## §5. Степенные ряды. Определение. Область сходимости

**Определение 1.** ***Степенным рядом*** называется выражение вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots +$$
$$+ a_n(x-x_0)^n + \ldots, \tag{2.7}$$

где $x-$независимая переменная; $x_0-$фиксированное число; $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots -$постоянные коэффициенты.

Если в ряде (2.7) положить $x=a$, где $a-$некоторое число, то получим числовой ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (a-x_0)^n = a_0 + a_1(a-x_0) + a_2(a-x_0)^2 + \ldots +$$
$$+ a_n(a-x_0)^n + \ldots . \tag{2.8}$$

**Определение 2.** Степенной ряд (2.7) ***называется сходящимся в точке*** $a$, если числовой ряд (2.8), полученный из ряда (2.7) подстановкой $x=a$, является сходящимся рядом. При этом $a$ называется ***точкой сходимости ряда*** (2.7).

**Пример 1.** Степенной ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{5^n} = 1 + \frac{x+1}{5} + \frac{(x+1)^2}{5^2} + \ldots + \frac{(x+1)^n}{5^n} + \ldots \tag{2.9}$$

сходится в точке $x=0$ и расходится в точке $x=24$. Действительно, подставляя в (2.9) $x=0$, получим числовой ряд $1+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\ldots+\frac{1}{5^n}+\ldots$, который, как сумма членов ряда геометрической прогрессии со знаменателем $q=\frac{1}{5}$, сходится. Данный степенной ряд расходится в точке $x=24$, так как числовой ряд $1+5+5^2+\ldots+5^n+\ldots$ является расходящимся, в силу невыполнения необходимого условия сходимости числового ряда.

**Определение 3.** Множество всех точек сходимости степенного ряда (2.7) называется ***областью сходимости ряда***.

**Теорема 1** (о структуре области сходимости степенного ряда). Пусть существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \ell . \tag{2.12}$$

Тогда:

а) если $\ell \neq 0$ и $\ell \neq \infty$, то степенной ряд (2.10) сходится абсолютно в интервале $\left(-\frac{1}{\ell};\frac{1}{\ell}\right)$, т.е. при $|x| < \frac{1}{\ell}$, и расходится вне этого интервала, т.е. при $|x| > \frac{1}{\ell}$;

б) если $\ell = 0$, то ряд (2.10) сходится при любом $x$;

в) если $\ell = \infty$, то ряд (2.10) сходится лишь при $x = 0$.

**Теорема 2** (о структуре области сходимости степенного ряда). Пусть существует конечный или бесконечный предел

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell. \tag{2.14}$$

Тогда:

а) если $\ell \neq 0$ и $\ell \neq \infty$, то степенной ряд (2.10) сходится абсолютно в интервале $\left(-\frac{1}{\ell};\frac{1}{\ell}\right)$, т.е. при $|x| < \frac{1}{\ell}$, и расходится вне этого интервала, т.е. при $|x| > \frac{1}{\ell}$;

Из теорем 2 и 3 следует, что в случае, когда $\ell \neq 0$ и $R \neq +\infty$, имеет место равенство $R = \frac{1}{\ell}$. Условимся считать $R = 0$ для рядов, расходящихся при всех $x \neq 0$, и $R = +\infty$ для рядов, сходящихся при любых $x$.

Из этого определения и теорем 2 и 3 следует

$$R = \frac{1}{\ell} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|, \tag{2.15}$$

или

$$R = \frac{1}{\ell} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}}. \tag{2.16}$$

Заметим, что вопрос о сходимости ряда (2.10) в точках $x = +R$ и $x = -R$ решается дополнительными исследованиями.

**Пример 1.** Найти область сходимости ряда

$$1 + x + 2!x^2 + 3!x^3 + \ldots + n!x^n + \ldots .$$

**Решение**. По формуле (2.15) имеем

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n\cdot(n+1)} =$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n!(n+1)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0.$$

Данный ряд сходится только в точке $x=0$.

**Пример 2.** Найти область сходимости ряда

$$\frac{x}{2+3}+\frac{x^2}{2^2+3^2}+\frac{x^3}{2^3+3^3}+\ldots+\frac{x^n}{2^n+3^n}+\ldots.$$

**Решение**.

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{2^n+3^n}:\frac{1}{2^{n+1}+3^{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{3^{n+1}\cdot\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+1\right)}{3^n\cdot\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n+1\right)}\right|=\lim_{n\to\infty}3\cdot\left|\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+1}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}\right|=3,$$

т.к. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$.

Таким образом, $R=3$, ряд сходится абсолютно в интервале $(-3;3)$. Исследуем ряд на сходимость в концах интервала. При $x=3$ получаем числовой ряд

$$\frac{3}{2+3}+\frac{3^2}{2^2+3^2}+\frac{3^3}{2^3+3^3}+\ldots+\frac{3^n}{2^n+3^n}+\ldots.$$

Воспользуемся необходимым признаком сходимости рядов с положительными членами.

Рассмотрим

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{2^n+3^n}=\lim\frac{3^n}{2^n+3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{3^n\cdot\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n+1\right)}=$$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1}=1$, значит, ряд расходится. При $x=-3$ приходим к ряду

$-\dfrac{3}{2+3}+\dfrac{3^2}{2^2+3^2}-\dfrac{3^3}{2^3+3^3}+\ldots+\dfrac{(-1)^n3^n}{2^n+3^n}+\ldots$, который по признаку

Лейбница для знакочередующихся рядов расходится, т.к. не выполняется условие $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

Итак, окончательно получаем, областью сходимости будет промежуток $(-3;3)$.

**Пример 3.** Найти область сходимости ряда

$$\frac{x}{5}+\frac{x^2}{5^2}+\frac{x^3}{5^3}+\ldots+\frac{x^{2n-1}}{5^n}+\ldots\ .$$

**Решение**. К этому ряду формула (2.15) неприменима, так как отсутствуют четные степени переменной $x$, т.е. $a_{2k}=0$, $k=1,\,2,\,3,\ldots$ .

Применяем непосредственно признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+1}}{5^{n+1}}:\frac{x^{2n-1}}{5^n}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+1}\cdot 5^n}{x^{2n-1}\cdot 5^{n+1}}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n-1}\cdot x^2\cdot 5^n}{x^{2n-1}\cdot 5^n\cdot 5}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{5}.$$

Данный ряд сходится для $\frac{x^2}{5}<1$, или $x^2<5$, т.е. $|x|<\sqrt{5}$, следовательно, $x\in\left(-\sqrt{5};\sqrt{5}\right)$. Проверим сходимость на концах интервала. При $x=\pm\sqrt{5}$ получаем ряды

$$\frac{\sqrt{5}}{5}\pm\frac{\left(\sqrt{5}\right)^3}{5^2}\pm\frac{\left(\sqrt{5}\right)^5}{5^3}\pm\ldots\pm\frac{\left(\sqrt{5}\right)^{2n-1}}{\left(\sqrt{5}\right)^n}\pm\ldots,$$

т.е.

$$\sqrt{5}\pm\frac{1}{\sqrt{5}}\pm\frac{1}{\sqrt{5}}\pm\ldots\pm\frac{1}{\sqrt{5}}\pm\ldots,$$

которые, очевидно, расходятся.

Следовательно, областью сходимости будет $\left(-\sqrt{5};\sqrt{5}\right)$.

**Пример 4.** Найти область сходимости ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{4n}\right)^n\cdot x^n=\left(\frac{1+1}{4}\right)\cdot x+\left(\frac{2+1}{4\cdot 2}\right)^2\cdot x^2+\left(\frac{3+1}{4\cdot 3}\right)^3\cdot x^3+$$

$$+\ldots+\left(\frac{n+1}{4n}\right)^n\cdot x^n+\ldots\ .$$

**Решение**. По формуле (2.16) имеем

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{a_n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{4n}\right)^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{n+1}{4n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{n+1}=4,$$

т.е. $R=4$, ряд сходится в интервале $(-4;4)$. Исследуем ряд на сходимость в концах интервала. При $x=4$ получаем числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{4n}\right)^n\cdot 4^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^n\cdot 4^n}{4^n\cdot n^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n,$$

который исследуем с помощью необходимого признака сходимости рядов. Имеем

$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=\ell\neq 0$, т.е. общий член ряда не стремится к нулю и ряд расходится. При $x=-4$ получаем числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{4n}\right)^n\cdot(-4)^n=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\cdot\frac{(-1)^n 4^n}{4^n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^n,$$

который по признаку Лейбница для знакочередующихся рядов расходится, т.к. не выполняется условие $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

Итак, окончательно имеем: областью сходимости будет промежуток $(-4;4)$.

**Пример 5.** Найти радиус сходимости ряда

$$1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}+\ldots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\ldots .$$

**Решение.** К этому ряду неприменима формула (2.15), так как отсутствуют нечетные степени переменной $x$, т.е. $a_{2k+1}=0$, $k=0,1,2,\ldots$ . Применяем непосредственно признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{U_{n+1}(x)}{U_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+2}}{(2n+2)!}:\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n+2}\cdot(2n)!}{x^{2n}\cdot(2n+2)!}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{2n}\cdot x^2\cdot(2n)!}{x^{2n}\cdot(2n)!(2n+1)(2n+2)}\right|=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x^2}{(2n+1)(2n+2)}=0,$$

при любом $x$, т.е. ряд сходится на всей числовой прямой.

**Замечание.** Если степенной ряд имеет вид (2.7), то, как мы отмечали, подстановкой $x-x_0=z$ он приводится к степенному ряду вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots + a_n z^n + \ldots, \qquad (2.17)$$

интервалом сходимости которого будет $(-R; R)$, т.е. $|z| < R$ или $|x - x_0| < R$, или $-R < x - x_o < R$,или $x_0 - R < x < x_0 + R$. Следовательно, интервалом сходимости ряда (2.7) будет $(x_0 - R; x_0 + R)$, а радиус сходимости ряда (2.17) и (2.7) совпадают.

**Пример 6.** Найти область сходимости степенного ряда

$$1 + \frac{(x-3)}{2^3} + \frac{(x-3)^2}{3^3} + \frac{(x-3)^3}{4^3} + \ldots + \frac{(x-3)^n}{(n+1)^3} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{(n+1)^3}.$$

**Решение.**

Здесь $x_0 = 3, a_n = \dfrac{1}{(n+1)^3}, a_{n+1} = \dfrac{1}{(n+1+1)^3} = \dfrac{1}{(n+2)^3}$,

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{(n+1)^3} : \frac{1}{(n+2)^3}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+2)^3}{(n+1)^3}\right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{(n+1)+1}{n+1}\right)^3 = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^3 = 1.$$

Следовательно, ряд сходится при $|x-3| < 1$, т.е. при $-1 < x - 3 < 1$. Исследуем ряд на сходимость в концах интервала. При $x = 4$ получаем числовой ряд

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \ldots + \frac{1}{n^3} + \ldots, \qquad (2.18)$$

который является сходящимся как обобщенный гармонический с $\alpha = 3$. При $x = 2$ имеем $1 - \dfrac{1}{2^3} + \dfrac{1}{3^3} + \ldots + \dfrac{(-1)^{n+1}}{n^3} + \ldots$, который абсолютно сходится, т.к. сходится ряд (2.18). Следовательно, областью сходимости является отрезок $[1;3]$.

## §6. Разложение функции в степенные ряды. Ряд Тейлора

Сумма всякого сходящегося степенного ряда является некоторой функцией, определенной внутри круга сходимости этого ряда (а также, быть может, еще и в некоторых точках его границы).

В связи с этим возникают две задачи.

Во-первых, можно по заданному ряду искать ту функцию, которой равна его сумма в области сходимости ряда. Эта задача называется суммированием сходящегося ряда.

Во-вторых, можно по заданной функции искать сходящийся ряд того или иного типа, сумма которого в области сходимости равнялась бы заданной функции. Эта задача называется разложением функции в ряд.

### *1. Коэффициенты Тейлора. Ряд Тейлора*

Предположим, что функция раскладывается в степенной ряд в интервале $|x-x_0|\le R$:

$$f(x)=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots+a_n(x-x_0)^n+\ldots\,. \quad (2.28)$$

Найдем коэффициенты ряда (2.28), выразив их через значения функции $f(x)$ и ее производных в точке $x_0$. Для этого, полагая в (2.28) $x=x_0$, получим

$$f(x_0)=a_0. \quad (2.29)$$

По теореме о дифференцируемости степенных рядов из (2.28) находим

$$f'(x)=a_1+2a_2(x-x_0)+3a_3(x-x_0)^2+\ldots+na_n(x-x_0)^{n-1}+\ldots\,. \quad (2.30)$$

Полагая в (2.30) $x=x_0$, получим

$$f'(x_0)=a_1. \quad (2.31)$$

Дифференцируя обе части (2.30), находим

$$f''(x)=2\cdot 1a_2+3\cdot 2a_3(x-x_0)+4\cdot 3a_4(x-x_0)^2+\ldots+$$
$$+n(n-1)a_n(x-x_0)^{n-2}+\ldots\,. \quad (2.32)$$

Полагая в (2.32) $x=x_0$, получим

$$f''(x_0)=2\cdot 1a_2. \quad (2.33)$$

Продолжая дифференцировать полученный ряд и подставляя $x=x_0$, будем иметь

$$f'''(x_0)=3\cdot 2\cdot 1a_3,\ f^{IV}(x_0)=4\cdot 3\cdot 2\cdot 1a_4,\ldots\ldots,$$
$$f^{(n)}(x_0)=n(n-1)(n-2)\ldots 3\cdot 2\cdot 1a_n,\ldots\ldots,$$

или

$$f^{(n)}(x_0)=n!a_n,\ n=0,1,2,\ldots,$$

где полагаем $f^{(0)}(x_0)=f(x_0)$. Из полученных формул и определим коэффициенты ряда (2.28):

$$a_0=f(x_0),\ a_1=\frac{f'(x_0)}{1!},\ a_2=\frac{f''(x_0)}{2!},\ldots,a_n=\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}. \quad (2.34)$$

**Определение 1.** Числа $\dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$, $n=0$, 1, 2,… называются ***коэффициентами Тейлора функции*** $\boldsymbol{f(x)}$ ***в точке*** $\boldsymbol{x_0}$.

Подставим значения $a_n$ из (2.34) в (2.28), получим

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots\ . \quad (2.35)$$

**Определение 2.** Ряд

$$f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+$$

$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots\ . \quad (2.36)$$

называется ***рядом Тейлора функции*** $\boldsymbol{f(x)}$ ***в точке*** $\boldsymbol{x_0}$.

Из приведенных выше рассуждений следует.

**Теорема 1.** Если функция $f(x)$ разлагается в степенной ряд (2.28), то это разложение единственно и совпадает с разложением функции $f(x)$ в ряд Тейлора функции в точке $x_0=0$.

Если в (2.36) полагать $x_0=0$, то получим ***ряд Маклорена для функции*** $\boldsymbol{f(x)}$

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots, \quad (2.37)$$

который является частным случаем ряда Тейлора.

Из приведенных выше рассуждений следует, что если функция $f(x)$ имеет в точке $x_0$ производные любого порядка, то для нее можно составить ряд Тейлора или (при $x_0=0$) ряд Маклорена (2.35).

**Определение 3.** Функция $f(x)$ называется ***порождающей*** для соответствующего ряда.

**Теорема 3.** Если все производные функции $f(x)$ ограничены в некоторой окрестности точки $x_0$ одним и тем же числом, то для любого $x$

из этой окрестности ряд Тейлора функции $f(x)$ сходится к ней, т.е. имеет место разложение.

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots . \qquad (2.44)$$

***2. Разложение элементарных функций в ряд Тейлора***

Ограничимся частным случаем $x_0=0$, т.е. рядами Маклорена, которые чаще используются на практике.

а) ***Разложение функции*** $\boldsymbol{f(x)=e^x}$

Заметим, что $f'(x)=e^x$, $f''(x)=e^x,\ldots,$ $f^{(n)}(x)=e^x$. Тогда

$f(0)=f'(0)=f''(0)=\ldots=f^{(n)}(0)=e^0=1.$

Следовательно, функция $e^x$ сопоставляется в ряд

$$1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots .$$

б) ***Разложение функции*** $\boldsymbol{f(x)=\sin(x)}$

Найдем производные данной функции:

$f'(x)=\cos x$, $f''(x)=-\sin x$, $f'''(x)=-\cos x$, $f^{(4)}(x)=\sin x$, $f^{(5)}(x)=\cos x$, $f^{(6)}(x)=-\sin x$, $f^{(7)}(x)=-\cos x,\ldots$ .

Вычислим значение функции и ее производных для $x_0=0$; $f(0)=\sin 0=0$, $f'(0)=\cos 0=1$, $f''(0)=-\sin 0=0$,
$f'''(0)=-\cos 0=-1$, $f^{(4)}(0)=\sin 0=0$, $f^{(5)}(0)=\cos 0=1$, $f^{(6)}(0)=-\sin 0=0,\ldots$ .

Таким образом получаем, если $n$ четное, т.е. $n=2k$,
где $k=0,1,2\ldots$, то $f^{(n)}(0)=\pm\sin 0=0$.

Если $n$ нечетное, то рассмотрим случаи:

$$n=4k+1,\ n=4k+3,\ k=0,1,2,\ldots .$$

Для первого случая имеем

$$f^{(n)}(0)=f^{(4k+1)}(0)=\cos 0=1.$$

Для второго случая имеем

$$f^{(n)}(0)=f^{(4k+3)}(0)=-\cos 0=-1.$$

Учитывая далее, что производные функции $\sin x$ ограничены на всей числовой прямой, по теореме 3 получаем

$$\sin x = 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{0}{4!}x^4 + \frac{1}{5!}x^5 - \ldots .$$

Отбросив члены с нулевыми коэффициентами, получим

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots . \qquad (2.46)$$

Нетрудно показать, что согласно теореме 3 $\sin x$ равен сумме этого ряда на всей числовой оси, т.к. все производные функции $\sin x$ ограничены.

в) ***Разложение функции*** $\boldsymbol{f(x) = \cos x}$

Повторяя рассуждения и выкладки, аналогичные случаю функции $\sin x$, получаем

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \ldots . \qquad (2.47)$$

Учитывая далее, что производные функции $\cos x$ ограничены на всей числовой прямой, по теореме 3 получаем сходимость ряда (2.47) к порождающей его функции $f(x)$.

г) ***Разложение функции*** $\boldsymbol{f(x) = \ln(1+x)}$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \ldots . \qquad (2.49)$$

Если $x = 1$, то получим числовой ряд

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{(-1)^n}{n+1} + \ldots ,$$

который является сходящимся, как гармонический. Таким образом, разложение (2.49) верно в промежутке $(-1;1]$.

д) ***Разложение функции*** $\boldsymbol{f(x) = \operatorname{arctg} x}$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots , \qquad (2.51)$$

полученный ряд сходится при $x \in (-1;1]$.

е) ***Разложение функции*** $\boldsymbol{f(x) = (1+x)^{\alpha}}$,

где $\alpha -$ произвольное действительное число. Нетрудно показать, что функция $(1+x)^{\alpha}$ в интервале сходимости $(-1;1)$ представима рядом

$$(1+x)^{\alpha} = 1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\ldots+$$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\ldots \quad (2.52)$$

Более того, можно показать, что при $\alpha \geq 0$ разложение (2.52) верно и в обоих концах интервала $(-1;1)$, т.е. имеет место на отрезке $[-1;1]$, а при $-1<\alpha<0$ – в правом конце, т.е. на полуинтервале $(-1;1]$.

**Определение 6.** Ряд (2.52) называется ***биноминальным рядом.***

## §7. Примеры практического применения степенных рядов

### *1.Вычисление значений функций*

**Пример 1.** Вычислить число $e$, т.е. значение функции $e^x$ при $x=1$, с точностью до 0,001 (если известно, что $e<3$).

*Решение.* Имеем

$$e^x = 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots .$$

Тогда

$$e^x \approx 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!},$$

причем абсолютная погрешность этого приближения равна $h=|r_n(x)|=\frac{e^t}{(n+1)!}|x|^{n+1}$, где $|t|<|x|$. При $x=1$ получаем

$$e \approx 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}.$$

При этом $h=\frac{e^t}{(n+1)!}\cdot 1^{n+1}=\frac{e^t}{(n+1)!}$, где $0<t<1$,

но так как $e^t<e^1<3$, то $h<\frac{3}{(n+1)!}$.

Число $n$ определим из равенства $\frac{3}{(n+1)!}<0{,}001$.

Откуда $\frac{3}{(n+1)!}<10^{-3}$, т.е. $(n+1)!>3\cdot 10^3=3000$.

Если взять $n=5$, то $(5+1)!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6=720<3000$.

Возьмем $n=6$, $(6+1)!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7=5040>3000$.
Следовательно,

$$e\approx1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+$$

$$+\frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5}+\frac{1}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{120}+\frac{1}{720}\approx$$

$\approx 2.718$.

**Пример 2.** Вычислить $\cos18^\circ$ с четырьмя верными знаками.

*Решение.* По формуле (2.47) §7 имеем

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots+\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}.$$

Так как угол $18^\circ$ в радианах (с точностью до $10^{-5}$) равен

$\dfrac{\pi\cdot18^\circ}{180^\circ}\approx0{,}31416$, то

$$\cos18^\circ=1-\frac{(0{,}31416)^2}{2}+\frac{(0{,}31416)^4}{2\cdot3\cdot4}-\frac{(0{,}31416)^6}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}+\ldots$$

Для знакочередующихся рядов абсолютная погрешность при замене суммы ряда некоторой его частичной суммой не превышает модуля первого отброшенного члена. Поэтому вычисление слагаемых проводим до тех пор, пока слагаемое по модулю не станет меньше 0,0001. Непосредственной проверкой убеждаемся, что

$\dfrac{(0{,}31416)^6}{2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}=\dfrac{(0{,}31416)^6}{720}<0{,}0001$, значит, достаточно ограничиться тремя слагаемыми

$$\cos18^\circ\approx1-\frac{(0{,}31416)^2}{2}+\frac{(0{,}31416)^4}{2\cdot3\cdot4}\approx0{,}901709.$$

### *2.Интегрирование функций*

**Пример 3.** При изучении теории вероятности важную роль играет функция

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}dx,$$

называемая ***функцией Лапласа,*** или ***интегралом вероятностей***. Вычислить интеграл непосредственным интегрированием нельзя, так как $\int\limits_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}dx$ не выражается через элементарные функции.

Заменяя в разложении (2.45) $x$ на $-\frac{x^2}{2}$, получаем

$$e^{-\frac{x^2}{2}}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2^4\cdot 2!}-\frac{x^6}{2^6\cdot 3!}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}x^{2n}}{2^{2n}n!}+\ldots .$$

Это разложение, как и разложение для $e^x$, имеет место на всей числовой оси, поэтому его можно почленно интегрировать, т.е.

$$\int\limits_0^x e^{-\frac{x^2}{2}}dx=\int\limits_0^x\left(1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2^4\cdot 2!}-\frac{x^6}{2^6\cdot 3!}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}x^{2n}}{2^{2n}n!}\right)dx=$$

$$=\int\limits_0^x dx+\frac{1}{2}\int\limits_0^x x^2\,dx+\frac{1}{2^4\cdot 2!}\int\limits_0^x x^4dx-\frac{1}{2^6 3!}\int\limits_0^x x^6dx+\ldots+$$

$$+\frac{(-1)^{n+1}}{2^{24}\cdot n!}\int\limits_0^x x^{2n}dx+\ldots=x-\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{x^5}{2^4\cdot 2!\cdot 5}-\frac{x^7}{2^6\cdot 3!\cdot 7}+\ldots+$$

$$+\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+1}}{2^{2n}n!(2n+1)}+\ldots .$$

Тогда

$$F(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(x-\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{x^5}{2^4\cdot 2!\cdot 5}-\frac{x^7}{2^6\cdot 3!\cdot 7}+\ldots+\frac{(-1)^{n+1}x^{2n+1}}{2^{2n}n!(2n+1)}+\ldots\right),$$

сходящимся на всей числовой прямой оси. Вычислить значение функции $F(x)$ очень просто, так как ряд быстро сходится.

### *3.Вычисление определенного интеграла*

**Пример 4.** Вычислить интеграл $\int\limits_0^1\frac{1-\cos 2x^2}{x}dx$ с погрешностью $h<0{,}0001$, где при $x=0$ значение подынтегральной функции принимается равным единице.

**Решение.** Из формулы (2.47), заменяя $x$ на $2x^2$, получаем

$$\cos 2x^2=1-\frac{4x^4}{2!}+\frac{2^4x^8}{4!}-\frac{2^6x^{12}}{6!}+\ldots+(-1)^{n+1}\frac{2^{2n}x^{4n}}{(2n)!}+\ldots .$$

$$1-\cos 2x^2 = \frac{4x^4}{2!} - \frac{2^4 x^8}{4!} + \frac{2^6 x^{12}}{6!} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{2^{2n} x^{4n}}{(2n)!} + \ldots .$$

Делением обеих частей последнего равенства на $x$ находим

$$\frac{1-\cos 2x^2}{x} = \frac{4x^3}{2!} - \frac{2^4 x^7}{4!} + \ldots + (-1)^{n+1} \frac{2^{2n} x^{4n-1}}{(2n)!} + \ldots .$$

Это разложение, как и разложение для $\cos x$, имеет место на всей числовой оси, поэтому можно почленно интегрировать:

$$\int_0^1 \frac{1-\cos 2x^2}{x} dx = \int_0^1 \frac{4x^3}{2!} dx - \int_0^1 \frac{2^4 x^7}{4!} dx + \ldots +$$

$$+ \int_0^1 (-1)^{n+1} \frac{2^{2n} x^{4n-1}}{(2n)!} dx + \ldots = \frac{4 \cdot x^4}{2! \cdot 4} \Big|_0^1 - \frac{2^4 \cdot x^8}{4! \cdot 8} \Big|_0^1 + \frac{2^6 \cdot x^{12}}{6! \cdot 12} \Big|_0^1 -$$

$$- \frac{2^8 x^{16}}{8! \cdot 16} + \ldots = \frac{1}{2} - \frac{1}{12} + \frac{1}{135} - \frac{1}{2520} + \ldots .$$

Данный ряд является знакочередующимся, для которого остаток ряда по модулю не превосходит модуль первого члена остатка ряда. Таким образом, вычисления проводятся до тех пор, пока слагаемое по модулю не будет меньше $0{,}0001$.

Так как $h = |r_n| = \left| -\frac{1}{2520} \right| < 0{,}0001$, то достаточно взять

$$\int_0^1 \frac{1-\cos 2x^2}{x} dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{12} + \frac{1}{135} \approx 0{,}1657 .$$

## Индивидуальные задания

Вычислить определенный интеграл с помощью разложения подынтегральной функции в степенной ряд. Обеспечить абсолютную погрешность $h < 0{,}001$:

7.01 $\int_0^{0,1} e^{-5x^2} dx$; 7.02 $\int_0^{0,1} \frac{\sin 10x^2}{x} dx$; 7.03 $\int_0^{1/2} \frac{1-\cos x^2}{x^4} dx$;

7.04 $\int_0^{0,2} \frac{e^{-5x^2} - 1}{x} dx$; 7.05 $\int_0^{0,9} \frac{\ln\left(1+\frac{x}{5}\right)}{x} dx$; 7.06 $\int_0^{1/2} e^{-x^3} dx$;

7.07 $\int_0^{0,4} \sin 3x^2\, dx$; 7.08 $\int_0^{1/2} \cos 5x^3\, dx$; 7.09 $\int_0^{0,1} \frac{e^{-2x} - 1}{x} dx$;

7.10 $\int\limits_0^{0,6} \frac{\ln\left(1+\frac{x}{6}\right)}{x} dx$; 7.11 $\int\limits_0^{3} e^{-\frac{x^2}{90}} dx$; 7.12 $\int\limits_0^{1/2} \sin\frac{x^2}{2} dx$;

7.13 $\int\limits_0^{0,1} \cos 5x^2 \, dx$; 7.14 $\int\limits_0^{0,3} e^{-3x^2} dx$; 7.15 $\int\limits_0^{1/2} \frac{e^{-x^2}-1}{10x} dx$;

7.16 $\int\limits_0^{1/2} e^{-\frac{x^2}{5}} dx$; 7.17 $\int\limits_0^{0,4} \frac{1-\cos 7x^2}{x^2} dx$; 7.18 $\int\limits_0^{0,2} \sin\frac{x^4}{4} dx$;

7.19 $\int\limits_0^{1/2} \cos\left(\frac{x}{5}\right)^2 dx$; 7.20 $\int\limits_0^{0,2} \frac{\ln\left(1+\frac{x}{2}\right)}{x} dx$; 7.21 $\int\limits_0^{0,1} \frac{e^{-5x^2}-1}{x^2} dx$;

7.22 $\int\limits_0^{1/2} x^2 \cos x^4 \, dx$; 7.23 $\int\limits_0^{1/2} \frac{e^{-x^3}-1}{x^2} dx$; 7.24 $\int\limits_0^{1/2} \frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x^2} dx$;

7.25 $\int\limits_0^{1/2} \frac{e^{-2x^2}-1}{x^2} dx$.