«Случайные события»

1. Какова вероятность того, что в трехзначном числе, наудачу выбранном из таблицы случайных чисел,

а) все цифры одинаковые;

в) содержится одна цифра 5, а две другие – различные, причем срди них нет цифры 0?

Решение. Имеем задания на классическую схему с использованием формул комбинаторики.

а) Обозначим событие A – в наудачу выбранном трехзначном числевсе цифры одинаковые. Найдем вероятность события A, применив формулу $P(A)=\frac{m}{n}$.

Имеется 900 трехзначных чисел (от 100 до 999) и 9 трехзначных чисел, составленных из одинаковых цифр (это числа 111, 222,…,999), поэтому общее число исходов испытания $n=900$, а число исходов испытания, благоприятствующих событию A, равно $m=9$. Вероятность события A равна $P(A)=\frac{m}{n}=\frac{9}{900}=0{,}01$.

Ответ: $P(A)=0{,}01$.

в) Обозначим событие B – в наудачу выбранном трехзначном числе имеется одна цифра 5, а две другие – различные и среди них нет цифры 0. Найдем вероятность события A, применив формулу $P(A)=\frac{m}{n}$. Общее число исходов испытания $n=900$.

Найдем число m исходов испытания, благоприятствующих собтию B. Варианты, благоприятствующие событию B, схематически можно представить так: $\{5 \;\; \otimes \;\; \otimes\}$ – варианты первого вида; $\{\otimes \;\; 5 \;\; \otimes\}$ – варианты второго вида; $\{\otimes \;\; \otimes \;\; 5\}$– варианты третьего вида. Цифра 5 в трехзначном числе может занимать одно из трех возможных мест. В исходах испытания, относящих к вариантам первого, второго и третьего видов, цифра 5 стоит соответственно на первом, втором и третьем местах. В вариантах первого вида два свободные места могут быть заняты какими-либо двумя цифрами из оставшихся восьми (по условию цифра 0 исключается). Число благоприятствующих способов, которыми могут быть заняты эти два места, равно A_8^2 – числу размещений из восьми элементов по два, так как в каждое соединение входит 2 элемента из восьми имеющихся и соединения отличаются друг от друга как самими элементами, так и их порядком (порядок элементов важен). Применив формулу $A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$ имеем $A_8^2 = \frac{8!}{(8-2)!} = \frac{8!}{6!} = 7 \cdot 8 = 56$. В каждом из вариантов второго и третьего видов число благоприятных исходов, которыми могут быть заняты свободные места, также равно A_8^2.

Таким образом, число исходов испытания, благоприятствующих событию *B,* равно $m = 3 \cdot A_8^2 = 3 \cdot 56 = 168$. Вероятность события *B* равна $P(B) = \frac{m}{n} = \frac{168}{900} = 0{,}1867.$

Ответ: $P(B)$ =0,1867.

2. В ящике 10 шаров: 7 черных и 3 белых. Из ящика вынимают 5 шаров. Найти вероятность того, что среди них окажется 3 черных и 2 белых шара.

Решение. Требуемую вероятность найдем с помощью классической формулы $P(A) = \frac{m}{n}$.

Число *n* - общее число возможных исходов - равно (поскольку порядок шаров безразличен) сочетанию 5 из 10 элементов: n = C_{10}^5

Теперь определим число благоприятных исходов *m*. Очевидно, что способов, которыми можно вынуть 3 черных шара из 7 и 2 белых шара из 3 равно ссоответственно: C_7^3 и C_3^2.

Поскольку каждая комбинация черных шаров может сочетаться с любой комбинацией белых, всего получится $C_7^3 \cdot C_3^2$ способов.

Получим $P(A) = \frac{C_7^3 \cdot C_3^2}{C_{10}^5} = \frac{\frac{7!}{3! \cdot 4!} \cdot \frac{3!}{2! \cdot 1!}}{\frac{10!}{5! \cdot 5!}} \approx 0{,}417$.

Ответ: $P(A) \approx 0{,}42$.

3. Из колоды в 36 карт наугад вынимают 5 карт. Какова вероятность того, что

а) среди извлеченных карт не будет карты пиковой масти;

в) среди извлеченных карт хотя бы одна карта пиковой масти?

Решение.

а) Обозначим событие A – среди извлеченных пяти карт не будет карты пиковой масти. Найдем вероятность события A, применив формулу $P(A)=\dfrac{m}{n}$. Очевидно, общее количество возможных исходов n равно C_{36}^{5}

Так как в колоде 27 карт не пиковой масти, то благоприятным исходом можно считать извлечение 5 любых из них. Тогда m = C_{27}^{5}

Получим $P(A)=\dfrac{C_{27}^{5}}{C_{36}^{5}}=\dfrac{\frac{27!}{5!\cdot 22!}}{\frac{36!}{5!\cdot 31!}}\approx 0{,}214$.

Ответ: $P(A)\approx 0{,}214$.

в) Обозначим событие B – среди извлеченных пяти карт будет хотя бы одна карта пиковой масти. События A и B – противоположные события, поэтому $P(B)=1-P(A)=1\text{-}0{,}214\approx 0{,}786$.

4. Узел содержит три независимо работающие детали. Вероятности отказа деталей соответственно равны 0,1; 0,2; 0,3. Найти вероятность отказа

а) первой и второй деталей;

б) двух деталей;

в) отказа узла, если для этого достаточно, чтобы отказала хотя бы одна деталь.

Решение.

Задачи решаются с помощью теорем сложения и умножения вероятностей.

а) Обозначим событие A – отказ первой и второй деталей. Пусть событие A_1 – отказ первой детали; событие A_2 – отказ второй детали; A_3 – отказ третьей детали. Тогда событие A наступит, если осуществятся событие и A_1, и событие A_2, и событие $\overline{A_3}$ - исправная работа третьей детали. Так как события A_1, A_2 и $\overline{A_3}$ – независимы, имеем

$$P(A)=P(A_1\cdot A_2\cdot \overline{A_3})=P(A_1)P(A_2)P(\overline{A_3})=0{,}1\cdot 0{,}2\cdot(1-0{,}3)=0{,}014$$

.

Ответ: $P(A)=0{,}014$.

б) Обозначим событие B – отказ двух деталей. Осуществление события B означает, что означает, что откажет только первая и вторая деталь ($A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A_3}$) или только вторая и третья деталь ($\overline{A_1} \cdot A_2 \cdot A_3$), или только первый и третья деталь ($A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot A_3$), т.е. имеем сумму несовместных событий. Тогда

$$P(B) = P(A_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A_3}) + P(\overline{A_1} \cdot A_2 \cdot A_3) + P(A_1 \cdot \overline{A_2} \cdot A_3) = 0{,}014 +$$
$$+ (1-0{,}1)\cdot 0{,}2 \cdot 0{,}3 + 0{,}1 \cdot (1-0{,}2)\cdot 0{,}3 = 0{,}014 + 0{,}054 + 0{,}024 = 0{,}092.$$

Ответ: $P(B) = 0{,}092$.

с) Обозначим событие C – отказ узла.

Для нахождения вероятности события C найдем сначала вероятность противоположного события $P(\overline{C})$, заключающегося в исправной работе всех деталей:

$$P(\overline{C}) = (1\text{-}0{,}1)\cdot(1\text{-}0{,}2)\cdot(1\text{-}0{,}3) = 0{,}9\cdot 0{,}8\cdot 0{,}7 = 0{,}504.$$

Искомая вероятность равна

$$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1\text{-}0{,}504 = 0{,}496.$$

Ответ: $P(C) \approx 0{,}496$.

5. Сколько нужно выбрать чисел из таблицы случайных чисел, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,9, быть уверенным в том, что среди них хотя бы одно число четное?

Решение. Обозначим через n искомое число случайных чисел. Рассмотрим события**:**

A_k – одно случайным образом отобранное число является четным **(**$k = \overline{1, n}$**);**

$\overline{A_k}$ – одно случайным образом отобранное число является нечетным**;**

B – среди n случайных чисел хотя бы одно четное;

$\overline{B}$ – среди n случайных чисел не будет ни одного четного.

Вероятности всех событий A_k равны. Обозначим: $P(A_k) = p$; $P(\overline{A_k}) = 1 - p = q$.

События A_k и $\overline{A_k}$ равновероятны, поэтому $p = q = 0{,}5$.

$P(B) = 1 - P(\overline{B})$. Событие $\overline{B}$ состоит в том, что все n случайных чисел будут нечетными. Это означает, что $\overline{B} = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot ... \cdot \overline{A_n}$.

Применив теорему умножения вероятностей независимых событий, найдем $P(B) = 1 - q^n = 1 - 0{,}5^n$.

По условию, $P(B) \geq 0{,}9$, поэтому получим

$$1 - 0{,}5^n \geq 0{,}9;$$
$$-0{,}5^n \geq 0{,}1;$$
$$n \cdot \lg 0{,}5 \leq \lg 0{,}1;$$
$$n > \frac{\lg 0{,}1}{\lg 0{,}5} \approx 3{,}32.$$

Так как n – целое число, то $n \geq 4$.

Ответ: $n \geq 4$.

6. Имеются две урны: в первой 5 белых и 3 черных шара, во второй 7 белых и 4 черных шара. Из первой урны во вторую перекладывают, не глядя, один шар. После этого из второй урны берут один шар. Найти вероятность того, что этот шар будет белым.

Решение. Этот пример решим по формуле полной вероятности

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(H_i) \cdot P_{H_i}(A).$$

Событие A – появление белого шара.

Гипотезы:

H_1 – переложен белый шар;

H_2 – переложен черный шар.

Найдем вероятность выдвинутых гипотез:

$$P(H_1) = \frac{5}{5+3} = \frac{5}{8};\ P(H_2) = \frac{3}{5+3} = \frac{3}{8}.$$

Проверка: $P(H_1) + P(H_2) = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} = 1.$

Найдем соответствующие условные вероятности события A:

$$P(A/H_1)=\frac{7+1}{7+4+1}=\frac{8}{12}=\frac{2}{3}$$ (если мы переложили во вторую урну белый шар, то белых шаров на 1 стало больше, также как и всех шаров стало на 1 шар больше);

$$P(A/H_2)=\frac{7}{7+4+1}=\frac{7}{12}$$ (если мы переложили черный шар, то увеличилось только общее количество шаров, а белых осталось 7).

$$P(A)=P(H_1)\cdot P(A/H_1)+P(H_2)\cdot P(A/H_2)=\frac{5}{8}\cdot\frac{2}{3}+\frac{3}{8}\cdot\frac{7}{12}=$$

$$-\frac{5}{12}+\frac{7}{32}=\frac{40+21}{96}=\frac{61}{96}.$$

Ответ: $P(A)=\frac{61}{96}$.

7. Два завода производят детали, поступающие в магазин. Вероятность выпуска бракованной детали для первого завода равна 0,8, для второго – 0,7. С первого завода поступило в 3 раза больше деталей, чем со второго. Покупатель приобрел годную деталь. Найти вероятность того, что она с первого завода.

Решение. Этот пример решим по формуле Байеса:

$$P_A(H_1)=\frac{P_{H_1}(A)\cdot P(H_1)}{P_{H_1}(A)\cdot P(H_1)+P_{H_2}(A)\cdot P(H_2)},$$

где события (гипотезы) H_1 и H_2 – произвольно выбранная соответственно первом или втором заводе деталь; событие A заключается в том, что деталь годная.

Получим

$$P_A(H_1)=\frac{0{,}8\cdot\frac{3}{4}}{0{,}8\cdot\frac{3}{4}+0{,}7\cdot\frac{1}{4}}\approx 0{,}77.$$

Ответ: $P_A(H_1)\approx 0{,}77$.

8. Монета бросается пять раз. Найти вероятность того, что орел выпадет 2 раза.

Решение. По формуле Бернулли $P_n(m) = C_n^m p^n q^{n-m}$ при n = 5, m=2; и p = 0,5 найдем искомую вероятность:

$$P_5(2) = C_5^2 0{,}5^2 (1 - 1{,}5)^3 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot 0{,}5^5 \approx 0{,}01.$$

Ответ: $P_5(2) \approx 0{,}01$.

9.Вероятность обнаружения опечатки на странице книги равна 0,01. Найти вероятность того, что в 500-страничной книге не будет обнаружено опечаток (обнаружение опечаток на различных страницах считать независимыми событиями).

Решение. Поскольку в условиях независимых испытаний Бернулли вероятность p = 0,01 близка к нулю, а n = 500 велико, применим формулу Пуассона

$$P_n(k) = \frac{a^k}{k!} e^{-a}, \quad \text{где } a = 500 \cdot 0{,}01 = 5.$$

Для k = 0 (отсутствие опечаток), получаем: $P_{500}(0) = \frac{5^0}{0!} e^{-5} \approx 0{,}007$.

Ответ: $P_{500}(0) \approx 0{,}007$.

10. Вероятность наступления события A в данном испытании равна 0,5. Найти вероятность того, что событие A наступит

а) 50 раз в 1000 испытаний;

б) от 500 до 530 раз в 1000 испытаниях.

Решение.

а) Поскольку число испытаний велико $n = 1000$, а вероятность успеха в каждом из $m = 500$ испытаний $p = 0{,}5$ не близка к нулю или единице, то воспользуемся локальной теоремой Лапласа для нахождения требуемой вероятности:

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \varphi(x), \qquad \text{где} \qquad x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{500 - 1000 \cdot 0{,}5}{\sqrt{1000 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}} = 0.$$

$\varphi(0) = 0{,}3989$;

$\sqrt{npq} \approx 15{,}811$. Тогда искомая вероятность $P_{1000}(500) = \dfrac{0{,}3989}{15{,}811} \approx 0{,}025$.

Ответ: $P_{1000}(500) \approx 0{,}025$.

в) Для нахождения вероятности $P_{1000}(500 \le m \le 530)$ воспользуемся интегрально формулой Муавра-Лапласа:

$$P_{1000}(m_1 \le m \le m_2) \approx \Phi(\frac{\mathrm{m}_2 - np}{\sqrt{npq}}) - \Phi(\frac{\mathrm{m}_1 - np}{\sqrt{npq}}).$$

$$P_{1000}(500 \le m \le 530) \approx \Phi(1{,}9) - \Phi(0) \approx 0{,}471.$$

Ответ: $P_{1000}(500 \le m \le 530) \approx 0{,}471$.