки сходимости рядов с неотрицательными членами.

Теорема 1. Признак Даламбера (Жан Лерон Даламбер (1717 – 1783) – французский математик). Пусть дан ряд (1.19) с положительными членами. Допустим, что

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$$

существует и

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\rho. \qquad (1.21)$$

Тогда:

если $\rho<1$, то ряд (4.19) сходится;

если $\rho>1$, то ряд (4.19) расходится;

если ρ = 1, то на вопрос о сходимости ответить нельзя.

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{2n-1}=3+\frac{6}{3}+\frac{9}{5}+\ldots+\frac{3n}{2n-1}+\ldots .$$

Решение. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n+1}{2(n+1)-1}:\frac{3n}{2n-1}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(3n+1)(2n-1)}{3n(2n+1)}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{6-\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}}{6+\frac{3}{n}}=\frac{6}{6}=1.$$

Следовательно, признак Даламбера не дает ответа на вопрос о сходимости данного ряда. Но так как

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n}{2n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{2-\frac{1}{n}}=\frac{3}{2}\neq 0$, т.е. не выполняется необходимое условие сходимости ряда, значит, предложенный ряд расходится.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)^2}=\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots .$$

Решение. Для данного ряда получаем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(n+3)^2}:\frac{1}{(n+2)^2}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+2)^2}{(n+3)^2}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2+4n+4}{n^2+6n+9}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{4}{n}+\frac{4}{n^2}}{1+\frac{6}{n}+\frac{9}{n^2}}=1.$$

Следовательно, признак Даламбера не дает ответа на вопрос о сходимости ряда. Сравним данный ряд с рядом

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\ldots+\frac{1}{n(n+2)}+\ldots,$$

который, как мы знаем (пример 3, §1), является сходящимся. Имеем

$$(n+2)^2 \le n(n+2), \text{ т.е. } \frac{1}{(n+2)^2}\le\frac{1}{n(n+2)},$$

отсюда по теореме 1 получаем сходимость исходного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+2)^2}=\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{(n+2)^2}+\ldots .$$

Пример 3. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)!}=\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}+\ldots+\frac{1}{(2n+1)!}.$$

Решение. Напомним,

$$(2n+1)!=(2\cdot 1+1)(2\cdot 2+1)(2\cdot 3+1)\ldots(2(n-1)+1)(2n+1)=$$
$$=3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots(2n-1)(2n+1).$$

Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{(2(n+1)+1)!};\frac{1}{(2n+1)!}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!}{(2n+3)!}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{3\cdot 5\cdot 7\cdot\ldots\cdot(2n+1)(2n+3)}=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)!}{(2n+1)!(2n+3)}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+3}=0<1.$$

Следовательно, по признаку Даламбера данный ряд сходится.

Пример 4. Исследовать на сходимость ряд

$$\frac{1}{5}+\frac{2}{5^2}+\frac{3}{5^3}+\ldots+\frac{n}{5^n}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5^n}.$$

Решение. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{5^{n+1}}:\frac{n}{5^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)5^n}{n\cdot 5^{n+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)5^n}{n\cdot 5^n\cdot 5}=$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)}{5n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{5}=\frac{1}{5}<1.$$

Следовательно, по признаку Даламбера данный ряд сходится.

Пример 5. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{8+6^n}=\frac{2}{14}+\frac{4}{44}+\ldots+\frac{2^n}{8+6^n}+\ldots\,.$$

Решение. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{n+1}}{8+6^{n+1}}:\frac{2^n}{8+6^n}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}\cdot\left(8+6^n\right)}{2^n\cdot\left(8+6^{n+1}\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\cdot2\cdot\left(8+6^n\right)}{2^n\cdot\left(8+6\cdot6^n\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot6^n\cdot\left(\frac{8}{6^n}+1\right)}{6^n\cdot\left(\frac{8}{6^n}+6\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot\left(\frac{8}{6^n}+1\right)}{\frac{8}{6^n}+6}=$$

$=\frac{2\cdot1}{6}=\frac{1}{3}<1$, следовательно, по признаку Даламбера ряд сходится. При решении воспользовались тем, что $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{8}{6^n}=0$.

Пример 6. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3}{n!}=\frac{5}{1}+\frac{7}{2!}+\frac{11}{3!}+\ldots+\frac{2^n+3}{n!}+\ldots\,.$$

Решение. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2^{n+1}+3}{(n+1)!}:\frac{2^n+3}{n!}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(2^{n+1}+3\right)\cdot n!}{\left(2^n+3\right)\cdot(n+1)!}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2^n\left(2+\frac{3}{2^n}\right)\cdot n!}{2^n\left(1+\frac{3}{2^n}\right)\left(1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n\cdot(n+1)\right)}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(2+\frac{3}{2^n}\cdot n!\right)}{\left(1+\frac{3}{2^n}\right)\cdot n!(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(2+\frac{3}{2^n}\right)}{\left(1+\frac{3}{2^n}\right)(n+1)}=$$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+\frac{3}{2^n}}{1+\frac{3}{2^n}}\cdot\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n+1}=\dfrac{2}{1}\cdot0=0<1$, следовательно, по признаку Даламбера ряд сходится.

Пример 7. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{10\cdot n^{20}}=\frac{5}{10}+\frac{5^2}{10\cdot 2^{20}}+\frac{5^2}{10\cdot 3^{20}}+\ldots+\frac{5^n}{10\cdot n^{20}}+\ldots .$$

Решение. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5^{n+1}}{10\cdot(n+1)^{20}}:\frac{5^n}{10\cdot(n+2)^{20}}\right)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}\cdot 10\cdot(n+2)^{20}}{5^n\cdot 10\cdot(n+2)^{20}}=\lim_{n\to\infty}\frac{5^n\cdot 5}{5^n}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{20}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}5\cdot\left(\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right)^{20}=5\cdot\left(\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right)^{20}=5\cdot 1^{20}=5>1,$$ следовательно, по признаку Даламбера ряд расходится.

Без доказательства сформулируем признак Коши, который целесообразно использовать, когда a_n является степенью некоторого выражения, например $a_n=\frac{2^n}{n^n}$, или $a_n=\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}$.

Сравнение рядов с прогрессиями приводит ещё и к другому признаку сходимости, принадлежащему Коши.

Теорема 2 (признак Коши). Пусть ряд (1.19) с неотрицательными членами. Допустим, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ существует и

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\rho. \tag{1.22}$$

Тогда:

если $\rho<1$, то ряд (1.19) сходится;

если $\rho>1$, то ряд (1.19) расходится;

если $\rho=1$, то ряд (1.19) может быть как сходящийся, так и расходящийся (см. приведенные ниже примеры 4 и 5) [6].

Пример 1. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{3n+2}\right)^n=\frac{1}{5}+\left(\frac{2}{7}\right)^2+\left(\frac{3}{11}\right)^2+\ldots+\left(\frac{n}{3n+2}\right)^n+\ldots .$$

Решение. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{3n+2}\right)^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3+\frac{2}{n}}=\frac{1}{3}<1,$$

следовательно, по признаку Коши ряд сходится.

Пример 2. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}=2+\left(\frac{3}{2}\right)^4+\left(\frac{4}{3}\right)^9+\ldots+\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}+\ldots .$$

Решение. Напомним, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\approx 2{,}7$. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\right]^{\frac{1}{n}}=$$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e>1$, следовательно, по признаку Коши ряд расходится.

Пример 3. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n^2-2n}{3n^2+1}\right)^{n^2}=\left(\frac{3}{28}\right)^9+\left(\frac{8}{49}\right)^{16}+\ldots+\left(\frac{n^2-2n}{3n^2+1}\right)^{n^2}+\ldots .$$

Решение. Имеем

$$\lim_{n\to\infty}=\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n^2-2n}{3n^2+1}\right)^{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{n^2-2n}{3n^2+1}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2-2n}{3n^2+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1-\frac{2}{n}}{3+\frac{1}{n^2}}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n=0<1,$$

следовательно, по признаку Коши ряд сходится.

Пример 4. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\left(1+\frac{1}{1}\right)+\left(1+\frac{1}{2}\right)^2+\ldots+\left(1+\frac{1}{n}\right)^n+\ldots .$$

Решение. Имеем

$$\lim_{n\to\infty} = \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1.$$

Следовательно, по признаку Коши данный ряд исследовать нельзя. С другой стороны, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \neq 0$, следовательно, не выполняется необходимое условие сходимости ряда, значит, данный ряд расходится.

§4. Знакопеременные и знакочередующиеся ряды

Определение 1. Ряды, содержащие как положительные, так и отрицательные члены, называются ***знакопеременными***.

Пусть дан знакопеременный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \,. \tag{1.23}$$

Если в ряде (1.23) имеется лишь конечное число отрицательных (или положительных) членов, то, отбрасывая их, получим ряд, члены которого имеют постоянный знак. По теореме 3 (§2) полученный и первоначальный ряды одновременно сходятся или расходятся. Поэтому будем рассматривать только ряды, которые среди своих членов содержат бесконечно много как положительных, так и отрицательных членов.

Рассмотрим ряд, состоящий из модулей всех членов ряда (1.23):

$$|a_1| + |a_2| + |a_3| + \ldots + |a_n| \ldots \tag{1.24}$$

Теорема 1. Если ряд (1.24) сходится, то сходится и ряд (1.23).

§5. Степенные ряды. Определение. Область сходимости

Определение 1. ***Степенным рядом*** называется выражение вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots +$$
$$+ a_n(x-x_0)^n + \ldots, \tag{2.7}$$

где $x -$ независимая переменная; $x_0 -$ фиксированное число; $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots -$ постоянные коэффициенты.

Если в ряде (2.7) положить $x = a$, где $a -$ некоторое число, то получим числовой ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (a-x_0)^n = a_0 + a_1(a-x_0) + a_2(a-x_0)^2 + \ldots +$$
$$+ a_n(a-x_0)^n + \ldots \,. \tag{2.8}$$

Определение 2. Степенной ряд (2.7) ***называется сходящимся в точке*** a, если числовой ряд (2.8), полученный из ряда (2.7) подстановкой $x = a$, является сходящимся рядом. При этом a называется ***точкой сходимости ряда*** (2.7).

Пример 1. Степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{5^n} = 1 + \frac{x+1}{5} + \frac{(x+1)^2}{5^2} + \ldots + \frac{(x+1)^n}{5^n} + \ldots \tag{2.9}$$

сходится в точке $x = 0$ и расходится в точке $x = 24$. Действительно, подставляя в (2.9) $x = 0$, получим числовой ряд $1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{5^2} + \ldots + \frac{1}{5^n} + \ldots$, который, как сумма членов ряда геометрической прогрессии со знаменателем $q = \frac{1}{5}$, сходится. Данный степенной ряд расходится в точке $x = 24$, так как числовой ряд $1 + 5 + 5^2 + \ldots + 5^n + \ldots$ является расходящимся, в силу невыполнения необходимого условия сходимости числового ряда.

Определение 3. Множество всех точек сходимости степенного ряда (2.7) называется ***областью сходимости ряда***.

Теорема 1 (о структуре области сходимости степенного ряда). Пусть существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \ell \,. \tag{2.12}$$

Тогда:

а) если $\ell \neq 0$ и $\ell \neq \infty$, то степенной ряд (2.10) сходится абсолютно в интервале $\left(-\frac{1}{\ell}; \frac{1}{\ell}\right)$, т.е. при $|x| < \frac{1}{\ell}$, и расходится вне этого интервала, т.е. при $|x| > \frac{1}{\ell}$;

б) если $\ell = 0$, то ряд (2.10) сходится при любом x;

в) если $\ell = \infty$, то ряд (2.10) сходится лишь при $x = 0$.

Теорема 2 (о структуре области сходимости степенного ряда). Пусть существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell \,. \tag{2.14}$$

Тогда:
а) если $\ell \neq 0$ и $\ell \neq \infty$, то степенной ряд (2.10) сходится абсолютно в интервале $\left(-\frac{1}{\ell};\frac{1}{\ell}\right)$, т.е. при $|x| < \frac{1}{\ell}$, и расходится вне этого интервала, т.е. при $|x| > \frac{1}{\ell}$;

Из теорем 2 и 3 следует, что в случае, когда $\ell \neq 0$ и $R \neq +\infty$, имеет место равенство $R = \frac{1}{\ell}$. Условимся считать $R = 0$ для рядов, расходящихся при всех $x \neq 0$, и $R = +\infty$ для рядов, сходящихся при любых x.

Из этого определения и теорем 2 и 3 следует

$$R = \frac{1}{\ell} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|, \tag{2.15}$$

или

$$R = \frac{1}{\ell} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}}. \tag{2.16}$$

Заметим, что вопрос о сходимости ряда (2.10) в точках $x = +R$ и $x = -R$ решается дополнительными исследованиями.

Пример 1. Найти область сходимости ряда

$$1 + x + 2!x^2 + 3!x^3 + \ldots + n!x^n + \ldots .$$

Решение. По формуле (2.15) имеем

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n\cdot(n+1)} =$$
$$= \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n!(n+1)} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0.$$

Данный ряд сходится только в точке $x = 0$.

Пример 2. Найти область сходимости ряда

$$\frac{x}{2+3} + \frac{x^2}{2^2+3^2} + \frac{x^3}{2^3+3^3} + \ldots + \frac{x^n}{2^n+3^n} + \ldots .$$

Решение.

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{2^n+3^n} : \frac{1}{2^{n+1}+3^{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}\right| =$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^{n+1}\cdot\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+1\right)}{3^n\cdot\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n}+1\right)}\right|=\lim_{n\to\infty}3\cdot\left|\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+1}{\left(\frac{2}{3}\right)^{n}+1}\right|=3,$$

т.к. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$.

Таким образом, $R=3$, ряд сходится абсолютно в интервале $(-3;3)$. Исследуем ряд на сходимость в концах интервала. При $x=3$ получаем числовой ряд

$$\frac{3}{2+3}+\frac{3^2}{2^2+3^2}+\frac{3^3}{2^3+3^3}+\ldots+\frac{3^n}{2^n+3^n}+\ldots .$$

Воспользуемся необходимым признаком сходимости рядов с положительными членами.

Рассмотрим

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{2^n+3^n}=\lim\frac{3^n}{2^n+3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{3^n\cdot\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n+1\right)}=$$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}=1$, значит, ряд расходится. При $x=-3$ приходим к ряду

$-\dfrac{3}{2+3}+\dfrac{3^2}{2^2+3^2}-\dfrac{3^3}{2^3+3^3}+\ldots+\dfrac{(-1)^n3^n}{2^n+3^n}+\ldots$, который по признаку Лейбница для знакочередующихся рядов расходится, т.к. не выполняется условие $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

Итак, окончательно получаем, областью сходимости будет промежуток $(-3;3)$.

Пример 3. Найти область сходимости ряда

$$\frac{x}{5}+\frac{x^2}{5^2}+\frac{x^3}{5^3}+\ldots+\frac{x^{2n-1}}{5^n}+\ldots .$$

Решение. К этому ряду формула (2.15) неприменима, так как отсутствуют четные степени переменной x, т.е. $a_{2k}=0$, $k=1,2,3,\ldots$.

Применяем непосредственно признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+1}}{5^{n+1}} : \frac{x^{2n-1}}{5^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+1}\cdot 5^n}{x^{2n-1}\cdot 5^{n+1}}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n-1}\cdot x^2\cdot 5^n}{x^{2n-1}\cdot 5^n\cdot 5}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{5}.$$

Данный ряд сходится для $\frac{x^2}{5}<1$, или $x^2<5$, т.е. $|x|<\sqrt{5}$, следовательно, $x\in\left(-\sqrt{5};\sqrt{5}\right)$. Проверим сходимость на концах интервала. При $x=\pm\sqrt{5}$ получаем ряды

$$\frac{\sqrt{5}}{5} \pm \frac{\left(\sqrt{5}\right)^3}{5^2} \pm \frac{\left(\sqrt{5}\right)^5}{5^3} \pm \ldots \pm \frac{\left(\sqrt{5}\right)^{2n-1}}{\left(\sqrt{5}\right)^n} \pm \ldots,$$

т.е.

$$\sqrt{5} \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \pm \ldots \pm \frac{1}{\sqrt{5}} \pm \ldots,$$

которые, очевидно, расходятся.

Следовательно, областью сходимости будет $\left(-\sqrt{5};\sqrt{5}\right)$.

Пример 4. Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{4n}\right)^n\cdot x^n = \left(\frac{1+1}{4}\right)\cdot x + \left(\frac{2+1}{4\cdot 2}\right)^2\cdot x^2 + \left(\frac{3+1}{4\cdot 3}\right)^3\cdot x^3 +$$

$$+\ldots+\left(\frac{n+1}{4n}\right)^n\cdot x^n+\ldots .$$

Решение. По формуле (2.16) имеем

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{a_n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{4n}\right)^n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{n+1}{4n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{4n}{n+1} = 4,$$

т.е. $R=4$, ряд сходится в интервале $(-4;4)$. Исследуем ряд на сходимость в концах интервала. При $x=4$ получаем числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{4n}\right)^n\cdot 4^n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^n\cdot 4^n}{4^n\cdot n^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n,$$

который исследуем с помощью необходимого признака сходимости рядов. Имеем

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \ell \neq 0$, т.е. общий член ряда не стремится к нулю и ряд расходится. При $x = -4$ получаем числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{4n}\right)^n \cdot (-4)^n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n \cdot \frac{(-1)^n 4^n}{4^n} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n,$$

который по признаку Лейбница для знакочередующихся рядов расходится, т.к. не выполняется условие $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Итак, окончательно имеем: областью сходимости будет промежуток $(-4;4)$.

Пример 5. Найти радиус сходимости ряда

$$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots .$$

Решение. К этому ряду неприменима формула (2.15), так как отсутствуют нечетные степени переменной x, т.е. $a_{2k+1} = 0$, $k = 0,1,2,\ldots$. Применяем непосредственно признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{(2n+2)!} : \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+2}\cdot(2n)!}{x^{2n}\cdot(2n+2)!}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n}\cdot x^2\cdot(2n)!}{x^{2n}\cdot(2n)!(2n+1)(2n+2)}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{(2n+1)(2n+2)} = 0,$$

при любом x, т.е. ряд сходится на всей числовой прямой.

Замечание. Если степенной ряд имеет вид (2.7), то, как мы отмечали, подстановкой $x - x_0 = z$ он приводится к степенному ряду вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots + a_n z^n + \ldots, \tag{2.17}$$

интервалом сходимости которого будет $(-R;R)$, т.е. $|z| < R$ или $|x - x_0| < R$, или $-R < x - x_o < R$,или $x_0 - R < x < x_0 + R$. Следовательно, интервалом сходимости ряда (2.7) будет $(x_0 - R; x_0 + R)$, а радиус сходимости ряда (2.17) и (2.7) совпадают.

Пример 6. Найти область сходимости степенного ряда

$$1 + \frac{(x-3)}{2^3} + \frac{(x-3)^2}{3^3} + \frac{(x-3)^3}{4^3} + \ldots + \frac{(x-3)^n}{(n+1)^3} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-3)^n}{(n+1)^3}.$$

Решение.

Здесь $x_0 = 3, a_n = \dfrac{1}{(n+1)^3}, a_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1+1)^3} = \dfrac{1}{(n+2)^3}$,

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{(n+1)^3} : \frac{1}{(n+2)^3}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+2)^3}{(n+1)^3}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)+1}{n+1}\right)^3 = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^3 = 1.$$

Следовательно, ряд сходится при $|x-3|<1$, т.е. при $-1<x-3<1$. Исследуем ряд на сходимость в концах интервала. При $x=4$ получаем числовой ряд

$$1+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}+\ldots+\frac{1}{n^3}+\ldots, \tag{2.18}$$

который является сходящимся как обобщенный гармонический с $\alpha = 3$. При $x=2$ имеем $1-\dfrac{1}{2^3}+\dfrac{1}{3^3}+\ldots+\dfrac{(-1)^{n+1}}{n^3}+\ldots$, который абсолютно сходится, т.к. сходится ряд (2.18). Следовательно, областью сходимости является отрезок $[1;3]$.

Индивидуальные задания

Исследовать сходимость следующих числовых рядов.

4.01а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+5}{3^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n+1}{2+3n}\right)^{2n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)\ln(n+1)}$.

4.02а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5^n+1}{2^n+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{3n-1}{3+5n}\right)^{4n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{e^{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

4.03а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{n!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\left(\dfrac{3n-1}{4n+5}\right)^{n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln^7 n}{n}$.

4.04а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2^n}{1+6^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{n^2+1}{3n^2+2}\right)^{n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{5n+3}{5n+1}$.

4.05а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{3^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{5n-1}{7n-2}\right)^{2n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(n+1)\sqrt{\ln(n+1)}}$.

4.06а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+3}{3^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\ln^n(n+1)}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{2n+3}}$.

4.07а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^3}{2^n}$;   б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}3^n\cdot\left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^n$;   в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt{n}}$.

4.08а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{\left(\sqrt{2}\right)^n}$;   б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n}{(6n+1)^n}$;   в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln^4(5n+2)}{(5n+2)}$.

4.09а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n\cdot(n+1)}$;   б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^n}{e^n}$;   в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

4.10а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{n(n+1)}$;   б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^n}$;   в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{\operatorname{arctg} n}}{1+n^2}$.

4.11а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{3^n}$;   б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{5^n}$;   в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\operatorname{arctg} n\left(n^2+1\right)}$.

4.12а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+1}{5^n}$;   б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt[3]{(n+1)^n}}{e^n}$;   в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{\ln^3 n}}{n}$.

4.13а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+1)}{3^n+1}$;   б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4n+1}{n^2-1}\right)^n$;   в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n\cdot 3^{n^2}$.

4.14а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{4n+1}{5^n}$;   б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{100n^2}{n^2+100}\right)^n$;   в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+1}{n^3+n}$.

4.15а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^2+1}$;   б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(4n+1)^n}{3^n}$;   в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n^3+2}{\sqrt{n}}$.

4.16а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{6^n+1}{n+2}$;   б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln^n(n+1)$;   в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5n^2+1}{n}$.

4.17а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{3^n+1}$;   б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n+1}{2n+3}\right)^{n^2}$;   в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}+3}{n}$.

4.18а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^2+1}$;   б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^n}{2^n}$;   в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{1}{n}}}{n^2}$.

4.19а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{7^n+1}{2n+1}$;   б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{2}\right)^n$;   в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)+1}{(n+1)}$.

4.20а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 3^{2n}}{5^n}$;   б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{5n+1}{4n^2+1}\right)^n$;   в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}$.

4.21а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{5^{2n}+1}$;   б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n^2+1}{5n^2+3}\right)^n\cdot 2^n$;   в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n}{\sqrt[3]{n^2+1}}$.

4.22а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n\cdot 2^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(4n+1)^n}{7^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\ln n$.

4.23а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+3^n}{6^n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n^2-3n}{5n^2-1}\right)^{n^2}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\sqrt{n^2+1}$.

4.24а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+1}{(2n+1)!}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{(n+1)^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{\ln(n+1)}}{(n+1)}$.

4.25а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n1}{2^n+1}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{5n+3}\right)^n$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+1}{n^3+n}$.