

Известно высказывание А. Эйнштейна:

«Эксперимент ... никогда не говорит теории "Да". В наиболее благоприятных случаях он говорит "Может быть", чаще всего: "Нет"... Каждая теория рано или поздно услышит свое "нет"».

10. ЗАДАЧИ ДИНАМИКИ

Человек задает Природе множество вопросов, с ее "точки зрения" бессмысленных, и желает получить ответы однозначные и укладывающиеся в любезные ему схемы. Одним словом, мы стремимся открыть не Порядок вообще, а лишь некоторый определенный порядок....

Станислав Лем.

Сумма технологий.— М.: Мир, 1968. — С. 101.

Система инженерного образования в вузах строительного профиля построена таким образом, что задачам динамики уделяется незаслуженно малое внимание. Если многочисленными упражнениями у студентов и вырабатывается определенная интуиция (явно недостаточная, но способная совершенствоваться в процессе практической деятельности) по проблемам статического анализа конструкций, то «динамическое чутье» остается совсем неразвитым. Отсюда многие ошибки, а также абсолютно формальное отношение к подготовке исходной информации для решения динамической задачи средствами автоматизированного проектирования.

Это обстоятельство учитывалось авторами при подготовке текста настоящей главы, и мы сознательно пошли на несколько больший крен изложения в сторону его насыщения справочной и общенаучной информацией. Для подготовленного читателя она может оказаться лишней, и мы приносим свои извинения профессионалам за, быть может, вызывающий раздражение, излишне менторский тон изложения.

10.1 Расчетные модели в задачах динамики

Расчетная схема несущего каркаса, с помощью которой описывается упругое сопротивление конструкции в процессе анализа динамической реакции сооружения, чаще всего принимается такой же, как и при статическом расчете. Естественно, в такую схему добавляются инерционные характеристики и данные о силах сопротивления движению; кроме того, более детально описываются и внешние воздействия, которые могут быть представлены как некоторые функции времени. Не останавливаясь на этих дополнениях расчетной модели, отметим определенную опасность использования описания несущей конструкции, одинакового для статического и динамического рас-

четов. Эта опасность не всегда осознается даже опытными расчетчиками, в основном решавшими статические задачи.

Дело в том, что по традиции, укоренившейся при статических расчетах, ориентированных на анализ предельных состояний системы, из расчетной модели удаляются элементы, которые мало сказываются на предельном сопротивлении системы. Отбрасываются перегородки, многие элементы ограждающих конструкций и другие компоненты здания, которые при деформациях, соответствующих уровню расчетного статического воздействия, на самом деле практически не участвуют в работе. Однако, при анализе динамического поведения, особенно в части оценки вклада высших собственных частот, соответствующие амплитуды колебаний могут оказаться намного меньшими, чем те перемещения, при которых эти «ненесущие» конструктивные элементы выбывают из работы.

Кроме того, сами жесткостные характеристики многих строительных материалов (и, в особенности, оснований) при динамическом расчете должны рассматриваться с другими значениями. Дело в том, что при статическом расчете эти характеристики могут приниматься с учетом реологических изменений, развивающихся при длительном нагружении под действием нагрузок, интенсивность которых, возможно, близка к предельной. Отсюда идет традиция учитывать, например, податливость грунтовых оснований по усредненному «секущему» модулю, справочные данные по модулям упругости железобетона в некоторой мере учитывают реологические процессы его твердения и т.п.

При динамическом расчете для умеренного уровня эксплуатационных нагрузок и не очень больших частот динамическая жесткость близка к «мгновенной» статической жесткости (т.е. определяется не секущим, а касательным модулем), немного возрастая с увеличением частоты [1].

Таким образом, при использовании одинаковой упругой модели для статического и динамического расчетов, чаще всего преуменьшается значение динамической жесткости, что, как известно, приводит к занижению вычисляемых собственных частот.

Ввиду практических трудностей выполнения динамического расчета с учетом реального значения динамической жесткости, необходимо считаться с тем, что в результатах будет присутствовать определенная погрешность значений собственных частот. Эта погрешность даже регламентирована, в зависимости от типа конструкции, в ряде инструкций по расчету зданий и сооружений на эксплуатационные динамические воздействия [2, 3]. Такой подход связан с определенными видами конструкций и требует достаточно детального обоснования при перенесении на объекты с другой конструктивной схемой, но, к сожалению, указанные обоснования чаще всего отсутствуют.

Большинство программ для динамического расчета конструкций, реализующих указания действующих нормативных документов, оперируют с усредненными по конструкции мерами диссипации (например, логарифмическими декрементами колебаний δ). Такой подход может быть оправдан, если рассматриваемая конструкция выполнена из одного материала с примерно оди-

наковыми конструктивными решениями и без ярко выраженных точек, где развивается внутреннее конструктивное трение. Но его перенос на расчет систем, выполненных из материалов и конструкций с резко отличными упругими, диссипативными и инерционными свойствами, может привести к заметным погрешностям.

Во многих реальных сооружениях значения δ для различных подсистем отличаются на порядки: от тысячной доли для металлических конструкций (прокат, сварные элементы) до целых единиц для грунтовых оснований. Конечно, эти качественные и количественные различия свойств конструкции должны были бы учитываться в корректных динамических моделях.

Правильный учет фактических диссипативных свойств системы особенно важен при анализе резонансных режимов, когда, как известно, высота резонансного пика обратно пропорциональна величине δ , а также при оценке длительности экспозиции, связанной с дозой вибрации, которую могут получить люди, находящиеся на колеблющейся конструкции [4].

Величину потерь энергии в самом сооружении, определяемую внутренним трением в материале и конструкционным демпфированием, трудно рассчитать теоретически, и она устанавливается в экспериментах и натурных наблюдениях. В таблице 10.1 представлены такие экспериментальные данные, заимствованные из рекомендаций по проектированию атомных станций в США. Указанное в таблице критическое затухание $C_{cr} = 2(KM)^{1/2}$, где K — жесткость и M — масса, соответствует пороговому значению для тех случаев, когда выведенная из состояния равновесия система возвращается в него без колебательного процесса.

Таблица 10.1.

Тип сооружения	Затухание в % от критического значения C_{cr} при напряжениях в долях расчетного сопротивления:	
	0,67 R_y	0,90 R_y
Стальные конструкции:		
сварные	2	4
на болтах	4	7
Бетонные конструкции:		
преднапряженные	2	5
с обычным армированием	4	7

Упомянутая выше возможная неточность вычисления собственных частот и погрешности в оценке логарифмического декремента наиболее сильно сказываются на величине угла сдвига фаз μ между возмущающей силой и реакцией конструкции. Это обстоятельство может сделать сомнительными формально правильные результаты суммирования реакций конструкции (перемещений, усилий), вычисленных отдельно по формам собственных колебаний, поскольку, например, s -й член такой суммы вводится с множителем $\cos(\theta t - \mu_s)$, причем

$$\operatorname{tg} \mu_s = \frac{\delta / \pi}{\sqrt{1 + (\delta / 2\pi)^2}} \frac{\theta / \omega_s}{1 - (\theta / \omega_s)^2}, \quad (10.1)$$

где через θ обозначена частота изменения возмущающей силы, а через ω_s частота собственных колебаний по s -ой форме недемпфированной системы.

Имея в виду указанную неточность, многие авторы считали возможным полагать угол сдвига фаз μ случайной величиной, равномерно распределенной на интервале от нуля до 180° , что приводило к расчетной формуле типа «корень из суммы квадратов вкладов реакций, соответствующих собственным частотам».

Достаточно часто в динамических расчетах присутствует следующая ошибка: при рассмотрении конструкций на упругом основании это основание не наделяют инерционными свойствами. Как показывают специальные исследования [5], при этом погрешность может иметь не только количественный, но и качественный характер. Так, для конструкции, представленной на рис. 10.1, были получены приведенные на рис. 10.2, *a* резонансные кривые прогиба ригеля w_1 и осадок опор w_2 для случая безынерционного полупространства, подсчитанные для трех значений коэффициента неупругого сопротивления $\gamma = 0; 0,05; 0,1$.

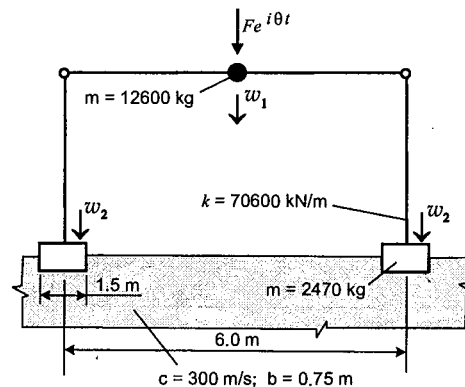


Рис. 10.1. Конструкция на упругом полупространстве

Аналогичные кривые для случая, когда учитывались инерционные свойства основания, приведены на рис. 10.2, *b*. Основание характеризуется скоростью распространения S -волн (поперечных) $c = 300$ м/сек, а на величинах осадок сказывается полуширина фундамента $b = 0,75$ м. По оси абсцисс отложены значения безразмерных частот $\chi = \theta b / c$.

Следует отметить, что на графиках, соответствующих инерционному полупространству, второй резонансный пик отсутствует, и, кроме того, амплитуда колебаний остается конечной даже при резонансе в отсутствии неупругого сопротивления конструкции. Положение первого резонансного пика практически не зависит от инерционных свойств основания, но амплитудные

значения существенно меньше, если учитывается инерция основания. Эти эффекты связаны с тем, что затухание колебаний вследствие излучения энергии в полупространство оказывается сопоставимым (если не большим), чем потери на внутреннее трение в конструкции.

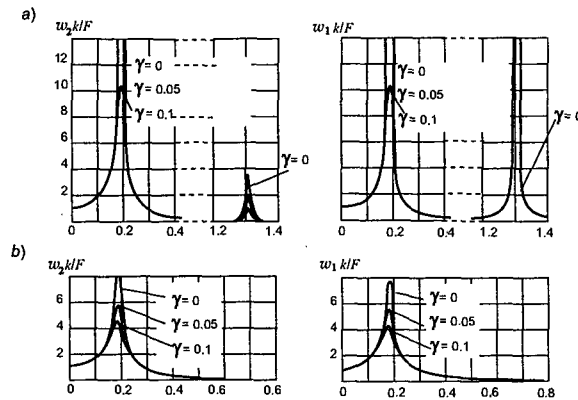


Рис. 10.2. Резонансные кривые: *a* — без учета инерции основания; *b* — с учетом инерции основания

В работе [6] были проведены сопоставительные расчеты различных моделей упругого основания для решения динамических задач — модифицированная модель Винклера, позволяющая учесть инерционные свойства основания, двухпараметровая модель Пастернака, упругое полупространство и др. Показано, что путем специального подбора параметров модели можно получить близкие результаты, но при обязательном учете инерционных свойств основания.

Практические расчеты, с помощью которых могут быть учтены эффекты излучения энергии колебаний в основание, основываются на использовании эквивалентных жесткостей и коэффициентов потерь энергии в упрощенной модели, где к фундаментной плите присоединены эквивалентные пружины, отражающие сопротивление основания поступательным и угловым перемещениям, и соответствующие им демпферы. При этом коэффициенты удельного демпфирования вычисляются ([7], стр. 99) по формуле типа $b = k\sqrt{C_z}$ [кгс×сек/см²]. Здесь k — безразмерный коэффициент, принимающий значение от 0,07 до 0,14, в зависимости от направления колебаний, C_z [кгс/см³] — коэффициент упругого равномерного сопротивления основания. Поскольку реальное основание может иметь чрезвычайно сложную структуру, и его трещиноватость, например, может препятствовать уходу энергии, предельную величину диссипации энергии в основание рекомендуется ограничивать, считая значение коэффициента затухания величиной порядка 15 ... 35% от критического.

10.1.1 Динамические степени свободы

Решение динамических задач на ЭВМ обычно требует значительно больших затрат машинного времени, чем решение аналогичных по сложности конструкции задач статического расчета. Поэтому, за исключением простейших моделей, практически всегда является существенной проблема выбора необходимого числа динамических степеней свободы. Имеется широко используемое эмпирическое правило, которое утверждает, что для системы с n динамическими степенями свободы надежно вычисляются примерно $n/2$ первых собственных частот и соответствующих им форм собственных колебаний. По поводу этого правила в книге [8] указывается, что оно близко перекликается с теоремой Котельникова из теории информации: для получения достаточной информации о непрерывном сигнале частота дискретных измерений должна быть, по крайней мере, вдвое выше наибольшей частоты, содержащейся в спектре сигнала.

Есть и еще одно соображение, поддерживающее подозрительное отношение расчетчика к частотам и формам свободных колебаний конструкции, относящимся к верхней части (половине?) спектра. Дело в том, что, как правило, модель динамической системы с конечным числом степеней свободы возникает не сама по себе, а как результат дискретизации (например, по методу конечных элементов) исходной континуальной модели. Так вот, для высших форм колебаний неустраняемая без смены постановки задачи погрешность успела, возможно, просочиться уже в непрерывную модель, то есть до перехода к дискретной модели. Так, например, для простой изгибаемой балки Бернулли-Эйлера прямоугольного сечения, когда отношение высоты сечения к длине полуволны соответствующей формы колебаний начинает превышать некоторую критическую величину (приблизительно $1/5$), становится сомнительной применимость теории Бернулли-Эйлера, и приходится переходить к теории изгиба балки Тимошенко, да еще и с учетом инерции вращения. При еще более коротковолновых формах колебаний недостаточно точной становится и эта непрерывная модель, так что требуется в очередной раз менять исходную механико-математическую постановку задачи, переходя, скажем, к постановке плоской динамической задачи теории упругости. Исследуя формы колебаний дискретной модели, расчетчик может, хотя бы качественно, оценить, имеет ли смысл учитывать высшие формы, а если и имеет, то до какого номера формы включительно. В более общем плане все это, на самом деле, уже обсуждалось нами в начале главы 2 (см. рис. 2.1).

Требование использования вдвое большего числа степеней свободы, чем число собственных форм с частотами до 33 Гц, включено в нормы Комиссии по атомной энергии США [9] в качестве альтернативного требования, чтобы результаты расчета не менялись более чем на 10% при увеличении n . Эти же нормы содержат и другое важное указание, касающееся возможности не учитывать в динамических расчетах некоторые подсистемы сооружения.

Если обозначить через M_1 массу основной системы, а через M_2 — массу присоединяемой к ней вторичной подсистемы (например, подвешиваемого

трубопровода), и если соответствующие собственные частоты этих двух частей сооружения обозначены как ω_1 и ω_2 , то вторичную подсистему можно не учитывать, когда $M_2/M_1 < 0,01$ или же когда $0,01 < M_2/M_1 < 0,1$ и соотношение частот $\omega_2/\omega_1 < 0,8$ или $\omega_2/\omega_1 > 1,25$.

Заметим, что минимальная ω_1 и максимальная ω_n из собственных частот расчетной модели определяют некоторые «естественные» масштабы времени $t_{\max} = 2\pi/\omega_1$ и $t_{\min} = 2\pi/\omega_n$, с помощью которых все процессы можно представить как «медленные», «нормальные» и «быстрые». Такая классификация позволяет избавиться от анализа несущественных эффектов, например, не рассматривать вид функции изменения нагрузки во времени, когда ее общее время действия существенно меньше, чем t_{\min} , или не учитывать переходные процессы при рассмотрении моментов времени, заметно превышающих t_{\max} . Если, кроме временных масштабов, учитывать и пространственные, то может быть проанализирована возможность игнорирования волновых процессов, которая обычно используется в расчетах строительных конструкций. Этот подход настолько глубоко укоренился среди расчетчиков, что чаще всего даже не рассматривается его законность. Вместе с тем, современные сооружения иногда имеют такие большие размеры, что время распространения возмущения (например, от сейсмического толчка) оказывается сопоставимым с периодами собственных колебаний. Естественно, что игнорирование процессов передачи возмущения оказывается тогда незаконным.

10.1.2 Динамическая конденсация — процедура Гайяна

Стремление к уменьшению количества динамических степеней свободы часто реализуется путем группировки масс конструкции в относительно небольшом количестве узлов, при этом остальные узлы расчетной схемы оказываются безмассовыми. Кроме того, почти всегда можно пренебречь некоторыми инерционными характеристиками системы, например, связанными с вращательными степенями свободы. Таким образом, возникает задача динамического анализа *системы с неполным числом масс*, в которой число учитываемых динамических степеней свободы может, например, составлять 10% от числа статических степеней свободы [10]. Исключение чисто статических степеней свободы выполняется с использованием процедуры статического уплотнения, которая представлена выше в виде уравнения (3.175). Если же речь идет о частичном исключении динамических степеней свободы, то тогда используется конденсация по Р.Гайяну [11].

Представляется полезным вновь вернуться к описанию этой процедуры с тем, чтобы проанализировать те погрешности, которые возникают при ее применении к более реалистической ситуации. Эта ситуация характеризуется тем, что к безмассовым относят степени свободы, для которых инерционные характеристики не равны нулю, а попросту малы. Тогда вместо (3.174) мы имеем

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{00} & \mathbf{K}_{01} \\ \mathbf{K}_{10} & \mathbf{K}_{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \end{bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{m}_{00} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{m}_{11} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \end{bmatrix}, \quad (10.2)$$

где диагональная матрица масс \mathbf{m}_{00} представлена элементами намного меньшими, чем элементы матрицы \mathbf{m}_{11} .

Предположим, что между подвекторами Ψ_0 и Ψ_1 может быть установлена линейная зависимость

$$\Psi_0 = \mathbf{T} \Psi_1, \quad (10.3)$$

причем матрица линейного преобразования \mathbf{T} сохраняется без изменений в процессе колебательного движения системы. Тогда полный вектор Ψ может быть представлен в виде

$$\Psi = \begin{bmatrix} \Psi_0 \\ \Psi_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{I} \end{bmatrix} \Psi_1, \quad (10.4)$$

где \mathbf{I} — единичная матрица порядка равного размерности подвектора Ψ_1 .

Подстановка (10.4) в (10.2) и домножение полученного равенства слева на матрицу $[[\mathbf{T}^T \mathbf{I}]]$ приводит к уравнениям свободных колебаний системы с укороченным набором динамических степеней свободы (все динамические степени свободы, собранные в векторе Ψ_0 , исключаются)

$$(\mathbf{K}_{11} + \mathbf{T}^T \mathbf{K}_{00} \mathbf{T} + \mathbf{T}^T \mathbf{K}_{01} + \mathbf{K}_{10} \mathbf{T}) \Psi_1 = \omega^2 (\mathbf{m}_{11} + \mathbf{T}^T \mathbf{m}_{00} \mathbf{T}) \Psi_1. \quad (10.5)$$

Для того, чтобы найти матрицу преобразования \mathbf{T} , из первого уравнения системы (10.2) получим

$$\Psi_0 = -\mathbf{K}_{00}^{-1} \mathbf{K}_{01} \Psi_1 + \omega^2 \mathbf{K}_{00}^{-1} \mathbf{m}_{00} \Psi_0. \quad (10.6)$$

Если в (10.6), в силу малости масс \mathbf{m}_{00} пренебречь вторым слагаемым, то искомая матрица преобразования \mathbf{T} запишется в виде

$$\mathbf{T} = -\mathbf{K}_{00}^{-1} \mathbf{K}_{01}, \quad (10.7)$$

и уравнение (10.2) при таком выборе \mathbf{T} и с учетом условий симметрии полной матрицы жесткости $\mathbf{K}_{01}^T = \mathbf{K}_{10}$ упростится до уравнения

$$\mathbf{K}^* \Psi_1 = \omega^2 \mathbf{M}^* \Psi_1, \quad (10.8)$$

где \mathbf{K}^* и \mathbf{M}^* приведенные (иногда говорят — *сконденсированные*) матрицы жесткости и масс соответственно

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{K}_{11} - \mathbf{K}_{10} \mathbf{K}_{00}^{-1} \mathbf{K}_{01}, \quad (10.9)$$

$$\mathbf{M}^* = \mathbf{m}_{11} + \mathbf{K}_{10} \mathbf{K}_{00}^{-1} \mathbf{m}_{00} \mathbf{K}_{00}^{-1} \mathbf{K}_{01}. \quad (10.10)$$

Уравнение (10.8) представляет собой *сконденсированное* уравнение свободных колебаний системы, содержащее в себе как технику статической конденсации, так и динамическую конденсацию по Гайяну. Если в выраже-

нии для приведенной матрицы масс в (10.10) сохранить только первое слагаемое, пренебрегая членом с малой массой m_{00} , то приходим к процедуре статической конденсации. В противном случае речь идет о динамической конденсации по Гайяну. Различие между этими двумя процедурами заключается в том, что при статической конденсации массы m_{00} просто отбрасываются при анализе свободных колебаний системы; при динамической же конденсации эти массы перераспределяются между остальными инерциальными характеристиками.

Сопоставим решения первоначальной задачи (10.2) и задачи (10.8). Пусть ω_i ($i = 1, \dots, n$) — упорядоченный по возрастанию спектр частот исходной задачи (10.2), а ω_{Si} и ω_{Di} ($i = 1, \dots, n_1$) — спектры частот соответственно статически и динамически сконденсированных задач. Здесь n — число динамических степеней свободы исходной задачи, n_1 — число динамических степеней свободы системы, оставшихся после конденсации. Несложно заметить, что динамически сконденсированная задача отвечает колебаниям механической системы, которая получается из исходной системы наложением на ее возможные формы колебаний связей (10.3), где матрица полисвязей T определяется соотношением (10.7). Опираясь на теорему Релея, немедленно получаем оценку

$$\omega_i \leq \omega_{Di} \quad (i = 1, \dots, n_1). \quad (10.11)$$

С другой стороны, механическая система, отвечающая статически сконденсированной задаче на собственные колебания, получается из динамически сконденсированной системы простым отбрасыванием части масс. Не останавливаясь на формальном обосновании, заметим, что снижение инерциальных характеристик системы способно смещать частотный спектр только вправо. Это утверждение легко доказывается в общем виде, если опираться на вариационное описание задачи о собственных значениях. В результате имеем

$$\omega_{Di} \leq \omega_{Si} \quad (i = 1, \dots, n_1). \quad (10.12)$$

Объединяя оценки (10.11) и (10.12), получаем важное качественное соотношение, свидетельствующее о том, что в отношении частотного спектра динамическая конденсация всегда точнее статической конденсации.

Воспользуемся теперь соотношением для определения поправок первого порядка малости для собственных частот и собственных векторов возмущенных матриц [12]. Безразмерные величины поправок пропорциональны элементам матрицы

$$C = \Phi_0^T \Delta K \Phi_0 + \Phi_0^T \Delta M \Lambda_0 \Phi_0, \quad (10.13)$$

где ΔK и ΔM — возмущения матрицы жесткости и матрицы инерции соответственно; Φ_0 — матрица собственных векторов невозмущенной системы и Λ_0 — диагональная матрица собственных чисел невозмущенной системы. Абсолютная величина поправок пропорциональна норме матрицы C

$$\|C\| \leq -\|\Phi_0\|^T \|\Phi_0\| (-\|\Delta K\| + \|\Delta M\| \|\Lambda_0\|) = P_\Phi(-\|\Delta K\| + \|\Delta M\| \|\Lambda_0\|), \quad (10.14)$$

где P_Φ — спектральное число обусловленности.

Для исходной задачи $\|C\| = \|\mathbf{m}_{00}\|$, а задача (10.8) отличается только членами малого порядка ε в матрице инерции, т.е. $\Delta K = 0$. Тогда для этой задачи

$$\|C^*\| = \|\mathbf{K}_{01} \mathbf{K}_{00}^{-1} \mathbf{m}_{11} \mathbf{K}_{00}^{-1} \mathbf{K}_{10}\| \leq \frac{\|\mathbf{K}_{01}\| \|\mathbf{K}_{10}\|}{\|\mathbf{K}_{11}\|^2} \|\mathbf{m}_{00}\| < \|\mathbf{m}_{00}\| < \varepsilon. \quad (10.15)$$

Примерно такую же оценку погрешности можно получить для задачи, где в приведенной матрице масс не учитываются внедиагональные члены, и вместо матрицы масс по (10.10) используется

$$\mathbf{M}^{**} = \text{diag}(\mathbf{M}_{11} - \mathbf{K}_{01} \mathbf{K}_{00}^{-1} \mathbf{m}_{11} \mathbf{K}_{00}^{-1} \mathbf{K}_{10}). \quad (10.16)$$

У этой системы мы имеем удобную для вычислений структуру с диагональной матрицей масс.

При решении динамических задач не обязательно учитывать все найденные формы собственных колебаний, многие из них фактически не возбуждаются при конкретном внешнем воздействии. Проблема корректного задания необходимого числа учитываемых форм собственных колебаний в общем случае решается методом попыток, поскольку получить априорную оценку довольно трудно. Однако имеются и такие случаи, когда в нормативных документах, регламентирующих расчет на то или иное динамическое воздействие, рекомендуется учет определенного числа форм собственных колебаний. Так, например, СНиП 2.01.07–85 ограничивает диапазон частот, которые должны учитываться при расчете конструкций на пульсации ветрового потока, а СНиП II–7–81 регламентирует использование не менее 15 форм колебаний при сейсмическом расчете бетонных плотин и не менее 15 форм для плотин из грунтовых материалов. Более последовательны нормы США, которые требуют, чтобы сумма обобщенных масс по учитываемым формам собственных колебаний была не меньшей, чем 90% общей массы системы [9].

При выполнении этой нормы снижается риск того, что некая очень гибкая часть сооружения («хлыст»), практически изолированные собственные колебания которой определяют первые собственные формы, будет учтена, а колебания всего остального сооружения окажутся проигнорированными.

10.2 Интегрирование уравнений движения

В разделе 3.7 при рассмотрении движений механической системы с конечным числом динамических степеней свободы использовалось разложение

$$\mathbf{u}(t) = \sum_{i=1}^n y_i(t) \Psi_i = \Phi \mathbf{y}(t), \quad (10.17)$$

где Φ — матрица, столбцы которой представляют собой векторы свободных колебаний системы Ψ_i ($i = 1, \dots, n$).

Линейное преобразование (10.17) позволило свести задачу расчета системы с конечным числом динамических степеней свободы к анализу независимых движений совокупности одномассовых систем, причем в уравнение движения каждой такой одномассовой системы было введено дополнительное слагаемое, учитывающее вязкое сопротивление движению, пропорциональное скорости

$$M_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} + C_i \frac{dy_i}{dt} + \omega_i^2 M_i y_i = P_i(t) \quad (i = 1, \dots, n). \quad (10.18)$$

Внимательный читатель может заметить здесь (и правильно, если заметит) некий подвох. В самом деле, сначала предлагается в общих уравнениях движения, не учитывающих силы сопротивления, провести переход от вектора исходных обобщенных координат $\mathbf{u}(t)$ к так называемым *главным координатам* $y(t)$, воспользовавшись разложением по (10.17), а затем в каждое из уравнений уже распавшейся системы ввести независимые друг от друга силы сопротивления¹.

Во многих случаях такой, казалось бы незаконный, прием вполне оправдан и аргументируется отсутствием надежной исходной информации о распределении сил сопротивления движению системы. При таких обстоятельствах равноприменима почти любая здравая идея, в том числе и упрощающая расчет гипотеза о том, что силы вязкого сопротивления можно независимо вводить в каждое из уравнений (10.18). Однако в тех ситуациях, когда конструкция составлена из разнородных материалов, обладающих резко различными диссипативными свойствами, а также при наличии в системе конструктивных демпферов, введение независимых сил сопротивления в уравнение (10.18) приводит к чувствительным ошибкам в результатах расчетов. Это особенно отчетливо проявляется при близких к резонансным режимах внешних воздействий, причем демпфирование существенно влияет на формы колебаний системы. При таких обстоятельствах целесообразно исходить из более аккуратной постановки задачи, что приводит к необходимости численного интегрирования уравнений движения системы.

В общем случае уже в исходные уравнения движения (3.142) вводится вязкое сопротивление, так что эти уравнения принимают вид

$$M\ddot{\mathbf{u}} + C\dot{\mathbf{u}} + K\mathbf{u} = \mathbf{p}(t) \quad (10.19)$$

с симметричной матрицей диссипативных коэффициентов $C = [[c_{ij}]]$ ($i, j = 1, \dots, n$).

Из теории квадратичных форм известно [13], что всегда существует такое линейное преобразование координат, которое позволяет одновременно при-

¹ Иногда говорят о *физических координатах* $\mathbf{u}(t)$ и *нормальных координатах* $y(t)$. Хотя это и не канонизировано, все же наиболее часто для вектора главных координат используют обозначение $\mathbf{q}(t)$. Мы отступаем от этого неписанного правила потому, что символ \mathbf{q} использован нами ранее в главе 3 для других целей.

вести две симметричные матрицы одинакового порядка к диагональному виду, если хотя бы одна из матриц (в нашем случае это матрица \mathbf{M}) положительно определена. Однако для трех матриц (здесь это матрицы \mathbf{K} , \mathbf{M} и \mathbf{C}) в общем случае этого не удастся сделать. Этого можно добиться в том частном случае, когда матрица демпфирования \mathbf{C} может быть представлена в виде линейной комбинации двух других матриц. Пусть, например,

$$\mathbf{C} = a_M \mathbf{M} + a_K \mathbf{K}, \quad (10.20)$$

что соответствует случаю так называемого *пропорционального демпфирования*. Тогда уравнение (10.19) переписется в виде

$$\mathbf{M}(\ddot{\mathbf{u}} + a_M \dot{\mathbf{u}}) + \mathbf{K}(\mathbf{u} + a_K \dot{\mathbf{u}}) = \mathbf{p}(t), \quad (10.21)$$

и переход к главным координатам по (10.17) вновь приводит к распадающейся системе уравнений

$$M_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} + M_i (a_M + \omega_i^2 a_K) \frac{dy_i}{dt} + \omega_i^2 M_i y_i = P_i(t) \quad (i = 1, \dots, n), \quad (10.22)$$

что полностью совпадает с (10.18), если там положить

$$C_i = (a_M + \omega_i^2 a_K) M_i. \quad (10.23)$$

Перейдем теперь к более общему случаю, когда гипотеза о пропорциональном демпфировании оказывается слишком грубой, и для решения уравнения (10.19) приходится отказываться от разложений по формам свободных колебаний, что заставляет прибегать к численному интегрированию.

Есть и еще один мотив, подталкивающий к использованию процедур численного интегрирования. Когда внешнее возмущение представляет собой достаточно сложную функцию времени, и это возмущение задано на ограниченном временном интервале, инженера может интересовать состояние системы в переходных процессах. В этом случае, даже при отсутствии вязкого сопротивления движению или при пропорциональном демпфировании, становится уместным численное интегрирование.

Основная идея, используемая при численном интегрировании, на удивление, проста и алгоритмична. Интервал времени $[0, T]$, на котором инженера предположительно интересует поведение механической системы, разбивается на относительно короткие промежутки времени Δt (как правило, равные для упрощения процедуры численного интегрирования), а на каждом из промежутков от достигнутого времени t до $t + \Delta t$ входящие в уравнение (10.19) производные приближенно заменяются разностными отношениями. Используя информацию о достигнутых перемещениях, скоростях и ускорениях всех масс системы в момент времени t , на основе разностного аналога уравнений (10.19) получают новые значения перемещений, скоростей и ускорений, относящиеся к очередному моменту времени $t + \Delta t$, которые теперь становятся начальными условиями для следующего шага интегрирования, и т.д. На механическом уровне этот процесс интерпретируется как пошаговое выполнение условий динамического равновесия в приращениях с накопле-

нием результирующих перемещений и их производных первого и второго порядков.

Известно множество способов построения процедуры численного интегрирования уравнений (10.19), различающихся, по сути, способом введения разностных отношений в эти уравнения [14]. Принято различать эти способы отнесением их к *явным* и *неявным* схемам интегрирования. Если при определении перемещений $\mathbf{u}_{t+\Delta t} = \mathbf{u}(t + \Delta t)$ используется условие динамического равновесия с запаздыванием (в предшествующий момент времени t), то есть

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_t + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_t + \mathbf{K}\mathbf{u}_t = \mathbf{p}_t, \quad (10.24)$$

то говорят о схемах явного интегрирования. В противном случае, когда определение перемещений $\mathbf{u}_{t+\Delta t}$ опирается на опережающее для интервала времени $[t, t+\Delta t]$ условие динамического равновесия

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} + \mathbf{K}\mathbf{u}_{t+\Delta t} = \mathbf{p}_{t+\Delta t}, \quad (10.25)$$

говорят о применении неявных схем. В (10.24) и (10.25) нижними индексами помечаются фиксированные моменты времени, к которым относятся соответствующие величины.

Преимущество явных схем интегрирования заключается в том, что на каждом шаге интегрирования они менее трудоемки по вычислительным затратам. Однако, как показывает практика применения явных схем, подтверждаемая и теоретическим анализом [14], явные схемы поражены весьма неприятным свойством — быстрым накоплением погрешности вычислений². Именно поэтому в современных программных разработках промышленного применения наибольшее распространение получили неявные схемы, из которых отметим два наиболее популярных — это β -метод Ньюмарка и θ -метод Вилсона³.

Согласно методу Ньюмарка используются следующие параметрически зависящие от β аппроксимации

² Специалистам по численному анализу хорошо известны такие понятия, как условно устойчивые схемы интегрирования и безусловно устойчивые, связанные с анализом накопления погрешностей при численном интегрировании. Мы не останавливаемся на обсуждении этих вопросов здесь, отсылая заинтересованного читателя к специальной литературе [14].

³ Мы отступаем от оригинального и ставшего уже традиционным обозначения θ -метода Вилсона в пользу другого возможного написания θ той же греческой буквы «тета» во избежание путаницы в обозначениях, поскольку символ θ в этой главе книги использован для обозначения частоты внешнего гармонического возмущения.

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} &= \frac{1}{\beta \Delta t^2} [\mathbf{u}_{t+\Delta t} - \mathbf{u}_t - \Delta t \dot{\mathbf{u}}_t] - \frac{1/2 - \beta}{\beta} \ddot{\mathbf{u}}_t, \\ \dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} &= \dot{\mathbf{u}}_t + \frac{1}{2} \Delta t [\ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} + \ddot{\mathbf{u}}_t], \\ \mathbf{u}_{t+\Delta t} &= \mathbf{u}_t + \Delta t \dot{\mathbf{u}}_t + (\Delta t)^2 \left[(1/2 - \beta) \ddot{\mathbf{u}}_t + \beta \ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} \right].\end{aligned}\quad (10.26)$$

Метод Ньюмарка, в зависимости от выбора параметра β , включает в себя как частный случай следующие схемы:

- $\beta = 0$ — схема интегрирования по Эйлера;
- $\beta = 1/6$ — схема с линейным ускорением;
- $\beta = 1/4$ — схема с постоянным средним ускорением;
- $\beta = 1/2$ — схема с центральными разностями;
- $\beta = 1$ — схема с обратными разностями.

Ньюмарк обосновал безусловную устойчивость схемы интегрирования при $\beta = 1/4$, что соответствует случаю постоянного среднего ускорения на каждом из временных интервалов Δt .

В методе Вилсона принимается линейный закон изменения ускорений на интервале времени $[t, t + \vartheta \Delta t]$, где $\vartheta \geq 1$, что приводит к следующим аппроксимациям

$$\begin{aligned}\ddot{\mathbf{u}}_{t+\vartheta \Delta t} &= \frac{6}{\vartheta^2 \cdot \Delta t^2} [\mathbf{u}_{t+\vartheta \Delta t} - \mathbf{u}_t] - \frac{6}{\vartheta \cdot \Delta t} \dot{\mathbf{u}}_t - 2 \ddot{\mathbf{u}}_t, \\ \dot{\mathbf{u}}_{t+\vartheta \Delta t} &= \dot{\mathbf{u}}_t + \frac{3}{\vartheta \cdot \Delta t} [\mathbf{u}_{t+\vartheta \Delta t} - \mathbf{u}_t] - 2 \dot{\mathbf{u}}_t - \frac{\vartheta}{2} \Delta t \ddot{\mathbf{u}}_t, \\ \mathbf{u}_{t+\vartheta \Delta t} &= \mathbf{u}_t + \vartheta \cdot \Delta t \dot{\mathbf{u}}_t + \frac{\vartheta^2 \cdot \Delta t^2}{6} [\ddot{\mathbf{u}}_{t+\vartheta \Delta t} + 2 \ddot{\mathbf{u}}_t].\end{aligned}\quad (10.27)$$

Анализ схемы Вилсона показывает ее безусловную устойчивость при выборе параметра $\vartheta \geq 1,37$. В практических расчетах обычно принимают $\vartheta = 1,4$.

С точки зрения пользователя программной продукции критичными являются следующие решения, которые необходимо принять, прежде чем приступить непосредственно к расчету. Прежде всего, необходимо описать историю динамического нагружения, иначе говоря, задаться в той или иной форме векторной функцией времени $\mathbf{p}(t)$. Далее нужно сориентироваться в выборе доступной для данной программы схемы интегрирования и установить значение параметра схемы. И наконец, необходимо назначить шаг интегрирования Δt . Так, например, в программе **GTSTRUDL** пользователь имеет гибкую возможность выбора не только схемы интегрирования с назначением параметра (при желании, выбор параметра производится автоматически), но и разбить временной участок на несколько последовательных

интервалов времени с указанием своего шага интегрирования на каждом таком интервале. При назначении шага Δt безусловно устойчивые схемы интегрирования позволяют опираться на соображения точности расчета без оглядки на возможность накопления погрешности вычислений. Обычно считается, что удовлетворительные результаты могут быть получены при выполнении условия

$$\Delta t / T_k \leq 0,01, \quad (10.28)$$

где T_k — период характерной k -й формы свободных колебаний недемпфированной конструкции. Форма свободных колебаний (k -я форма) считается характерной, если нет необходимости принимать во внимание все последующие формы колебаний, начиная с $(k+1)$ -й.

Естественно, что выбор номера характерной формы зависит от вида внешнего возмущения. Понятно также, что это — лишь качественная оценка, которая может потребовать уточнений по результатам расчетов. При относительно коротких историях нагружения бывает достаточным и более грубый шаг по времени. Так, например, нормы США для проектирования АЭС при расчете на сейсмический толчок рекомендуют выбирать шаг таким образом, чтобы при его уменьшении вдвое изменение результата не превышало 10%, что обычно достигается при шаге порядка $(0,08 \dots 0,10)T_k$.

Завершая этот раздел, в котором, по необходимости, проблема численного интегрирования уравнений движения затронута лишь легким поверхностным касанием, подчеркнем весьма высокую вычислительную трудоемкость этих процедур. Именно поэтому всякий раз нужны веские основания для проведения анализа динамического поведения конструкции с помощью численного интегрирования.

10.3 Вынужденные колебания при гармоническом воздействии

В отечественных нормативных документах (см., например, [2, 3]) при расчете зданий, фундаментов под машины с динамическими нагрузками и других строительных конструкций регламентируется использование гипотезы Е.С.Сорокина по учету внутреннего сопротивления в материале при расчете таких конструкций на динамическое воздействие нагрузки в близких к резонансным режимах.

Не останавливаясь на дискуссии по поводу достоинств и недостатков гипотезы Е.С.Сорокина (см., например, [16]), сконцентрируем внимание на вычислительном аспекте, порождаемом этой проблемой. Согласно методике Сорокина [17] учет внутреннего трения при колебаниях линейной системы может быть выполнен с применением комплексного модуля упругости для материала конструкции. Уравнения колебаний составляются для соответствующей идеально упругой системы, но в комплексной форме, в которой модуль упругости материала формально умножается на коэффициент $(1 + i\gamma)$,

где γ — так называемый коэффициент неупругого сопротивления материала, $i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица.

Считая, что входящие в уравнения движения перемещения механической системы также представляют из себя комплексные величины, получаем отсюда комплексное уравнение движения механической системы. Вещественная часть решения этого уравнения, соответствующая вещественной части комплексной возмущающей силы, и является решением поставленной задачи.

Рассмотрим случай колебаний механической системы с конечным числом динамических степеней свободы, предполагая сначала для простоты, что конструкция однородна по материалу, точнее говоря, будем считать, что коэффициент неупругого сопротивления γ является константой — одинаков для всех элементов и частей конструкции.

Обозначая число динамических степеней свободы через n , запишем сначала уравнения движения линейной системы без учета затухания. Имеем

$$M\ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{P}(t). \quad (10.29)$$

Здесь \mathbf{u} — вектор перемещений по направлениям динамических степеней свободы системы, \mathbf{M} — матрица инерциальных характеристик системы (матрица масс), \mathbf{K} — матрица жесткости системы, соответствующая выбранным динамическим степеням свободы. Понятно, что левая часть уравнения (10.29) представляет собой сумму (по каждой из динамических степеней свободы) силы инерции и упругой восстанавливающей силы, которая, в соответствии с принципом Даламбера, приравнивается внешней возмущающей нагрузке \mathbf{P} , изменяющейся со временем t . Так обстоит дело при динамическом воздействии нагрузки на идеально упругую линейную консервативную систему.

Компоненты матрицы жесткости \mathbf{K} при одновременном и пропорциональном изменении модулей упругости всех элементов конструкции изменяются пропорционально общему множителю — коэффициенту при модуле упругости. В рассматриваемом нами случае таковым общим множителем является комплексная величина $(1 + i\gamma)$. Таким образом, уравнение (10.29) при учете сил внутреннего сопротивления в рамках гипотезы Е.С.Сорокина переписывается в виде

$$M\ddot{\mathbf{w}} + (1 + i\gamma)\mathbf{K}\mathbf{w} = \mathbf{F}(t), \quad (10.30)$$

где \mathbf{w} — искомый вектор комплексных перемещений, $\mathbf{F}(t)$ — вектор комплексных внешних сил.

Оба этих комплексных вектора раскладываются на свою вещественную и мнимую части

$$\mathbf{w} = \mathbf{u} + i\mathbf{v}, \quad \mathbf{F} = \mathbf{P} + i\mathbf{Q}. \quad (10.31)$$

При гармоническом воздействии внешнюю нагрузку \mathbf{P} с заданной частотой внешнего возмущения θ и амплитудным значением \mathbf{P}_0 можно записать в виде

$$\mathbf{P}(t) = \mathbf{P}_0 \cos \theta t, \quad (10.32)$$

при этом, следуя методике Е.С.Сорокина, мнимая часть внешнего возмущения принимается изменяющейся по времени по тому же закону, но со сдвигом фазы на угол $\pi/2$, иначе говоря,

$$\mathbf{Q}(t) = \mathbf{P}_0 \sin \theta t. \quad (10.33)$$

В экспоненциальной форме комплексная внешняя нагрузка \mathbf{F} устанавливается при этом в виде

$$\mathbf{F} = \mathbf{P}_0 e^{i\theta t}. \quad (10.34)$$

В случае установившихся вынужденных колебаний решение для векторного дифференциального уравнения (10.30) принимается в виде

$$\mathbf{w} = \mathbf{Z} e^{i\theta t}, \quad (10.35)$$

где \mathbf{Z} — вектор, который мы будем называть *вектором комплексных амплитуд* искомых перемещений. Этот вектор также может быть представлен разложением на свою вещественную и мнимую части

$$\mathbf{Z} = \mathbf{X} + i\mathbf{Y}. \quad (10.36)$$

После подстановок (10.34) и (10.35) в дифференциальное уравнение (10.30) получим систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестного вектора \mathbf{Z} комплексных амплитуд

$$[(1 + i\gamma)\mathbf{K} - \theta^2\mathbf{M}]\mathbf{Z} = \mathbf{P}_0. \quad (10.37)$$

Разделяя теперь вещественные и мнимые части векторного равенства (10.37), приходим к системе уравнений относительно вещественной \mathbf{X} и мнимой \mathbf{Y} частей комплексного вектора \mathbf{Z}

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{K} - \theta^2\mathbf{M}) & -\gamma\mathbf{K} \\ -\gamma\mathbf{K} & -(\mathbf{K} - \theta^2\mathbf{M}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_0 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (10.38)$$

Поскольку нас интересуют резонансные или близкие к резонансным режимы работы конструкции, это означает, что матрица $(\mathbf{K} - \theta^2\mathbf{M})$ вырождена или близка к вырожденной — в резонансных режимах частота возмущения θ совпадает с одной из собственных частот колебаний линейной системы ω_k ($k = 1, \dots, n$), определяемых решением векового уравнения

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2\mathbf{M}) = 0. \quad (10.39)$$

Если считать, что рассматриваемая совокупность из n динамических степеней свободы не содержит возможных перемещений конструкции как жесткого тела, то в спектре собственных чисел матрицы \mathbf{K} не окажется нулевых собственных чисел (более того, все собственные числа матрицы \mathbf{K} будут строго положительны) и, следовательно, сама матрица жесткости \mathbf{K} окажется невырожденной, а значит обратимой

$$\mathbf{D} = \mathbf{K}^{-1}. \quad (10.40)$$

Матрица \mathbf{D} называется *матрицей податливости системы*.

Из второго уравнения матрично-векторной системы (10.38) вектор \mathbf{X} может быть выражен через вектор \mathbf{Y} , а именно

$$\mathbf{X} = -\gamma^{-1}\mathbf{D}(\mathbf{K} - \theta^2\mathbf{M})\mathbf{Y}. \quad (10.41)$$

Подставляя далее (10.41) в первое уравнение системы (10.38), получим

$$\mathbf{Y} = -[\gamma^2\mathbf{K} + (\mathbf{K} - \theta^2\mathbf{M})\mathbf{D}(\mathbf{K} - \theta^2\mathbf{M})]^{-1}\gamma\mathbf{P}_0, \quad (10.42)$$

и, возвращаясь снова к (10.41), находим окончательно

$$\mathbf{X} = \mathbf{D}(\mathbf{K} - \theta^2\mathbf{M})[\gamma^2\mathbf{K} + (\mathbf{K} - \theta^2\mathbf{M})\mathbf{D}(\mathbf{K} - \theta^2\mathbf{M})]^{-1}\mathbf{P}_0. \quad (10.43)$$

Чтобы быть уверенным в возможности применения формул (10.42) и (10.43), следует убедиться в том, что заключенная в квадратные скобки в правой части (10.43) матрица

$$\gamma^2\mathbf{K} + (\mathbf{K} - \theta^2\mathbf{M})\mathbf{D}(\mathbf{K} - \theta^2\mathbf{M}) \quad (10.44)$$

не вырождается при любых значениях θ , если только $\gamma \neq 0$. Для этого, прежде всего, заметим, что при сделанных предположениях относительно закрепления конструкции от жестких смещений матрица жесткости системы \mathbf{K} , а вместе с ней и обратная ей матрица податливости \mathbf{D} не только невырождены, но и положительно определены. Далее, в силу симметрии матриц \mathbf{K} и \mathbf{M} , выражение для второго слагаемого в (10.44) можно переписать в виде

$$(\mathbf{K} - \theta^2\mathbf{M})^T\mathbf{D}(\mathbf{K} - \theta^2\mathbf{M}), \quad (10.45)$$

откуда вытекает положительная полуопределенность матрицы (10.45) (неотрицательность всех ее собственных чисел). Поскольку сумма положительно определенной матрицы $\gamma^2\mathbf{K}$ и положительно полуопределенной матрицы $(\mathbf{K} - \theta^2\mathbf{M})^T\mathbf{D}(\mathbf{K} - \theta^2\mathbf{M})$ гарантированно является положительно определенной матрицей, то отсюда следует допустимость операции обращения в формулах (10.42) и (10.43).

Не следует думать, что вещественная часть \mathbf{X} вектора комплексных амплитуд \mathbf{Z} и вектор амплитуд вещественной части \mathbf{u} комплексного вектора перемещений \mathbf{w} совпадают между собой (аналогичное замечание относится и к мнимым частям тех же векторов). Действительно, из (10.35) и (10.36) находим, что

$$\mathbf{w} = (\mathbf{X} + i\mathbf{Y})e^{i\theta t} = (\mathbf{X}\cos\theta t - \mathbf{Y}\sin\theta t) + i(\mathbf{Y}\cos\theta t + \mathbf{X}\sin\theta t), \quad (10.46)$$

Следовательно

$$\mathbf{u} = \mathbf{X}\cos\theta t - \mathbf{Y}\sin\theta t, \quad \mathbf{v} = \mathbf{Y}\cos\theta t + \mathbf{X}\sin\theta t. \quad (10.47)$$

Введем в рассмотрение вектор амплитуд \mathbf{A} и вектор фазовых сдвигов μ , компоненты которых определим через компоненты векторов \mathbf{X} и \mathbf{Y} формулами

$$A_i = \sqrt{X_i^2 + Y_i^2}, \quad \cos \mu_i = X_i / A_i, \quad \sin \mu_i = Y_i / A_i. \quad (10.48)$$

Воспользовавшись теперь известными из тригонометрии формулами для синуса и косинуса от суммы углов, получим из (10.47) и (10.48)

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} A_1 \cos(\theta t + \mu_1) \\ A_2 \cos(\theta t + \mu_2) \\ \vdots \\ A_n \cos(\theta t + \mu_n) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} A_1 \sin(\theta t + \mu_1) \\ A_2 \sin(\theta t + \mu_2) \\ \vdots \\ A_n \sin(\theta t + \mu_n) \end{bmatrix}. \quad (10.49)$$

Таким образом, видим, что соответственные компоненты действительной и мнимой частей вектора перемещений совпадают по амплитуде и сдвинуты по отношению друг к другу по фазе на угол $\pi/2$.

В частности, в случае одномассовой системы (точнее, для системы с одной динамической степенью свободы, то есть при $n = 1$), из формул (10.42) и (10.43) получаем

$$X = \frac{P_0}{k} \frac{1 - \theta^2 / \omega^2}{(1 - \theta^2 / \omega^2)^2 + \gamma^2}, \quad Y = - \frac{P_0}{k} \frac{\gamma}{(1 - \theta^2 / \omega^2)^2 + \gamma^2}, \quad (10.50)$$

где принято во внимание, что для одномассовой системы с инерциальной характеристикой m и жесткостью системы по направлению движения массы k частота свободных колебаний ω определяется формулой $\omega^2 = k / m$. Воспользовавшись теперь формулами (10.48), найдем амплитудное значение A перемещений массы

$$A = \frac{P_0}{k} \frac{1}{\sqrt{(1 - \theta^2 / \omega^2)^2 + \gamma^2}}, \quad (10.51)$$

совпадающее с известным решением.

Формулами (10.42), (10.43) и (10.48) полностью определяется решение задачи поиска динамических перемещений масс конструкции при установившихся колебаниях системы с конечным числом динамических степеней свободы при учете сил внутреннего трения в материале.

Отметим, что в книге Р.А.Резникова [18] приведен алгоритм решения этой же задачи, основанный на разложении искомым перемещений и внешнего воздействия по формам собственных колебаний соответствующей идеально упругой системы, лишенной внутреннего трения, что требует значительного объема дополнительных вычислений. В самом деле, по алгоритму Р.А.Резникова требуется предварительное решение полной проблемы на собственные значения и собственные векторы для матрицы порядка n , тогда как по изложенному здесь алгоритму эта трудоемкая (и коварная) в вычислительном отношении задача замещается операцией обращения матрицы (10.44) того же порядка n .

Определением перемещений масс конструкции решение не завершается, так как далее необходимо будет найти все остальные интересующие инже-

нера компоненты напряженно-деформированного состояния конструкции. С этой целью воспользуемся цепочкой следующих тригонометрических преобразований

$$\begin{aligned} & a \cos(\theta t + \alpha) + b \cos(\theta t + \beta) = \\ & = a(\cos\theta t \cos\alpha - \sin\theta t \sin\alpha) + b(\cos\theta t \cos\beta - \sin\theta t \sin\beta) = \\ & = (a \cos\alpha + b \cos\beta) \cos\theta t - (a \sin\alpha + b \sin\beta) \sin\theta t = c \cos(\theta t + \varphi), \end{aligned} \quad (10.52)$$

где

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab\cos(\alpha - \beta)}, \quad (10.53)$$

$$\cos\varphi = (a \cos\alpha + b \cos\beta) / c, \quad \sin\varphi = (a \sin\alpha + b \sin\beta) / c. \quad (10.54)$$

Геометрически эта цепочка преобразований соответствует сложению двух векторов **a** и **b**, заданных в комплексной плоскости своими модулями *a* и *b* (амплитудными значениями) и углами сдвига фаз α и β (рис. 10.3):

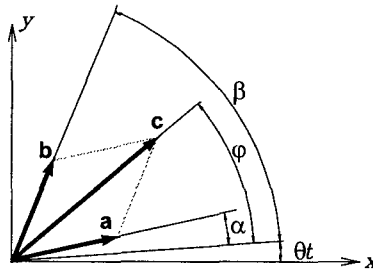


Рис. 10.3. Сложение комплексных векторов

В том случае, когда нас интересует сумма нескольких (скажем, *m*) величин, и для каждого слагаемого известно его амплитудно-фазовое представление

$$c(t) = a_1 \cos(\theta t + \alpha_1) + a_2 \cos(\theta t + \alpha_2) + \dots + a_m \cos(\theta t + \alpha_m), \quad (10.55)$$

можно, исходя из геометрической интерпретации тригонометрических преобразований (10.52) – (10.54), сразу записать выражения для амплитуды *c* и фазы α_c

$$c(t) = c \cos(\theta t + \alpha_c), \quad c = \sqrt{\left(\sum_{j=1}^m a_j \cos\alpha_j \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^m a_j \sin\alpha_j \right)^2}, \quad (10.56)$$

$$\cos \alpha_c = \left(\sum_{j=1}^m a_j \cos \alpha_j \right) / c, \quad \sin \alpha_c = \left(\sum_{j=1}^m a_j \sin \alpha_j \right) / c.$$

Предположим, что нас интересует поведение во времени некоторого кинематического или силового фактора в конструкции — это может быть перемещение выделенной точки конструкции в заданном направлении, угол поворота сечения некоторого стержня, какая-либо компонента деформации, внутренняя сила и т.п. Обозначив интересующий нас фактор через H , представим его в следующем виде

$$H(t) = \sum_{i=1}^n H_i R_i(t) = \mathbf{H}^T \mathbf{R}(t), \quad (10.57)$$

где H_i — значение искомого фактора в конструкции от действия единичной силы $R_i = 1$, приложенной в месте и по направлению i -ой динамической степени свободы системы. Компоненты вектора $\mathbf{R}(t)$ определяются из условия порождения этим вектором, как внешней нагрузкой, перемещений масс конструкции \mathbf{u} , иначе говоря,

$$\mathbf{R} = \mathbf{K} \mathbf{u}. \quad (10.58)$$

Воспользовавшись теперь амплитудно-фазовым представлением вектора перемещений \mathbf{u} в виде (10.49), приходим к следующей линейной комбинации

$$H(t) = a_1 \cos(\theta t + \mu_1) + a_2 \cos(\theta t + \mu_2) + \dots + a_n \cos(\theta t + \mu_n), \quad (10.59)$$

где вектор \mathbf{a} с компонентами a_1, \dots, a_n отыскивается из условия

$$\mathbf{a} = \mathbf{K} \mathbf{H}. \quad (10.60)$$

Поскольку нас интересует амплитудно-фазовое представление фактора H , то к (10.59) применяется рассмотренное выше тригонометрическое преобразование (10.53) — (10.56). В результате получим

$$H(t) = H_0 \cos(\theta t + \mu_H). \quad (10.61)$$

Отношение амплитуды H_0 к сумме амплитуд a_i составляющих компонент в формуле (10.59) называется *коэффициентом синфазности* η фактора H , то есть

$$\eta = \sqrt{\left(\sum_{j=1}^n a_j \cos \mu_j \right)^2 + \left(\sum_{j=1}^n a_j \sin \mu_j \right)^2} / \sum_{j=1}^n a_j. \quad (10.62)$$

Ясно, что коэффициент синфазности всегда меньше единицы и равен единице только в случае синфазных колебаний всех масс системы, иными словами, при условии совпадения углов сдвига фаз для всех масс системы

$$\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_n . \quad (10.63)$$

Остановимся кратко на проблеме поиска напряжений, которая для рассматриваемой постановки динамической задачи имеет некоторые особенности.

Итак, любой вид внутренней силы S в элементах системы (изгибающий момент в стержне, продольная сила, цепное усилие в пластине и т.п.) определяется двумя параметрами — амплитудой A_s и фазовым сдвигом μ_s , причем

$$S = A_s \cos(\theta t + \mu_s) . \quad (10.64)$$

При вычислении динамических напряжений, являющихся линейной комбинацией двух или более силовых факторов, одних лишь амплитудных значений усилий недостаточно, поскольку эти усилия не совпадают в общем случае по фазе. Пусть, например, в сечении некоторого стержня плоской стержневой системы возникает динамический изгибающий момент M и продольная сила N так, что

$$M = M_0 \cos(\theta t + \mu_M) , \quad N = N_0 \cos(\theta t + \mu_N) \quad (10.65)$$

с соответствующими амплитудными (M_0 , N_0) и фазовыми (μ_M , μ_N) параметрами. Тогда нормальное напряжение σ в фибровых волокнах этого сечения определится элементарной формулой сопротивления материалов

$$\sigma = \frac{N}{F} \pm \frac{M}{W} = \frac{N_0}{F} \cos(\theta t + \mu_N) \pm \frac{M_0}{W} \cos(\theta t + \mu_M) , \quad (10.66)$$

где F и W — площадь сечения и момент сопротивления для рассматриваемого фибрового волокна.

Применение цепочки тригонометрических преобразований (10.52) — (10.54) к формуле (10.66) дает возможность записать выражение для напряжения σ через амплитуду σ_0 и фазовый сдвиг μ_σ

$$\sigma = \sigma_0 \cos(\theta t + \mu_\sigma) , \quad (10.67)$$

Понятно, что амплитудное значение напряжения σ_0 и фаза μ_σ будут равны

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= \sqrt{\left(\frac{N_0}{F}\right)^2 + \left(\frac{M_0}{W}\right)^2 \pm 2 \frac{N_0}{F} \frac{M_0}{W} \cos(\mu_N - \mu_M)} , \\ \cos \mu_\sigma &= \left(\frac{N_0}{F} \cos \mu_N \pm \frac{M_0}{W} \cos \mu_M\right) / \sigma_0 , \\ \sin \mu_\sigma &= \left(\frac{N_0}{F} \sin \mu_N \pm \frac{M_0}{W} \sin \mu_M\right) / \sigma_0 . \end{aligned} \quad (10.68)$$

В общем случае, когда напряжение (нормальное σ или касательное τ) является линейной комбинацией нескольких видов усилий, то есть

$$\sigma = a_1 S_1 + a_2 S_2 + \dots + a_m S_m , \quad S_i = S_{0i} \cos(\theta t + \mu_{Si}) , \quad (10.69)$$

где a_i — некоторые константы ($i = 1, \dots, m$), для определения амплитуды σ_0 и фазы μ_σ можно воспользоваться общим случаем, т.е. цепочкой преобразований (10.55) — (10.56).

Обратимся теперь к ситуации, когда интересующее нас динамическое напряжение не может быть представлено в виде линейной комбинации ранее вычисленных динамических усилий. В качестве примера можно указать на проблему поиска главных напряжений σ_1 и σ_2 при известных компонентах тензора напряжений в задаче о плоском напряженном состоянии. В этом и подобных этому случаях представляющее интерес для инженера динамическое напряжение является некоторой нелинейной функцией $f(S_i)$ от динамических усилий S_i , то есть

$$\sigma = a_1 S_1 + a_2 S_2 + a_m S_m, \quad S_i = S_{0i} \cos(\theta t + \mu_{Si}), \quad (10.70)$$

В такой ситуации приемлемым общим подходом, независящим от вида нелинейной функции $f(S_i)$, может оказаться прямой перебор значений σ при дискретном изменении времени t . Поскольку все аргументы функции $f(S_i)$ являются периодическими функциями времени t с одним и тем же периодом $T = 2\pi/\theta$, то и $\sigma(t)$ оказывается периодической функцией с тем же периодом. Это дает возможность ограничиться перебором временного параметра в формуле (10.70) на интервале от нуля до T . В качестве коэффициента синфазности для напряжения σ в этом случае уместно принимать отношение вычисленного амплитудного значения функции $\sigma(t)$ к значению этой же функции от амплитудных значений аргументов.

Понятно также, что привычное для инженера графическое изображение некоторого силового или кинематического фактора в виде эпюр, изолиний и т.п. служит зеркалом статического состояния конструкции. При динамических же воздействиях один и тот же силовой или кинематический фактор (скажем, в разных сечениях стержня) обладает различными фазовыми характеристиками. В силу этого обстоятельства адекватное графическое изображение этого фактора в динамике более уместно представлять с помощью анимации. Другое дело, что амплитудные значения величин рассматриваемого фактора могут быть по-прежнему изображены статически, то есть в виде тех же эпюр, изолиний и т.п., причем эти эпюры представляют собой, по сути, огибающие соответствующих анимационных картин.

Надо сказать, что для изобретательности разработчиков программного обеспечения на этом пути открывается целая гамма новых и, насколько нам известно, еще не реализованных возможностей. Например, весьма показательны для понимания работы конструкции были бы анимационные картины, демонстрирующие совместное изменение во времени как направлений главных напряжений, так и их величин. Нет сомнения, что инженеры-расчетчики высокого уровня квалификации по достоинству оценят новшества подобного рода, повышающие привлекательную конкурентоспособность программной продукции.

Кратко коснемся важной в практическом отношении ситуации, когда конструкция неоднородна по материалу. Все, что нужно для учета неоднород-

ности, — это заменить в уравнении (10.38) матрицу γK на матрицу K_γ . Понятно, что K_γ представляет из себя матрицу жесткости конструкции, собранную из элементов, все жесткостные характеристики которых домножены на коэффициент γ , свой для каждого из элементов. Дальнейшие выкладки аналогичны случаю однородной по материалу конструкции и затруднений не вызывают.

10.3.1 Модель Гордеевой

Все сказанное в этом разделе выше предназначено, главным образом, для разработчиков программной продукции. Что же касается непосредственно пользователей, то еще более 30 лет назад С.П.Гордеевой [19] была предложена расчетная схема, которая, по замыслу, предназначена для получения решений рассматриваемой здесь задачи, не выходя за рамки требований стандартного программного обеспечения.

При обосновании модели Гордеевой будем исходить из системы линейных алгебраических уравнений (10.38), предварительно преобразовав эту систему к форме, удобной для дальнейших построений. Сразу же оговорим, что применение модели Гордеевой принципиально ограничено двумя требованиями

- матрица инерции M должна быть диагональной;
- коэффициент неупругого сопротивления материала γ должен быть одинаков для всех элементов системы.

Особенно существенно последнее требование, так как оно не позволяет использовать модель Гордеевой для конструкций, имеющих в своем составе, например, железобетонные и стальные элементы.

Итак, введем в рассмотрение следующую блочно-диагональную матрицу

$$\begin{bmatrix} -D & 0 \\ 0 & -D \end{bmatrix}. \quad (10.71)$$

Умножая обе части уравнения (10.38) слева на эту матрицу и учитывая соотношение (10.40), получим

$$\begin{bmatrix} (\theta^2 DM - I) & \gamma I \\ \gamma I & (\theta^2 DM - I) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -DP_0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (10.72)$$

где I — единичная квадратная матрица порядка n . Введем также в рассмотрение два новых вектора неизвестных J_x и J_y , положив

$$J_x = \theta^2 M X, \quad J_y = \theta^2 M Y. \quad (10.73)$$

Вспоминая физический смысл векторов X и Y , введенные в (10.73) векторы J_x и J_y уместно рассматривать как вещественную и мнимую части комплексных амплитуд вектора инерционных сил.

После подстановок выражений для \mathbf{X} и \mathbf{Y} из (10.73) в уравнение (10.72) получим

$$\begin{bmatrix} (\mathbf{D} - \theta^2 \mathbf{M}^{-1}) & \gamma \theta^{-2} \mathbf{M}^{-1} \\ \gamma \theta^{-2} \mathbf{M}^{-1} & -(\mathbf{D} - \theta^2 \mathbf{M}^{-1}) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{J}_x \\ \mathbf{J}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{D}\mathbf{P}_0 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (10.74)$$

Сформируем теперь расчетную схему, которая, собственно, и образует модель Гордеевой. Будем считать, что эта система содержит две части, которые назовем *вещественной* и *мнимой* частями модели Гордеевой. Вещественная часть полностью повторяет исходную механическую систему, колебания которой и изучаются. Мнимая часть также повторяет заданную систему, но с заменой жесткостей всех ее составляющих элементов на аналогичные элементы с жесткостными характеристиками противоположного знака.

По направлению движения каждой массы (в направлении каждой из динамических степеней свободы) введем пакет из трех пружин, как это показано на рис. 10.4, где кружком обозначен узел вещественной части модели с массой m_i , а прямоугольником — соответствующий узел мнимой части в модели Гордеевой⁴.

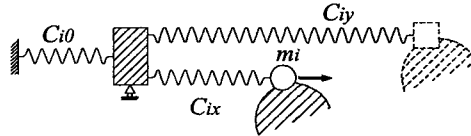


Рис. 10.4. Принцип построения расчетной модели

Вещественная часть приведенной системы на рис. 10.4 условно изображена сплошной линией, а мнимая часть — пунктирной. Жесткости пружин, соединяющих вещественную и мнимую части, в модели Гордеевой выбираются следующим образом

$$c_{ix} = -\frac{m_i \theta^2}{1 + \gamma}, \quad c_{iy} = \frac{m_i \theta^2}{1 - \gamma}, \quad c_{i0} = \frac{m_i \theta^2}{\gamma}. \quad (10.75)$$

Если теперь формально рассчитать образованную приведенную систему на статическое воздействие внешних сил \mathbf{P}_0 , то усилия в пружинах с жесткостями c_{ix} и c_{iy} окажутся совпадающими с i -ми компонентами соответствующих векторов \mathbf{J}_x и \mathbf{J}_y , определяемых системой уравнений (10.74). Действительно, разрезая эти пружины и рассматривая усилия в этих пружинах в качестве неизвестных, образуем систему канонических уравнений метода сил, которая полностью совпадает с системой уравнений (10.74).

⁴ Полагаем, что забавное созвучие между узлом Гордеевой и Гордиевым узлом не вводит читателя в заблуждение. Обойдемся без меча Александра Македонского.

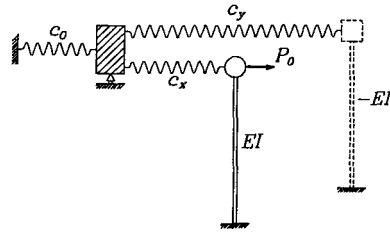


Рис. 10.5. Модель Гордеевой

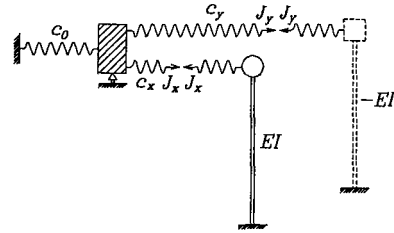


Рис. 10.6. Неизвестные усилия

Для того, чтобы проиллюстрировать применение модели Гордеевой, рассмотрим в качестве примера консольную стойку с сосредоточенной массой m , размещенной на свободном конце консоли, под действием гармонической нагрузки $P(t) = P_0 \cos \theta t$ (рис. 10.5).

Пусть EI — жесткость стойки при изгибе, l — высота стойки. Следуя модели Гордеевой, приведенную расчетную схему при использовании произвольной программы, предназначенной для статического расчета, следует выбирать так, как это показано на рис. 10.5. Воспользуемся методом сил, выбрав основную систему с помощью введения разрезов в пружинах 1 и 2 и обозначив J_x и J_y соответствующие неизвестные усилия в пружинах (рис. 10.6)⁵.

Вводя обозначения

$$k = 3EI/l^3, \quad \omega^2 = k/m, \quad p = \theta^2/\omega^2, \quad (10.76)$$

выпишем выражения для коэффициентов и свободных членов в системе канонических уравнений метода сил

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \frac{1}{k} + \frac{1}{c_x} + \frac{1}{c_0} = \frac{1}{k} - \frac{1}{m\theta^2} = -\frac{1-p}{kp}, \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{1}{c_0} = \frac{\gamma}{kp}, \\ \delta_{22} &= -\frac{1}{k} + \frac{1}{c_y} + \frac{1}{c_0} = -\frac{1}{k} + \frac{1}{m\theta^2} = \frac{1-p}{kp}, \quad \Delta_{1P} = -\frac{P_0}{k}, \quad \Delta_{2P} = 0, \end{aligned} \quad (10.77)$$

$$\begin{aligned} \delta_{11}J_x + \delta_{12}J_y + \Delta_{1P} &= 0, \\ \delta_{21}J_x + \delta_{22}J_y + \Delta_{2P} &= 0. \end{aligned} \quad (10.78)$$

Раскрывая решение системы уравнений (10.78) по правилу Крамера, получа-

⁵ Мы отступаем от общепринятых обозначений для неизвестных метода сил только для того, чтобы избежать путаницы, так как буква X в этом параграфе уже использована нами для обозначения вещественной части комплексных амплитуд Z . Что касается обозначений Гордеевой, то она для величин J_x и J_y использует соответственно символы Z' и Z'' .

ем

$$J_x = \frac{\Delta_{1p}\delta_{22} - \Delta_{2p}\delta_{12}}{\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}\delta_{21}}, \quad J_y = \frac{\Delta_{2p}\delta_{11} - \Delta_{1p}\delta_{21}}{\delta_{11}\delta_{22} - \delta_{12}\delta_{21}}, \quad (10.79)$$

что после подстановок по формулам (10.77) и элементарных преобразований дает

$$J_x = \frac{P_0}{k} \frac{kp(1-p)}{(1-p)^2 + \gamma^2}, \quad J_y = -\frac{P_0}{k} \frac{kp\gamma}{(1-p)^2 + \gamma^2}. \quad (10.80)$$

Перемещения X и Y , отвечающие действительной и мнимым частям решения исходной задачи по модели Гордеевой, определяются на основании формул (10.73), которые в данном случае примут вид

$$X = \frac{J_x}{kp} = \frac{P_0}{k} \frac{1-p}{(1-p)^2 + \gamma^2}, \quad Y = \frac{J_y}{kp} = -\frac{P_0}{k} \frac{\gamma}{(1-p)^2 + \gamma^2}, \quad (10.81)$$

что, как и следовало ожидать, совпадает с ранее полученным решением — формулами (10.50).

Обратим внимание на то обстоятельство, что перемещения вещественной и мнимой частей модели Гордеевой *не совпадают* с вещественной и мнимыми частями векторов перемещений исходной колеблющейся системы, как это может показаться на первый взгляд. В самом деле, например в задаче о консольной стойке перемещение X_Γ вершины стойки для вещественной и Y_Γ мнимой частей модели Гордеевой равняются соответственно

$$X_\Gamma = (P_0 - J_x)/k = \frac{P_0}{k} \frac{(1-p)(1-2p) + \gamma^2}{(1-p)^2 + \gamma^2},$$

$$Y_\Gamma = J_y/k = -\frac{P_0}{k} \frac{p\gamma}{(1-p)^2 + \gamma^2}, \quad (10.82)$$

что отличается от соответствующих величин X и Y .

В этой связи рекомендация Гордеевой по определению амплитуд динамических усилий по формуле

$$S = \sqrt{(S')^2 + (S'')^2}, \quad (10.83)$$

где S' и S'' — соответствующие усилия в вещественной и мнимой частях модели Гордеевой, является ошибочной. Кроме того, для системы с несколькими динамическими степенями свободы, амплитудные значения усилий, как это было здесь показано, зависят не только от амплитудных значений перемещений масс, но и от их взаимных фазовых сдвигов.

Само собой разумеется, что модель Гордеевой уместно применять только тогда, когда в распоряжении пользователя не имеется программного обеспечения, предназначенного для прямого расчета конструкций на вынужденные колебания с учетом потерь энергии в материале по гипотезе Сорокина.

10.4 Декремент колебаний

Логарифмический декремент колебаний характеризует процесс затухания колебаний в системе. Он равен натуральному логарифму отношения амплитудных значений колеблющейся величины, измеренных с интервалом в один период. Для простейшего осциллятора с массой M , коэффициентом упругости K и коэффициентом вязкого сопротивления C дифференциальное уравнения свободного движения

$$M \ddot{y} + C \dot{y} + Ky = 0 \quad (10.84)$$

имеет решение в виде колебательного процесса

$$y = A_0 e^{-\beta t} \cos(\bar{\omega} t + \mu) \quad (10.85)$$

с амплитудой (произвольная постоянная) A_0 и сдвигом по фазе (произвольная постоянная) μ , если только демпфирование меньше критического значения

$$C \leq C_0 = 2\sqrt{KM}.$$

Здесь обозначено

$$\omega^2 = K/M; \quad 2\beta = C/M; \quad \bar{\omega} = \sqrt{\omega^2 - \beta^2}.$$

Периодом колебаний условно будем называть время $T = 2\pi/\bar{\omega}$, а безразмерное произведение $\delta = \beta T$ является логарифмическим декрементом колебаний и соответствует его определению, приведенному выше.

Рассмотрим, как изменяется суммарная энергия системы E в процессе затухающих колебаний. Эта энергия равна сумме потенциальной энергии пружины и кинетической энергии движущейся массы

$$E = \frac{1}{2} Ky^2 + \frac{1}{2} M \dot{y}^2. \quad (10.86)$$

Подставляя сюда данные формулы (10.84), получим

$$E = \frac{1}{2} KA_0^2 e^{-2\beta t} \left(1 + \frac{\beta \bar{\omega}}{\omega^2} \sin(2\bar{\omega} t + 2\mu) + \frac{\beta^2}{\omega^2} - 2 \frac{\beta^2}{\omega^2} \sin^2(\bar{\omega} t + 2\mu) \right). \quad (10.87)$$

Нетрудно проверить, что отношение энергий рассматриваемой системы E_0 — в момент времени $t = t_0$ и E_T — в момент времени $t = t_0 + T$ (по истечении одного периода колебаний) не зависит от момента t_0 и выражается формулой

$$\frac{E_T}{E_0} = e^{-2\beta T} = e^{-2\delta}. \quad (10.88)$$

Отсюда следует, что логарифмический декремент колебаний достаточно просто выражается и через энергию

$$\delta = -\frac{1}{2} \ln \frac{E_r}{E_0}. \quad (10.89)$$

Если на осциллятор действует внешняя периодическая нагрузка

$$F = F_0 \cos \theta t = f_0 M \cos \theta t, \quad (10.90)$$

то решение, соответствующее установившимся колебаниям, может быть представлено в виде

$$y = A \cos(\theta t - \alpha), \quad (10.91)$$

где

$$A = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega^2 - \theta^2)^2 + 4\beta^2\theta^2}}, \quad (10.92)$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{2\theta\beta}{\omega^2 - \theta^2}. \quad (10.93)$$

Решение (10.91) может быть представлено и в другом виде

$$y = A_s \sin(\theta t) + A_c \cos(\theta t), \quad (10.94)$$

где

$$A_s = \frac{2\beta\theta f_0}{(\omega^2 - \theta^2)^2 + 4\beta^2\theta^2}, \quad (10.95)$$

$$A_c = \frac{(\omega^2 - \theta^2) f_0}{(\omega^2 - \theta^2)^2 + 4\beta^2\theta^2}. \quad (10.96)$$

Постоянная A_s называется амплитудой поглощения, а постоянная A_c — амплитудой дисперсии.

Энергию, которая поглощается системой за один цикл колебаний, можно вычислить по формуле

$$E_s = \pi F_0 A_s = \frac{2\pi M \beta \theta f_0^2}{(\omega^2 - \theta^2)^2 + 4\beta^2\theta^2}. \quad (10.97)$$

Максимальное значение потенциальной энергии системы

$$E_y = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} \frac{M \theta^2 f_0^2}{(\omega^2 - \theta^2)^2 + 4\beta^2\theta^2}. \quad (10.98)$$

Нетрудно проверить, что логарифмический декремент в случае установившихся вынужденных колебаний выражается через отношение энергий по формуле

$$\delta = \frac{E_s}{2E_y}. \quad (10.99)$$

Отношение $\psi = E_s/E_y$ часто называют *коэффициентом поглощения*. Ясно, что $\delta = \psi/2$.

Как видно из приведенных классических примеров, логарифмический декремент колебаний достаточно просто выражается через энергию, которая поглощается системой за один цикл колебаний, и потенциальную энергию системы. Более чистый результат получается в случае установившихся вынужденных колебаний.

Используя выражения для энергии, можно попытаться построить алгоритм отыскания системы с обычным вязким трением, энергетически эквивалентной реальной системе, у которой механизм демпфирования может быть и не в виде вязкого трения, и более того, различным для разных частей системы (узлов, подсистем), поскольку в реальных сооружениях эти свойства могут различаться на порядки.

Идея такого построения заключается в следующем. Предположим, что исследуемая конечно-элементная система с n степенями свободы находится в состоянии установившихся вынужденных колебаний относительно заданной, не обязательно нулевой, равновесной формы, причем частота колебаний θ , форма и размах колебаний известны (заданы). В этом случае мы фактически переходим к системе с одной степенью свободы. Лучше, если частота и форма колебаний — собственные, но это не обязательно.

Пусть произвольное деформированное состояние системы характеризуется вектором перемещений $[[u_1, \dots, u_n]]^T$, равновесная форма, относительно которой происходят колебания, — вектором $[[u_1^0, \dots, u_n^0]]^T$, а относительные амплитудные значения перемещений по рассматриваемой форме колебаний — вектором $[[a_1^0, \dots, a_n^0]]^T$. Тогда деформированное состояние системы в момент времени t можно выразить формулой

$$u_k = u_k^0 + a_k^0 \cos(\theta t) \quad (k=1, \dots, n). \quad (10.100)$$

Если мы сумеем определить потери энергии E_s в системе за один цикл колебаний и упругую энергию системы в максимально отклоненном состоянии E_y , то по формуле (10.99) легко найдем искомый логарифмический декремент колебаний δ .

Понятно, что упругая энергия накапливается только в конечных элементах. Будем считать, что и потеря энергии происходит только в конечных элементах. Если это не так, можно пополнить систему элементами специального вида (демпферами), не обладающими упругостью, а выполняющими лишь диссипативные функции, и добиться, чтобы такое утверждение было справедливо. В таком случае можно определить E_s и E_y для каждого конечного элемента в отдельности, и результаты сложить.

По поводу упругой энергии все обстоит достаточно просто. По каждому элементу надо воспользоваться формулой для выражения потенциальной

энергии элемента через перемещения его узлов (такие формулы выписываются при разработке конечного элемента) и вычислить по ней потенциальную энергию элемента при перемещениях узлов $[[a_1^0, \dots, a_n^0]]^T$. После суммирования результатов вычислений по всем элементам получим упругий потенциал E_e для всей системы.

Следует отметить, что при определении упругого потенциала мы пользуемся амплитудными значениями формы колебаний $[[a_1^0, \dots, a_n^0]]^T$ и никак не учитываем состояние, характеризуемое смещениями $[[u_1^0, \dots, u_n^0]]^T$, в окрестности которого и происходят колебания. Мы так поступаем потому, что при смещениях $[[u_1^0, \dots, u_n^0]]^T$ по предположению выполняются условия равновесия, то есть в данной точке все частные производные от потенциальной энергии по перемещениям u_1, \dots, u_n равны нулю. Значение потенциальной энергии в этой точке также считаем нулевым.

Иное дело — потери энергии в элементе за цикл колебаний. Для получения количественных данных надо изучить отдельно диссипативные свойства каждого типа элемента. Будем считать, что конечный элемент привязан к собственной системе координат, характеризуется m перемещениями v_1, \dots, v_m , и имеет матрицу жесткости с элементами s_{ij} ($i, j = 1, \dots, m$). Переход от перемещений исследуемой системы u_1, \dots, u_n к перемещениям конечного элемента в местной системе координат v_1, \dots, v_m выполняется с помощью линейных преобразований по формулам

$$v_i = \sum_{j=1}^n c_{ij} u_j \quad (i=1, \dots, m) \quad (10.101)$$

с известными коэффициентами линейных зависимостей c_{ij} ($i=1, \dots, m$; $j=1, \dots, n$).

Рассмотрим теперь простейшие типы элементов, которые чаще всего присутствуют в расчетных моделях.

10.4.1 Конечные элементы из упругого материала

За неимением более обоснованных зависимостей, будем считать, следуя идеологии СНИП [20], что каждый материал характеризуется своим коэффициентом поглощения ψ , не зависящим ни от вида, ни от скорости, ни от интенсивности деформирования. Такой подход может быть применен для материальных конечных элементов, широко используемых в конечно-элементных вычислительных комплексах, и пригоден, если напряжения не превосходят расчетного сопротивления,

В этом случае энергия, рассеиваемая в материале, выражается формулой

$$E_s = \frac{\psi}{2} \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m s_{ij} b_i^0 b_j^0, \quad (10.102)$$

где величины

$$b_i^0 = \sum_{j=1}^n c_{ij} a_j^0 \quad (i=1, \dots, m) \quad (10.103)$$

представляют собой амплитудные значения перемещений в местной системе координат.

Коэффициенты поглощения ψ определяются опытным путем, их значения приведены в справочной литературе (см., например, [7]).

10.4.2 Элемент сухого трения

Рассматриваемый элемент представляет собой ползун, прижатый к шероховатому основанию так, что сила трения при его проскальзывании равна F (рис. 10.7). Элемент имеет одну степень свободы — перемещение v .

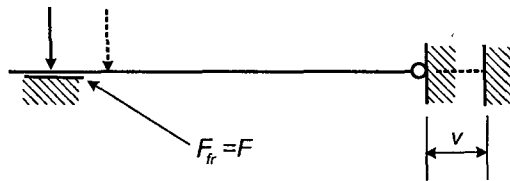


Рис. 10.7. Элемент сухого трения

Если закрепленный конец ползуна колеблется с амплитудой b^0 , потеря энергии за один цикл определится формулой

$$E_s = 4b^0 F \quad (10.104)$$

10.4.3 Элемент вязкого трения

По аналогии с элементом сухого трения рассмотрим элемент вязкого трения. Конструктивно такой элемент может быть выполнен в виде цилиндра с жидкостью, в котором перемещается перфорированный или неплотно прилегающий поршень (рис. 10.8).

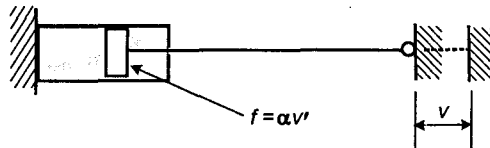


Рис. 10.8. Элемент вязкого трения

Элемент имеет одну степень свободы — перемещение v , а сила вязкого трения f в таком устройстве пропорциональна скорости перемещения поршня v' и выражается формулой $f = \alpha v'$, где α — заданный коэффициент пропорциональности.

Если поршень перемещается по закону

$$v = b^0 \cos(\theta t), \quad (10.105)$$

то сила трения выражается как

$$f = -\alpha \theta b^0 \sin(\theta t) \quad (10.106)$$

и за один цикл колебаний рассеивается энергия

$$E_s = \pi \alpha \theta (b^0)^2. \quad (10.107)$$

10.4.4 Элемент нелинейно-вязкого трения

В книге Я.Г.Пановко [21] приведено решение задачи об определении эквивалентного коэффициента линейного вязкого сопротивления C_{equiv} для элемента у которого сила вязкого трения определяется выражением

$$F_d = C_n \text{sign}(\dot{y}) \dot{y}^n. \quad (10.108)$$

Таблица 10.2.

Тип сопротивления	n	Диссипация энергии за цикл E_s	Коэффициент эквивалентного вязкого сопротивления C_{equiv}
Сухое трение	0	$4C_0 y_{max}$	$\frac{4}{\pi} \frac{C_0}{\theta y_{max}}$
Вязкое трение	1	$\pi C_1 \theta y_{max}^2$	C_1
Квадратичное	2	$\frac{8}{3} C_2 \theta^2 y_{max}^3$	$\frac{8}{3\pi} \theta y_{max}$
Кубическое	3	$\frac{8}{3} \pi C_3 \theta^3 y_{max}^4$	$\frac{3}{4} (\theta y_{max})^2$

Результаты этого анализа могут быть представлены в виде табл. 10.2 [22], где приведены также данные о диссипации энергии за цикл колебаний, совершаемых по закону $y = y_{max} \cos(\theta t - \alpha)$.

10.4.5 Демпфирование излучением

Вероятно один из главных механизмов демпфирования конструкций связан с излучением энергии в окружающую среду. Если, например, пластина вибрирует в жидкости, то возникают исходящие от нее волны, приводящие в движение большое количество жидкости. Энергия, переданная от конструкции к жидкости (более обще — окружающей среде), теряется конструкцией, а ее значение за цикл колебаний определяется как

$$E = \pi\theta \rho C r^2, \quad (10.109)$$

где ρ — плотность среды, в которой возникают волны, C — скорость звука в этой среде и r — амплитуда вибрации. Энергия, рассеянная за цикл оказывается такой же, как и для вязкого трения с коэффициентом демпфирования $B = \rho C$ в области единичного размера. Это называется характеристикой динамической жесткости (импеданса) среды.

Даже для среды низкой плотности типа воздуха, это дает очень существенный вклад в демпфирование в пределах конструкции. Если конструкция окружена более плотной средой типа воды, тогда демпфирование излучением более существенно. Если конструкция опирается на твердое основание, то демпфирование излучением в это основание может давать относительно высокое значение в точках опирания. В гражданском строительстве это может быть главным компонентом демпфирования. Чтобы проиллюстрировать важность этого, недемпфированная модель конструкции была рассчитана [23] с учетом демпфирования излучением в основание, что дало величину порядка 10% от критического демпфирования. Вторым примером была оценка значения демпфирования для опор моста в русле реки и проверка различных моделей демпфирования. Оценки включали демпфирование излучением в основание, демпфирование в материале опор и сопротивление воды в русле реки. Единственным механизмом, который дал реалистическое представление измеренного значения демпфирования, было демпфирование излучением. Все другие механизмы дали оценки демпфирования, на порядок меньшие.

Для определения коэффициентов демпфирования естественных оснований под колеблющимся фундаментом можно воспользоваться приближенными формулами [7], которые связывают эти характеристики с коэффициентом жесткости основания C_z

- $B_z = 0,014F \sqrt{C_z}$ — для вертикальных перемещений (осадок);
- $B_x = 0,007F \sqrt{C_z}$ — для горизонтальных перемещений (сдвигов);
- $B_\phi = 0,01I \sqrt{C_z}$ — для поворотов.

Здесь F — площадь подошвы фундамента и I — момент инерции этой площади.

Несколько другие рекомендации приводит Вильсон [24]. На основании решения задачи о колебаниях круглого штампа на упругом полупространст-

ве он предлагает использовать данные, представленные в таблице 10.3. Эта таблица также содержит данные о величине присоединенной массы и жесткости основания.

Таблица 10.3.

Направление колебаний	Жесткость	Демпфирование	Присоединенная масса
Вертикальное	$K = \frac{4Gr}{1-\nu}$	$1,79\sqrt{K\rho r^3}$	$1,50\rho r^3$
Горизонтальное	$18,2Gr \frac{1-\nu^2}{(2-\nu)^2}$	$1,08\sqrt{K\rho r^3}$	$0,28\rho r^3$
Поворот	$2,7Gr^3$	$0,47\sqrt{K\rho r^3}$	$0,28\rho r^3$

Обозначения: r — радиус штампа; G — модуль сдвига; ν — коэффициент Пуассона; ρ — плотность

10.5 Три резонансные кривые

Большинство инженеров осведомлены о резонансном режиме колебаний, когда совпадение частоты внешнего воздействия с частотой собственных колебаний приводит к резкому нарастанию амплитуд. Для идеальной системы без потерь энергии резонанс определяет неограниченный рост амплитуд, но и для реальной системы этот рост может быть очень большим. Поэтому понятно стремление избежать резонанса, создав такую систему, собственная частота которой не совпадает с частотой возмущающей силы.

Но насколько она должна не совпадать? Что выгоднее: чтобы собственная частота была большей или меньшей частоты возмущения? Ответ на эти вопросы дает анализ так называемых резонансных кривых.

Если рассмотреть простейшую систему с одной степенью свободы, то уравнение типа (3.149) будет иметь вид

$$M \ddot{y} + C \dot{y} + Ky = F(t) \quad (10.110)$$

или в другой форме

$$\ddot{y} + 2\omega\zeta \dot{y} + \omega^2 y = F/M, \quad (10.111)$$

где $\omega = \sqrt{K/M}$ — частота собственных колебаний недемпфированной системы; $\zeta = C/C_{cr}$ — относительное демпфирование; $C_{cr} = 2\sqrt{KM}$ — критическое демпфирование, т.е. такое значение коэффициента C , начиная с которого выведенная из состояния равновесия система возвращается к этому состоянию без осцилляций; $\bar{\omega} = \omega\sqrt{1-\zeta^2}$ — собственная частота демпфированных колебаний.

Под воздействием гармонической возмущающей силы $F = F_0 \sin \theta t$ система совершает гармонические колебания $y = y_0 \sin(\theta t - \varphi)$, безразмерная амплитуда которых зависит от отношения частот θ/ω и определяется выражением

$$\frac{y_0 K}{F_0} = \left[\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2} \right)^2 + \left(2\zeta \frac{\theta}{\omega} \right)^2 \right]^{-1/2}. \quad (10.112)$$

Эта амплитуда имеет максимальное значение при $\theta/\omega = \sqrt{1 - 2\zeta^2}$, когда $y_0 K / F_0 = \left[2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2} \right]^{-1}$, график изменения безразмерной амплитуды в функции от отношения θ/ω представлен на рис. 10.9.

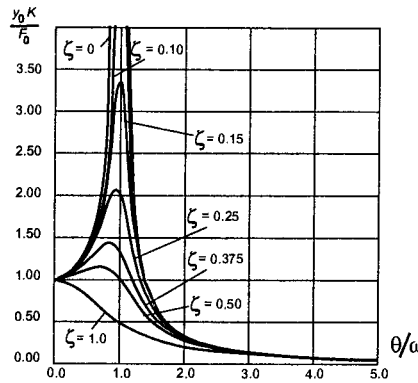


Рис. 10.9. Резонансная кривая при силовом гармоническом возбуждении

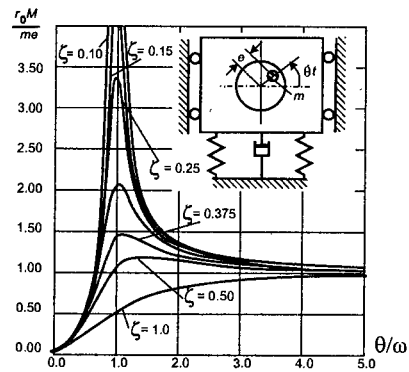


Рис. 10.10. Резонансная кривая при возбуждении неуравновешенной массой

Полезно обратить внимание на то, что с точки зрения уменьшения амплитуд колебаний более выгодным является увеличение частоты собственных колебаний по сравнению с частотой возмущения, поскольку область $\theta/\omega > 1$ характеризуется меньшими значениями амплитуд.

Специальный случай возбуждения представлен на рис. 10.10, где колебания вызываются несбалансированной массой m , которая имеет эксцентриситет e и вращается с угловой скоростью θ . Возмущающая сила при этом определяется как $p = e m \theta^2 \sin \theta t$, а безразмерная амплитуда

$$\frac{y_0 M}{e m} = (\theta/\omega)^2 \left[\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2} \right)^2 + \left(2\zeta \frac{\theta}{\omega} \right)^2 \right]^{-1/2}, \quad (10.113)$$

имеет максимальное значение $y_0 M / (e m) = (1 - 2\zeta^2) / (2\zeta \sqrt{1 - \zeta^2})$. График этой функции показан на рис. 10.10, из которого видно, что в указанном слу-

чае рекомендация по уходу от резонанса имеет прямо противоположный характер.

Наконец, можно рассмотреть еще один случай гармонического возбуждения, когда по закону $z = z_0 \sin \theta t$ движется основание. Безразмерная амплитуда перемещений определяется выражением

$$\frac{y_0}{z_0} = \frac{1 + (2\zeta\theta/\omega)^2}{\sqrt{(1 - \theta^2/\omega^2)^2 + (2\zeta\theta/\omega)^2}} \quad (10.114)$$

График этой функции показан на рис. 10.11. Он напоминает график на рис. 10.9, но здесь все кривые проходят через точку с абсциссой $\theta/\omega = 0,707$.

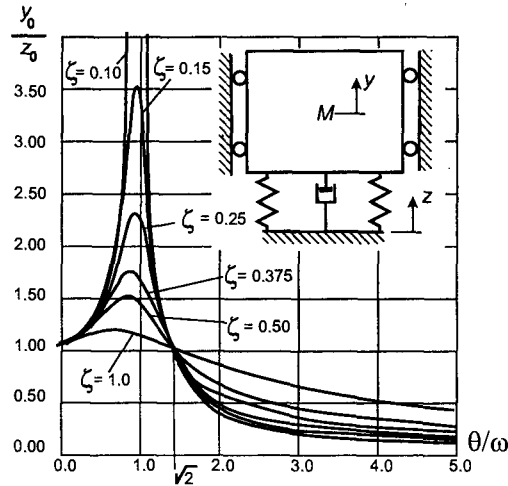


Рис. 10.11. Резонансная кривая при гармоническом возбуждении основания

Схема по рис. 10.11 применяется в системах виброизоляции и отношение y_0 / z_0 в некотором смысле характеризует качество виброизоляции, которая, как видно из графика является эффективной лишь при частотах $\theta/\omega_0 > 0,707$, при этом наличие в ней затухания, вообще говоря, является нежелательным.

Следует заметить, что усилие в упругой связи определяется относительным перемещением $d = y - z$ для которого безразмерная амплитуда равна

$$\frac{d_0}{z_0} = (\theta/\omega)^2 \left[\left(1 - \frac{\theta^2}{\omega^2} \right)^2 + \left(2\zeta \frac{\theta}{\omega} \right)^2 \right]. \quad (10.115)$$

Ее график такой же, как показан на рис. 10.10.

10.6 Расчет сооружений на сейсмические воздействия

10.6.1 Спектры землетрясений

Практические расчеты на действие сейсмических сил регламентируются нормативными документами, в основу которых, как правило, положена так называемая линейно-спектральная теория М.Био. В первоначальном виде основу метода составляли замеренные экспериментально ускорения маятников, обладавших различными периодами собственных колебаний, под действием землетрясения. Полученные под воздействием перемещений основания по закону, отвечающему реальным землетрясениям, максимальные значения таких ускорений представляются в функции периода собственных колебаний маятника (пробного осциллятора) и образуют *спектр реакций*, который служит основой для определения сейсмической нагрузки (рис. 10.12).

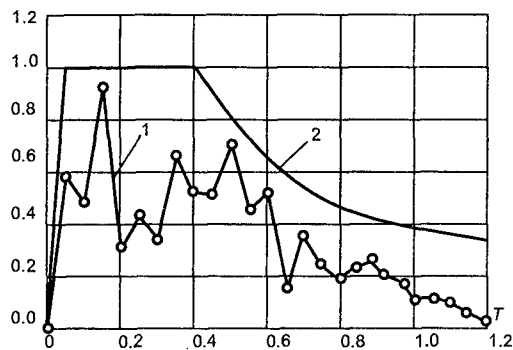


Рис. 10.12. Спектры ускорений: 1 — измеренный; 2 — аппроксимация огибающей из СНиП

В основу методики расчета положены так называемые *расчетные спектры*, которые определяются как огибающие ряда спектров реакций различных реальных землетрясений. Кроме того, обычно используется предположение о поведении основания сооружения как единого жесткого тела (к сожалению, без явного указания на эту гипотезу), предполагая, что все опорные точки конструкции движутся поступательно по одинаковому закону $\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}_0(t)$.

Тогда, помня о том, что перемещения системы отсчитываются от положения точки основания, а инерционные силы определяются не относительно, а абсолютным ускорением, вместо (3.142) мы будем иметь

$$\mathbf{M} \frac{d^2(\mathbf{u} + \mathbf{X}_0)}{dt^2} + \mathbf{K}\mathbf{u}(t) = \mathbf{0} \quad (10.116)$$

или, перенося заданное ускорение основания в правую часть, получим

$$M \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} + K \mathbf{u}(t) = -M \frac{d^2 \mathbf{X}_0}{dt^2} . \quad (10.117)$$

10.6.2 Сейсмическая реакция

Для системы с одной степенью свободы массой M и жесткостью K , и с учетом сил внутреннего сопротивления в рамках гипотезы Сорокина получим

$$M \ddot{w} + (1 + i\gamma)Kw = -M \ddot{Z}_0 , \quad (10.118)$$

где перемещение w , измеряемое относительно точки основания, и ускорение этого основания \ddot{Z}_0 являются комплексными величинами. Для построения \ddot{Z}_0 заданная функция ускорений \ddot{X}_0 раскладывается в ряд Фурье; этот ряд и сопряженный ряд Фурье образуют действительную и мнимую части комплексной функции \ddot{Z}_0 (см. [7], стр. 43).

При нулевых начальных условиях действительная часть $u(t)$ решения дифференциального уравнения (10.118) имеет вид

$$u(t) = -\frac{1}{\bar{\omega}} \int_0^t \ddot{X}_0(\tau) \exp\left[-\frac{\gamma}{2}(t-\tau)\right] \sin(t-\tau) d\tau , \quad (10.119)$$

где $\bar{\omega}$ — круговая частота свободных затухающих колебаний осциллятора (с учетом рассеяния энергии в материале)

$$\bar{\omega} = \frac{\omega}{\sqrt{1 + \gamma^2/4}} , \quad \omega = \sqrt{K/M} . \quad (10.120)$$

Если под сейсмической нагрузкой понимать силу инерции, действующую на упругую систему

$$F(t) = -M(\ddot{Z}_0 + \ddot{w}) , \quad (10.121)$$

то, дифференцируя дважды (10.119), после несложных преобразований, учитывая, что $\gamma \ll 1$, получим действительную часть комплексной силы инерции в виде

$$P(t) = -M a(t, \gamma, T) , \quad (10.122)$$

где

$$a(t, \gamma, T) = -\frac{2\pi}{T} \int_0^t \ddot{X}_0(\tau) \exp\left[-\frac{\gamma\pi}{T}(t-\tau)\right] \sin\left(\frac{2\pi}{T}(t-\tau)\right) d\tau \quad (10.123)$$

представляет собой ускорение колебаний линейного осциллятора с периодом собственных колебаний T и коэффициентом неупругого сопротивления

γ . Максимальное значение сейсмической силы при этом окажется равным

$$\max P(t) = M C_a(T), \quad (10.124)$$

где $C_a(T)$ является так называемым *спектром ускорений*, т.е. функцией, описывающей максимальные значения абсолютных ускорений линейного осциллятора в зависимости от его периода собственных колебаний при некотором фиксированном значении γ и заданном кинематическом воздействии $d^2 X_0/dt^2$.

В нормах [25] спектр ускорений представлен в виде

$$C_a(T) = K_c g \beta(T), \quad (10.125)$$

где коэффициент сейсмичности K_c зависит от балльности землетрясения (он удваивается при увеличении на каждый балл), а коэффициент динамичности $\beta(T)$ задан графиками в зависимости от типа грунта (рис. 10.13). Значение γ принято усредненно равным 0,1. Ускорение силы тяжести g введено в (10.125) в силу того, что нормы оперируют не с массами M , а с весами масс Q .

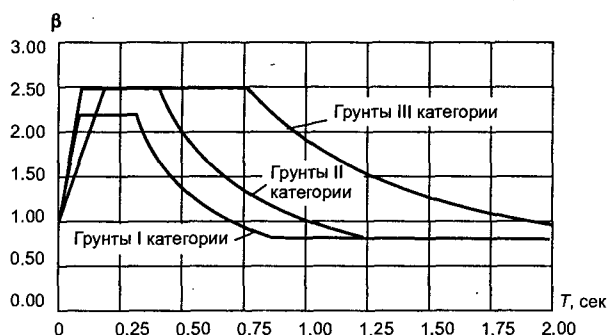


Рис. 10.13. Коэффициент динамичности по СНиП

Для систем со многими степенями свободы уравнения (10.117) после введения затухания по Сорокину решаются методом разложения по формам собственных колебаний и для каждой формы, модальная сейсмическая нагрузка определяется как для системы с одной степенью свободы.

Распределение сейсмической нагрузки между массами системы (рис. 10.14) реализуется с помощью коэффициентов

$$\eta_{ik} = \frac{\Psi_{ik} \sum_{j=1}^n Q_j \Psi_{ij}}{\sum_{j=1}^n Q_j \Psi_{ij}^2}. \quad (10.126)$$

Суммирование вкладов отдельных форм колебаний нормами [25] рекомендуется выполнять с использованием среднеквадратичной оценки Розенблума (3.160). Такой подход основывается на гипотезе о том, что все модальные

реакции являются нормально распределенными случайными величинами с одинаковыми коэффициентами корреляции, что согласуется со многими наблюдениями, хотя и не является точно установленным фактом.

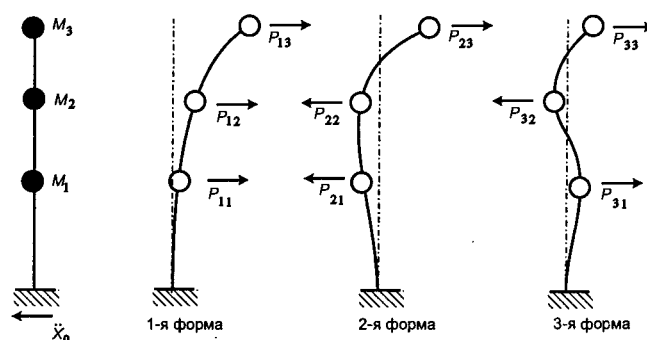


Рис. 10.14. Инерционные сейсмические нагрузки, отвечающие различным формам собственных колебаний

Суммирование внутренних сил, которые определяются по обычным правилам для каждой из учитываемых форм собственных колебаний, также выполняется по формуле Розенблюма, но здесь возможна одна неприятность — использование модулей моментов, продольных сил и поперечных сил приводит, например, к тому, что исчезают сжато-изогнутые сечения, все они оказываются растянуто-изогнутыми. Аналогичные эффекты потери знака возможны и в элементах оболочечного типа. Для борьбы с этим явлением в некоторых программных системах суммарным по Розенблюму значениям компонент вектора внутренних сил присваиваются знаки, как у аналогичных компонент в первой форме собственных колебаний. Такой подход реализован, например, в известной системе *Lira*, но обосновать его достаточно трудно, даже если предположить, что именно первая форма собственных колебаний и реализует основной вклад в суммарное значение каждой из компонент вектора-ответа.

Учитывая, что оценка суммы модальных вкладов содержит выражение квадратного корня, а перед ним, как известно, следует ставить знак \pm , можно принять, что все компоненты внутренних сил (напряжений) могут иметь произвольный знак и учитывать все возможные комбинации их знаков. Но более правильным было бы вспомнить, что при проверке конструкции найденные оценки максимальных значений компонент усилий используются не сами по себе, а подставляются в некоторую формулу, определяющую критерий пригодности конструкции (например, в формулу для вычисления напряжений). Тогда необходимо для каждой учитываемой формы собственных колебаний подсчитать значение этого критерия и уже потом суммировать его по Розенблюму.

Следует заметить, что использование формулы Розенблюма «гасит» знаки модальных компонент сейсмической реакции, что в некоторых случаях мо-

жет приводить к недоразумениям. Достаточно типичным примером такой ситуации может служить случай кратных частот, когда формы собственных колебаний, соответствующих такой частоте, определяются с точностью до некоторого произвола. Так, например, вертикально расположенный консольный стержень с одинаковыми главными жесткостями поперечного сечения имеет кратные формы собственных колебаний, которые определяются с точностью до произвольного поворота вокруг оси Z , как это показано в плане на рис. 10.15, где в варианте a) собственные формы направлены вдоль координатных осей, а в варианте b) — повернуты на 45° . Если сейсмический импульс действует вдоль оси X , то для варианта a) реакция по второй форме будет отсутствовать, и все перемещения окажутся лежащими в плоскости (X,Z) .

Для варианта b) будут возбуждаться обе формы собственных колебаний, но тот факт, что компоненты по оси Y имеют разные знаки и гасят друг друга, окажется потерянным при использовании правила «корень из суммы квадратов». В результате окажется, что возбуждаются перемещения не только по направлению действия сейсмического толчка, но и в перпендикулярном направлении. Как видим, вывод зависит от произвола при выборе пары собственных форм, соответствующих кратной частоте.

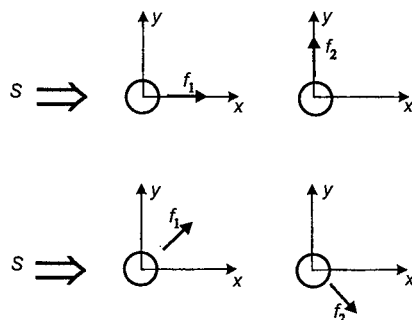


Рис. 10.15. Случай кратной частоты

Достаточно серьезным вопросом сейсмического расчета является выбор адекватной расчетной схемы. Простейшие консольные схемы, широко распространенные в практике проектирования и рекомендуемые многими пособиями, являются скорее данью традиции «ручного» расчета, чем необходимостью. Более того, они маскируют некоторые реальные эффекты поведения конструкций, что приводит к необходимости искусственного введения эксцентриситетов (см. п. 2.15 норм [25]), чтобы учесть крутильные колебания. Иллюстрация этого приема, рекомендуемого нормами, представлена на рис. 10.16. Естественно, что более реалистичная пространственная расчетная модель учитывает крутильные формы движения автоматически, если только расчетчик не отсекает их, задав малое число учитываемых форм собственных колебаний. За этим необходимо следить при реальном проектировании.

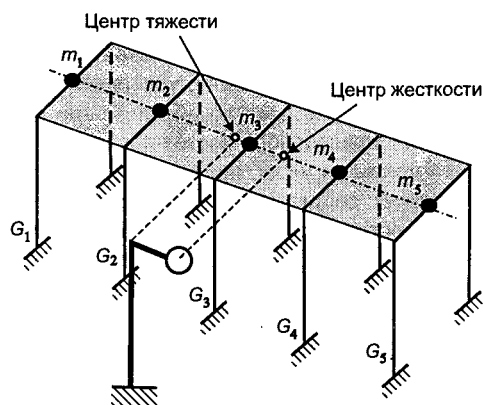


Рис. 10.16. Введение в консольную расчетную модель эксцентриситета между центром жесткости (ЦЖ) и центром масс (ЦМ)

Следует иметь в виду, что в международных нормативных документах по сейсмостойкому строительству ISO [26] и Еврокоде [27] используется коэффициент редукции расчетной модели K_d , понижающий расчетную сейсмическую нагрузку за счёт учёта диссипативных возможностей конструкций, в частности, способности деформироваться за пределом упругости при циклическом воздействии без серьёзного понижения прочностных свойств. В связи с этим в ISO приводятся предостережения по применению условного спектрального метода сейсмического расчета, а в Еврокоде эти предостережения сведены в таблицу 10.4.

Таблица 10.4.

Регулярность модели		Расчетная схема	Значение коэффициента редукции K_d
В плане	По высоте		
Есть	Есть	Плоская	Нормативное
Есть	Нет	Плоская	Сниженное
Нет	Есть	Пространственная	Нормативное
Нет	Нет	Пространственная	Сниженное

В таблице 10.4 следует обратить внимание на два важных момента:

- Только для регулярных в горизонтальной плоскости сооружений допускаются плоские расчётные модели.
- Когда нарушается регулярность конструкций в вертикальной плоскости, надо уменьшать рекомендуемые международными нормами значения коэффициентов редукции K_d .

В работе [28] указывается, что предостережения международных норм, это серьёзное напоминание об известном обстоятельстве — при сложных, многомодальных колебаниях сооружения, условный спектральный метод не может давать надёжных результатов по обеспечению прогнозируемого при сильном землетрясении предельного состояния по неразрушению. Следует также отметить, что прием из норм, представленный на рис. 10.16, в какой-то степени компенсирует достаточно грубую гипотезу о движении основания сооружения как жесткого целого. Именно вследствие применения этой гипотезы исчезают крутильные компоненты движения здания, когда все рамы имеют одинаковую жесткость (рис. 10.17).

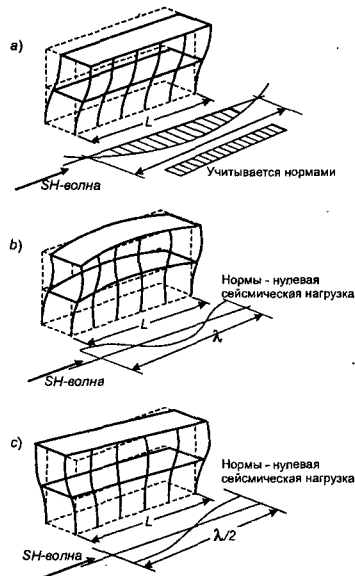


Рис. 10.17. Смещения конструкции при прохождении сейсмической волны: *a* — ступательные; *b* — изгибные; *c* — крутильные

Некоторые приемы, позволяющие учесть компоненты сейсмического воздействия по рис. 10.17, *b* и 10.17, *c* были предложены в серии работ В.К.Егупова и его учеников [29].

Расчет по нормам (и с использованием программных средств, слишком дословно реализующих эти нормы) предполагает, что ускорения основания происходят в горизонтальной плоскости. В действительности же, при землетрясении основание колеблется в некотором наклонном направлении к обоям — горизонтальной и вертикальной осям, вызывая движение конструкции вдоль всех координатных осей. Возможность задания направления действия сейсмических толчков является абсолютной необходимостью расчетной программы. Следует также учитывать, что в случае пространственной расчетной схемы даже горизонтально направленное сейсмическое возмущение может вызвать вертикальные компоненты сейсмической нагрузки (рис.

10.18). Это во многом смягчает не слишком гибкий подход норм, которые явно указывают на необходимость учета вертикальной компоненты только в строго определенных случаях.

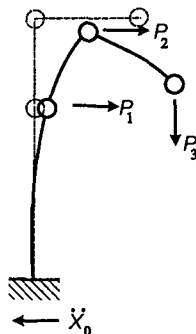


Рис. 10.18. Возникновение вертикальной компоненты сейсмической нагрузки при горизонтальном сейсмическом толчке

10.6.3 Расчет по акселерограммам

Нормы [25] требуют, чтобы особо ответственные объекты и здания высотой более 16 этажей были рассчитаны с использованием инструментальных записей ускорений или синтезированных акселерограмм, т.е., по сути, с индивидуальным определением максимального значения сейсмической реакции объекта по (10.92). Поскольку вблизи площадки строительства могут отсутствовать сейсмостанции с известными записями ускорений, то часто используются коллекции акселерограмм, описанные в литературе [30].

Здесь следует иметь в виду, что выбор записи, не соответствующей рассматриваемой площадке строительства и характерному для нее типу сейсмического возмущения, может привести к серьезным погрешностям. Так, например [31], спитакское землетрясение характеризовалось пиком спектра в районе периода собственных колебаний порядка 0,6 секунды, что расходилось с принятым при расчете зданий спектром почти вдвое (рис. 10.19).

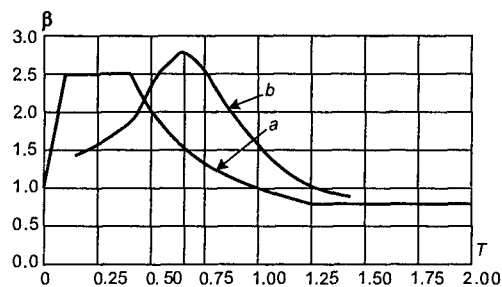


Рис. 10.19. Спектры сейсмической реакции: *a* — принятый при проектировании; *b* — полученный после землетрясения на основании данных ИФЗ АН СССР

10.6.4 Поэтажные спектры отклика

Очень часто возникает необходимость выполнить динамические проверочные расчеты оборудования или других дополнительных элементов, устанавливаемых на сооружении. Казалось бы, необходимо попросту включить их в динамическую расчетную модель и выполнить соответствующий совместный расчет, но этот путь не очень удобен. И дело даже не в том, что количество единиц оборудования может быть очень большим, что усложняет расчетную модель, а в том, что такие дополнительные подсистемы могут быть заранее неизвестны или же меняться в процессе эксплуатации.

Практически поступают иначе — используя тот факт, что масса дополнительного оборудования относительно невелика по сравнению с массой здания, считают, что можно пренебречь влиянием оборудования на динамические характеристики здания. Тогда можно получить характеристики движения точек установки оборудования (такие характеристики носят название *поэтажных акселерограмм*, если они характеризуют ускорения этих точек). Затем можно выполнять расчеты оборудования на соответствующие кинематические возмущения. Однако детальный динамический расчет элементов оборудования производят лишь для наиболее ответственных машин и агрегатов, а в подавляющем большинстве других случаев используют *поэтажные спектры отклика*, которые представляют собой значения максимальной возможной амплитуды колебаний линейных осцилляторов с различными собственными частотами. Иными словами, моделируется динамическая реакция воображаемой единицы оборудования, собственная частота f которой заранее неизвестна, поэтому такое моделирование выполняется для некоторого диапазона возможных собственных частот.

Следует отметить, что при этой процедуре выполняется двойная фильтрация внешнего возмущения. Сначала в процессе динамического расчета здания в значительной степени подавляется та часть входного воздействия, частотные характеристики которого лежат вдали от собственных частот сооружения, а затем уже искаженный таким образом входной сигнал вновь

фильтруется линейным осциллятором, т.е. из него отбираются лишь те части, которые близки к собственной частоте осциллятора f . Естественно, что данная процедура оказывается весьма чувствительной к точности определения частот и форм собственных колебаний. Для учета этих погрешностей обычно прибегают к процедуре сглаживания и расширения пиков спектра отклика [32], стр. 139. При этом расширенный пик с боков ограничивают линией, параллельной к кривой расчетного спектра (рис. 10.20).

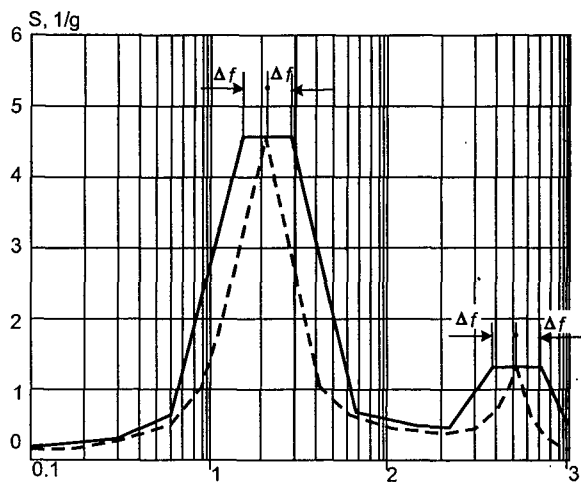


Рис. 10.20. Расширение вычисленных спектров отклика (пунктир — вычисленные значения)

Величина расширения Δf , вообще говоря, должна была бы приниматься на основе анализа чувствительности, однако на практике чаще всего принимают некоторую фиксированную относительную величину типа $\Delta f = \pm f_j$, где через f_j обозначена частота, на которой располагается j -й вычисленный пик.

Поскольку величина f_j является в некотором смысле случайной, то всегда имеется вероятность того, что она не совпадет с частотой осциллятора. Детальный анализ вероятностей показал, что высота пиков вероятностного спектра заметно ниже детерминистических значений [30], стр. 140, что дало основание для включения в нормы США по проектированию атомных станций следующей рекомендации — одновременно с расширением пиков снижать их максимумы на 15%.

Полезно указать на то, что описание поведения конструкции в виде спектра отклика является, в некотором смысле, двойственным к *амплитудно-частотной характеристике*, задаваемой выражением типа (10.51). Если это выражение рассматривать в качестве функции от частоты внешнего воздействия, то мы увидим, что амплитудно-частотная характеристика определяет зависимость некоторого фактора (перемещения точки, усилия и т.п.), взятого в заданной системе от изменяющейся частоты возмущения, в то время как

спектр отклика рассматривает реакцию меняющегося по частоте осциллятора на неизменное возмущение.

В заключение еще раз напомним, что использование спектров отклика возможно лишь в том случае, когда дополнительная масса устанавливаемого оборудования невелика и ее влиянием на общее поведение системы «здание-оборудование» можно пренебречь.

10.7 Действие импульсных и ударных нагрузок

Импульсные нагрузки, рассматриваемые в этом разделе, представляют собой кратковременно действующие силы и/или удары, не вызывающие в элементах сооружения макропластических деформаций. Микропластические деформации в местах контакта с ударяющим телом или в других точках конструкции и являющиеся причиной рассеяния энергии колебаний, учитываются в расчетах как внутреннее трение материала.

Чаще всего импульсная нагрузка представляется выражением типа

$$P(t) = \begin{cases} P_0 f(t) & \text{при } 0 \leq t \leq \tau \\ 0 & \text{при } t > \tau \end{cases}, \quad (10.127)$$

где $t = 0$ — начало действия нагрузки; P_0 — ее максимальное значение; $f(t)$ — закон изменения нагрузки во времени, пронормированный так, что максимум $|f(t)| = 1$. Наиболее часто употребляемые в расчетах функции $f(t)$ указаны в табл. 10.5.

Таким образом, импульсная нагрузка характеризуется продолжительностью действия τ ; законом изменения во времени (формой импульса) $f(t)$ и наибольшей величиной P_0 . Чем меньше тот промежуток времени, в течение которого действует знакопостоянная нагрузка, тем меньшую роль играет закон распределения этой нагрузки во времени [33]. Основное и решающее значение приобретает только одна характеристика нагрузки — импульс силы

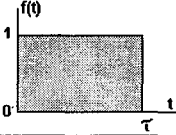
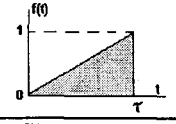
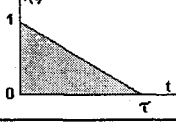
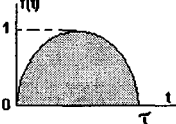
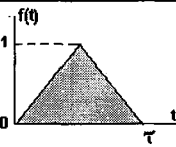
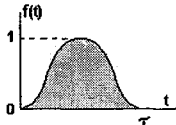
$$S = P_0 \int_0^{\tau} f(t) dt. \quad (10.128)$$

Для мгновенного импульса, когда $\tau \rightarrow 0$ максимальное перемещение простейшей системы с одной степенью свободы определяется формулой

$$Z_{\max} = \frac{S}{M\omega}, \quad (10.129)$$

где M — масса; ω — частота собственных колебаний. В других случаях значение Z_{\max} уточняется путем умножения на коэффициент импульсивности $\varepsilon(\tau^*)$, зависящий от относительной продолжительности импульса $\tau^* = \tau / T = \tau\omega / 2\pi$. Значения коэффициента интенсивности [7] уменьшаются от 1,0 при $\tau^* = 0$ до нуля (рис. 10.21).

Таблица 10.5.

№	График	$f(t)$ при $0 \leq t \leq \tau$	$\int_0^\tau f(t)dt$
1		$f(t) = 1$	τ
2		$f(t) = t/\tau$	$\tau/2$
3		$f(t) = 1 - t/\tau$	$\tau/2$
4		$f(t) = \sin(\pi t/\tau)$	$2\tau/\pi$
5		$f(t) = \begin{cases} 2t/\tau, & t \leq \tau/2 \\ 2[1 - (t/\tau)], & t > \tau/2 \end{cases}$	$\tau/2$
6		$f(t) = (1/2)[1 - \cos(2\pi t/\tau)]$	$\tau/2$

Если импульс вызван ударом по конструкции, то его значение можно приближенно оценить по формуле

$$S = mv_0(1 + k_0), \tag{10.130}$$

где m — масса ударяющего тела; v_0 — его скорость в момент соприкосновения с конструкцией; k_0 — коэффициент восстановления (отскока), значение которого зависит от свойств соударяющихся тел в месте контакта и от их формы (табл. 10.6). Этот коэффициент обычно определяется экспериментальным путем как отношение высоты отскока падающего тела к высоте его падения.

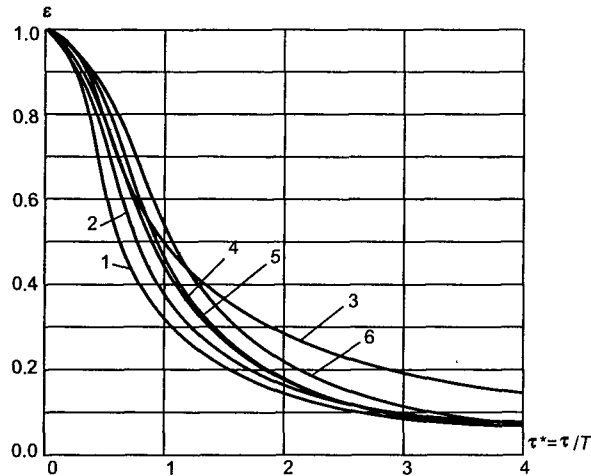


Рис. 10.21. Коэффициент импульсивности для шести форм импульса по табл. 10.5

Таблица 10.6.

Материал поверхности конструкции в месте удара	Материал и форма ударяющего тела				
	Сталь и другие твердые металлы		Медь, алюминий, твердые пластмассы, камень, бетон и пр.		Пластичные и сыпучие материалы
	Скругл.	Угловат.	Скругл.	Угловат.	
Сталь	0,60	0,35	0,40	0,25	0,00
Дерево	0,55	0,30	0,40	0,20	0,00
Камень	0,40	0,20	0,30	0,15	0,00
Бетон	0,35	0,15	0,25	0,10	0,00
Ксилолит	0,20	0,10	0,10	0,05	0,00
Асфальт	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00

При расчете на импульсные воздействия важную роль играет коэффициент потерь η , характеризующий затухание колебаний. Он связан с коэффициентом поглощения энергии ψ и коэффициентом внутреннего трения γ соотношениями

$$\eta = \psi / (2\pi) = \frac{\gamma}{(1 - \gamma^2 / 4)} \quad (10.131)$$

Через последний коэффициент выражается и логарифмический декремент колебаний

$$\delta = \frac{\gamma\pi}{\sqrt{1-\gamma^2/4}}. \quad (10.132)$$

Справочные данные о значениях коэффициентов η , ψ , γ или δ можно найти в [7] и в других источниках, включая нормативные документы [34, 35] и др.

Для систем с несколькими степенями свободы при действии системы мгновенных импульсов S_k^0 , приложенных в точках $k = 1, \dots, m$, решение ищется путем разложения по формам собственных колебаний (3.148) и дается формулой

$$u_j = \sum_{i=1}^n U_{ji} \exp\left(-\frac{\gamma}{2}\omega_i t\right) \sin(\omega_i t), \quad (j = 1, \dots, n), \quad (10.133)$$

где U_{ji} вычисляется с использованием форм собственных колебаний Ψ_i по формуле

$$U_{ji} = \frac{\Psi_{ji}}{\omega_j} \sum_{r=1}^m \varepsilon \left(\frac{\tau_r \omega_j}{2\pi} \right) \Psi_{jr} S_r^0, \quad (j = 1, \dots, n; i = 1, \dots, n). \quad (10.134)$$

Практический интерес, конечно, представляют экстремальные значения перемещений и усилий рассчитываемой системы, но отыскание момента времени, когда такой экстремум реализуется для суммы типа (10.133), вызывает не только определенные вычислительные трудности, но и встречает более серьезное возражение. Оно основывается на том факте, что, безусловно, имеются расхождения между вычисленными и фактическими частотами собственных колебаний системы [36], что приводит к заметному отклонению сдвига фаз.

В практике расчетов строительных конструкций утвердилась предложенная Е.С.Сорокиным [36] методика оценки суммы затухающих гармоник, в основу которой положена следующая идея — для гармоник с наибольшими амплитудами в сумму включаются значения, соответствующие моменту времени $t = T_q / 4$ (q — номер гармоники, для которой в сумме (10.133) достигается максимальная амплитуда U_{ji}), а для всех прочих берется значение огибающих этих гармоник в тот же момент времени. Иными словами, если для перемещения в точке j выполняется условие $|U_{jq}| > |U_{ji}|$ ($i \neq q$), то вычисления производятся по формуле

$$|u_j| = \sum_{i=1}^{q-1} |U_{ji}| \sin \frac{\pi\omega_i}{2\omega_q} + \sum_{i=q}^n |U_{ji}| \exp\left(-\frac{\gamma\pi\omega_i}{4\omega_q}\right). \quad (10.135)$$

Графическая иллюстрация для случая $q = 1$ дана на рис. 10.22.

По поводу суммирования внутренних сил, которое выполняется по формуле, аналогичной (10.135), следует сказать то же самое, что и для суммирования по Розенблюму в случае сейсмического воздействия — возникают неприятные эффекты потери знака.

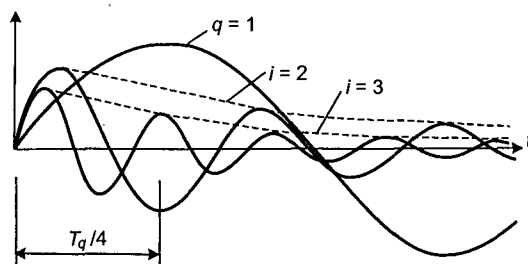


Рис. 10.22. Графическая интерпретация способа оценки экстремума

Но здесь, кроме указанного ранее выхода, имеется возможность и прямой оценки максимума перемещений (компонент усилий, напряжений и т.п.), определяемых по формулам типа (10.135). Для этого следует устроить перебор значений такой суммы на интервале времени от 0 до $T_q/4$ с достаточно мелким шагом, например, не менее одной восьмой наименьшего из учитываемых периодов собственных колебаний. При этом следует рассмотреть возможность изменения таких периодов примерно на $\pm 5\%$, чтобы учесть возможную неточность определения частот собственных колебаний.

10.8 Колебания под воздействием пульсаций ветрового потока

10.8.1 Моделирование ветрового воздействия

Ветровая нагрузка в соответствии с требованиями норм [20] может быть рассмотрена как:

- нормальное давление w_e , приложенное по внешней поверхности сооружения или элемента;
- нормальное давление w_i , приложенное к внутренним поверхностям зданий с проницаемыми ограждениями или проемами.

В первом случае нормальное давление w_e следует определять как сумму средней и пульсационной составляющих, во втором случае w_i следует рассматривать только как среднюю составляющую.

В результате расчета на действие ветровой нагрузки определяются перемещения узлов расчетной схемы и усилия (напряжения) в элементах системы отдельно от действия средней и пульсационной составляющих ветровой нагрузки. Суммарное значение реакции сооружения (перемещения, усилия, напряжения) определяется по формуле

$$X = X^s \pm X^d, \quad (10.136)$$

где X — величина искомого фактора; X^s — значение рассматриваемого фактора, определяемое действием статической компоненты ветровой нагрузки; X^d — то же от действия пульсационной составляющей ветровой нагрузки.

Знак \pm перед динамической составляющей значения фактора X^d напоминает о том, что в процессе вычислений оценивается его расчетная амплитуда. При определении суммарного эффекта ветрового воздействия необходимо выбрать тот знак, который является более неблагоприятным, что дает формулу

$$X = X^s + \text{sign}(X^s) \cdot X^d. \quad (10.137)$$

К сожалению, в тексте норм [20] и в популярных справочниках (см., например, [7]) знак \pm перед динамической составляющей отсутствует, что приводит в некоторых случаях к недоразумениям (этот недостаток исправлен в нормах [37]). Кроме того, нормы [20] оперируют с понятием *пульсационной составляющей ветровой нагрузки*, не указывая, что использование этой нагрузки для определения всех прочих факторов (перемещений, усилий и т.п.) нельзя выполнять с помощью обычных методов линейного расчета, если рассматривается система с более чем одной степенью свободы. Это было уже зафиксировано в предыдущей редакции норм [39], но, к сожалению, не попало в явной форме в [20].

10.8.2 Динамическое действие пульсационной составляющей ветровой нагрузки

Целью динамического расчета на ветровое воздействие является анализ установившихся колебаний сооружения в ветровом потоке. Определяются вероятностные характеристики узловых перемещений, внутренних сил или напряжений в конечных элементах. При этом конечной целью является определение динамической составляющей X^d расчетного фактора X .

Как и в документах [20, 37] используется квазистационарная модель обтекания, когда предполагается, что характерные размеры обдуваемых ветром поверхностей малы по сравнению с поперечными размерами вихрей, что заставляет ограничивать использование описываемого подхода зданиями и сооружениями, у которых характерный размер сплошной обдуваемой поверхности не превышает величину порядка 100 м. При больших размерах в плане использование квазистационарной модели вряд ли допустимо, поскольку не выполняется основное предположение о малости генеральных размеров конструкции по сравнению с диаметром вихрей, содержащей основную энергию турбулентного потока. По-видимому, указанное ограничение в большей степени касается сооружений со сплошными внешними поверхностями (здания, градирни и т.п.), чем сквозных конструкций (башни, эстакады и т.п.).

Выше в разделе 10.2 было указано, каким образом общие уравнения движения

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{q}(t) \quad (10.138)$$

путем использования разложения по формам собственных колебаний

$$\mathbf{U} = \Phi \mathbf{y} \quad (10.139)$$

преобразуются к независимым уравнениям относительно обобщенных (нормальных) координат $\mathbf{y}(t)$

$$\ddot{y}_r(t) + \gamma \omega_r \dot{y}_r(t) + \omega_r^2 y_r(t) = Q_r(t) \quad (r = 1, \dots, n), \quad (10.140)$$

где

$\gamma = \delta/\pi$ — коэффициент неупругого сопротивления;
 δ — логарифмический декремент колебаний;
 $Q_r(t)$ — обобщенная сила, являющаяся r -й компонентой вектора

$$\mathbf{Q}(t) = \Phi^T \mathbf{q}(t) \quad (10.141)$$

или в развернутой форме

$$Q_r = \sum_{j=1}^n \psi_{jr} q_j. \quad (10.142)$$

В настоящее время общепринятым является подход, когда нагрузка от ветровых пульсаций представляется как стационарный и стационарно связанный случайный процесс. При действии на систему с n степенями свободы такой нагрузки $q_j(t)$ ($j = 1, \dots, n$) используется их описание в виде спектральных и взаимных спектральных плотностей $S_{ij}(\omega)$ ⁶.

Взаимные спектральные плотности обобщенных сил $Q_r(t)$ ($r = 1, \dots, n$), согласно (10.142), связаны с $S_{ij}(\omega)$ зависимостью

$$S_{Q_r Q_s}(\omega) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \psi_{ir} S_{ij} \psi_{js} \quad (10.143)$$

или в матричной форме

$$\mathbf{S}_Q = \Psi^T \mathbf{S}_q \Psi, \quad (10.144)$$

где

\mathbf{S}_q — матрица взаимных спектральных плотностей нагрузок $q_j(t)$ ($j=1, \dots, n$);
 \mathbf{S}_Q — то же для обобщенных нагрузок $Q_r(t)$ ($r = 1, \dots, n$).

Реакцией механической системы $\mathbf{X}(t)$ на действие динамической нагрузки $\mathbf{q}(t)$ будем считать вектор узловых перемещений, внутренних сил (напряже-

⁶ Значение спектральной плотности $S_f(\omega)$ пропорционально доле общей мощности случайного процесса $Q_f(t)$, приходящейся на диапазон частот от ω до $\omega + d\omega$. Взаимные спектральные плотности $S_{ij}(\omega)$ характеризуют степень корреляционной связи между процессами $Q_i(t)$ и $Q_j(t)$ в этом же диапазоне частот.

ний) в конечных элементах или вектор других расчетных факторов. Важно лишь, что реакция $\mathbf{X}(t)$ связана с обобщенными координатами $\mathbf{p}(t)$ линейной зависимостью

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{p} . \tag{10.145}$$

Если $\mathbf{q}(t)$ — описанное выше стационарное случайное воздействие, то компоненты вектора $\mathbf{X}(t)$ являются стационарными и стационарно связанными случайными процессами, которые характеризуются двумя матрицами:

- матрицей спектральных плотностей \mathbf{S}_X ;
- матрицей ковариаций $\langle \mathbf{X}^2 \rangle$, элементами которой являются ковариации $\langle X_i X_j \rangle$ компонент вектора \mathbf{X} (здесь и далее угловыми скобками обозначена операция осреднения).

В силу линейной зависимости (10.145), для матрицы ковариаций справедливо соотношение

$$\langle \mathbf{X}^2 \rangle = \mathbf{A} \langle \mathbf{p}^2 \rangle \mathbf{A}^T . \tag{10.146}$$

Ковариации обобщенных координат, согласно [40], определяются по формуле

$$\langle y_r y_s \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_{q_r q_s}(\omega) d\omega}{(-\omega^2 + i\gamma\omega\omega_r + \omega_r^2)(-\omega^2 - i\gamma\omega\omega_s + \omega_s^2)} . \tag{10.147}$$

При расчете на действие пульсационной составляющей ветровой нагрузки в матрице Ψ достаточно удерживать лишь первые m столбцов (в подавляющем большинстве случаев m намного меньше n), для которых собственные частоты не превышают некоторого предельного значения ω_{lim} . Последнее рекомендуется нормами [20] в зависимости от ветрового района и декремента колебаний. Соответственно до m сокращается и число нормальных координат y_r , а также количество уравнений (10.140).

10.8.3 Представление пульсационной составляющей ветровой нагрузки

Будем предполагать, что с сооружением, находящимся в ветровом потоке, связана система координат (X, Y, Z) с началом в точке O , такая что:

- точка O лежит на поверхности земли;
- ось Z вертикальна и направлена вверх;
- направление X совпадает с направлением ветра.

Обозначим через \mathbf{r} радиус-вектор точки на поверхности сооружения относительно полюса O . В работе [40] показано, что вектор пульсационной составляющей определяется по формуле

$$\mathbf{W}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{W}_0(\mathbf{r})\zeta(z)v^p(\mathbf{r}, t), \quad (10.148)$$

где

$\mathbf{W}_0(\mathbf{r})$ — вектор средней (статической) составляющей ветровой нагрузки;
 $\zeta(z)$ — коэффициент пульсаций на высоте z , значение которого зависит от типа местности;
 $v^p(\mathbf{r}, t)$ — пульсационная составляющая ветровой нагрузки.

При дискретном задании ветровой нагрузки в узлы расчетной схемы формула (10.116) преобразуется к виду

$$\mathbf{P}_k^W(t) = \mathbf{P}_k^s \zeta(z_k) v_k^p(t) \quad (k = 1, \dots, n_y) \quad (10.149)$$

где

n_y — число узлов расчетной схемы, в которых задана статическая составляющая ветровой нагрузки;

$\mathbf{P}_k^s, \mathbf{P}_k^W$ — векторы статической и пульсационной составляющих ветровой нагрузки в узле k .

Элементы матрицы взаимных спектральных плотностей динамического воздействия $q(t)$ вычисляются по формуле

$$S_{ij} = P_{kq}^s P_{il}^s \zeta(z_k) \zeta(z_l) S_{v_k^p v_l^p}, \quad (10.150)$$

где

$i, j = 1, \dots, n$ — номера обобщенных координат;

$k, l = 1, \dots, n_y$ — номера узлов;

$q = 1, \dots, n_k; l = 1, \dots, n_l$ — номера степеней свободы соответственно в узлах k и l .

Например, в программном комплексе SCAD число динамических степеней свободы может меняться от узла к узлу и определяется как инерционными характеристиками узла, так и наложенными на него связями. Допускается до шести степеней свободы в узле, т.е. в (10.150) будет $0 \leq n_k \leq n_l \leq 6$. Таким образом, двойные индексы при статических компонентах нагрузки в (10.150) определяют номер узла и номер степени свободы в этом узле.

Если такую же индексацию применить к фундаментальной матрице Ψ , то матричная формула (10.144) примет следующий развернутый вид

$$S_{Q_r Q_s} = \sum_{k=1}^{n_y} \sum_{l=1}^{n_y} \sum_{q=1}^{n_k} \sum_{l=1}^{n_l} \Psi_{kqr} \Psi_{lss} P_{kq}^s P_{ll}^s \zeta(z_k) \zeta(z_l) S_{v_k^p v_l^p} \quad (r, s = 1, \dots, m). \quad (10.151)$$

После перегруппировки слагаемых можно получить:

$$S_{Q_r Q_s} = \sum_{k=1}^{n_y} \sum_{l=1}^{n_y} A_{kr} A_{ls} S_{v_k^p v_l^p}, \quad (10.152)$$

где введены обозначения

$$A_{kr} = \zeta(z_k) \sum_{q=1}^{n_k} \Psi_{kqr} P_{kq}^s; \quad A_{ls} = \zeta(z_l) \sum_{t=1}^{n_l} \Psi_{lts} P_{lt}^s. \quad (10.153)$$

После подстановки (10.152) в (10.147) получаем следующее выражение для ковариации обобщенных координат

$$\langle y_r, y_s \rangle = \sum_{k=1}^{n_y} \sum_{l=1}^{n_y} A_{kr} A_{ls} \xi_{klrs} \quad (r, s = 1, \dots, m), \quad (10.154)$$

где

$$\xi_{klrs} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S_{v_k^p v_l^p} d\omega}{(-\omega^2 + i\gamma\omega\omega_r + \omega_r^2)(-\omega^2 - i\gamma\omega\omega_s + \omega_s^2)}. \quad (10.155)$$

При этом

$$\frac{1}{(-\omega^2 + i\gamma\omega\omega_r + \omega_r^2)(-\omega^2 - i\gamma\omega\omega_s + \omega_s^2)} = \text{Re}_{rs}(\omega) + i\text{Im}_{rs}(\omega), \quad (10.156)$$

где

$$\text{Re}_{rs} = \frac{(-\omega^2 + \omega_r^2)(-\omega^2 + \omega_s^2) + \gamma^2 \omega^2 \omega_r \omega_s}{\left[(-\omega^2 + \omega_r^2) + \gamma^2 \omega^2 \omega_r^2\right] \left[(-\omega^2 + \omega_s^2) + \gamma^2 \omega^2 \omega_s^2\right]}, \quad (10.157)$$

$$\text{Im}_{rs} = \frac{\gamma\omega \left[\omega_s(-\omega^2 + \omega_r^2) - \omega_r(-\omega^2 + \omega_s^2) \right]}{\left[(-\omega^2 + \omega_r^2) + \gamma^2 \omega^2 \omega_r^2\right] \left[(-\omega^2 + \omega_s^2) + \gamma^2 \omega^2 \omega_s^2\right]}. \quad (10.158)$$

С учетом (10.156) интеграл (10.155) можно представить в виде суммы

$$\xi_{klrs} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{v_k^p v_l^p} \text{Re}_{rs}(\omega) d\omega + \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{v_k^p v_l^p} \text{Im}_{rs}(\omega) d\omega. \quad (10.159)$$

Спектральные и взаимные спектральные плотности пульсаций скорости ветра должны быть четными функциями от ω , то есть $S_{v_k^p v_l^p}(\omega) = S_{v_k^p v_l^p}(-\omega)$

($k, l = 1, \dots, n_y$). Кроме того, из (10.157) и (10.158) следует, что $\text{Re}_{rs}(\omega)$ является четной, а $\text{Im}_{rs}(\omega)$ — нечетной функциями: $\text{Re}_{rs}(\omega) = \text{Re}_{rs}(-\omega)$, $\text{Im}_{rs}(\omega) = -\text{Im}_{rs}(-\omega)$.

Из приведенных свойств четности/нечетности следует, что мнимая часть интеграла (10.159) равна нулю, а в действительной части можно заменить интеграл от $-\infty$ до ∞ удвоенным интегралом от 0 до ∞ . Тогда (10.159) преобразуется к виду

$$\xi_{klrs} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} S_{v_k^p v_l^p} \text{Re}_{rs}(\omega) d\omega \quad (k, l = 1, \dots, n_y; \quad r, s = 1, \dots, m). \quad (10.160)$$

Из анализа (10.154) также следует, что

$$\operatorname{Re}_{rs}(\omega) = \operatorname{Re}_{sr}(-\omega), \quad \Phi_{klrs} = \Phi_{klrs}. \quad (10.161)$$

С учетом (10.154) можно сделать вывод о симметрии матрицы ковариаций обобщенных координат $\langle y_r, y_s \rangle = \langle y_s, y_r \rangle$ ($r, s = 1, \dots, m$).

10.8.4 Спектр пульсаций скорости ветра

Взаимный спектр пульсаций продольной компоненты скорости ветра в свободной атмосфере [40] представляет собой скалярную функцию частоты ω и пары точек пространства, отождествляемые с узлами расчетной схемы сооружения, к которым приложена ветровая нагрузка

$$S_{v_k^p v_l^p} = \frac{u^2}{3f(1+u^2)^{4/3}} \exp(-u\chi_{kl}), \quad (k, l = 1, \dots, n_y), \quad (10.162)$$

где

$f = \omega/2\pi$ — частота в Гц;

$u = Lf/v_{10}$ — безразмерная частота;

$L = 1200$ м — интегральный масштаб турбулентности;

v_{10} — средняя скорость ветра на высоте 10 м;

χ_{kl} — приведенное расстояние между точками k и l ($\chi_{kl} = \chi_{lk}$).

$$\chi_{kl} = (20|x_k - x_l| + 8|y_k - y_l| + 8|z_k - z_l|) / L. \quad (10.163)$$

После подстановки (10.162) в (10.160) получаем

$$\xi_{klrs} = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{u^2 \exp(-u\chi_{kl})}{3f(1+u^2)^{4/3}} \operatorname{Re}_{rs}(\omega) d\omega, \quad (10.164)$$

при этом $\xi_{klrs} = \xi_{lkr s}$ ($k, l = 1, \dots, n_y$; $r, s = 1, \dots, m$).

10.8.5 Динамическая составляющая расчетного фактора

Расчетное динамическое значение некоторого фактора X , связанного с обобщенными координатами линейной зависимостью

$$X = \sum_{r=1}^m \alpha_r p_r \quad (10.165)$$

определяются по формуле типа формулы Розенблюма (3.160)

$$X^d = \left(\sum_{r=1}^m \sum_{s=1}^m \alpha_r \langle p_r p_s \rangle \alpha_s \right)^{1/2}. \quad (10.166)$$

Здесь также происходят потери знаков отдельных компонент, о которых говорилось выше при рассмотрении сейсмической реакции, и также нет соответствия между такими откликами, как перемещения и внутренние силы (напряжения), поскольку преобразование (10.166) является нелинейным. Последнее обстоятельство, не слишком четко представляемое в справочной литературе (см., например, [7]), зачастую приводит к недоразумениям. Достаточно типичный пример представлен на рис. 10.23, из которого видно, что вычисленные суммарные формы собственных колебаний и соответствующие им инерционные силы не приводят к суммарной эпюре моментов, которая вычисляется по моментам отдельных форм колебаний. Для каждой формы порознь такое соответствие, естественно, имеет место.

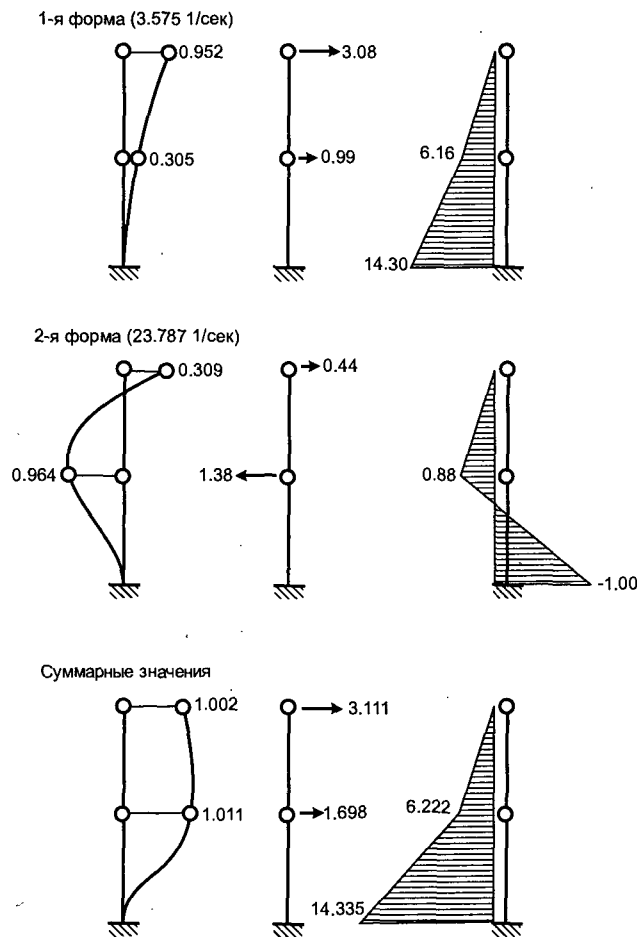


Рис. 10.23. Результаты расчета по формам собственных колебаний

Следует отметить, что действующие нормы предусматривают применение коэффициента обеспеченности $\lambda = 3,0$, который использован при назначении коэффициентов пульсации. С другой стороны, имеется известная рекомендация А. Давенпорта [43], в соответствии с которой коэффициент обеспеченности связывается с периодом собственных колебаний, и для i -го тона вычисляется по формуле

$$\lambda_i = \sqrt{2 \ln(T/T_i)} + \frac{0.577}{\sqrt{2 \ln(T/T_i)}} \quad (10.167)$$

при $T = 3600$ сек, соответствующем времени осреднения, использованном при получении спектров пульсации продольной компоненты скорости ветра.

Если воспользоваться этой рекомендацией, то

$$X^d = \left(\sum_{r=1}^m \frac{\lambda_r}{3} \sum_{s=1}^m \alpha_r \langle y_r, y_s \rangle \alpha_s \right)^{1/2}, \quad (10.168)$$

что и дает искомый результат.

10.8.6 Проблемы численной реализации

Из изложенного видно, что расчет на динамическое воздействие пульсационной составляющей ветровой нагрузки (с вычислительной точки зрения) содержит следующую основную трудность — необходимость определения огромного числа коэффициентов ξ_{klrs} , каждый из которых требует вычисления несобственного интеграла.

Для уменьшения объема вычислений можно для каждой пары учитываемых собственных частот ω_r, ω_s заменить дискретное множество величин ξ_{klrs} непрерывной функцией $\xi_{rs}(\chi)$ на отрезке $[0, \chi_{lim}]$, где $\chi_{lim} \geq \chi_{kl}$ и определяется габаритными размерами сооружения. Непрерывная функция $\xi_{rs}(\chi)$ на отрезке $[0, \chi_{lim}]$ хорошо аппроксимируется кубическим сплайном, и требуемые значения интегралов ξ_{klrs} получаются подстановкой в этот сплайн соответствующих значений χ_{kl} .

Сама сплайн-аппроксимация строится следующим образом. Отрезок числовой оси $[0, \chi_{lim}]$ подразделяется на семь частей в отношении 1:1:1:3:3:9:9, как показано на рис. 10.24.

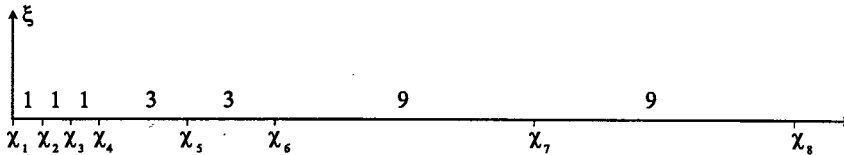


Рис. 10.24. Узловые точки сплайн-аппроксимации

По заданным в узловых точках значениям строится кубический полином, в котором некоторые коэффициенты вычисляются из условий сопряжения, которые основываются на свойствах непрерывности первых и вторых производных аппроксимирующей функции $\xi_{rs}(\chi)$. Алгоритм интерполяции кубическими сплайнами подробно описан в [44]. В результате аппроксимации на каждом из подинтервалов определяется соответствующий кубический полином.

Для каждой пары собственных частот $\omega_r \leq \omega_s$ ($r, s = 1, \dots, m$) в каждой узловой точке сплайна χ_i ($i = 1, \dots, 8$) необходимо вычислить несобственный интеграл (10.164), который представим в виде суммы интегралов I_1 в пределах от 0 до ω_s и I_2 в пределах от ω_s до бесконечности. Типичный график подынтегральной функции показан на рис. 10.25.

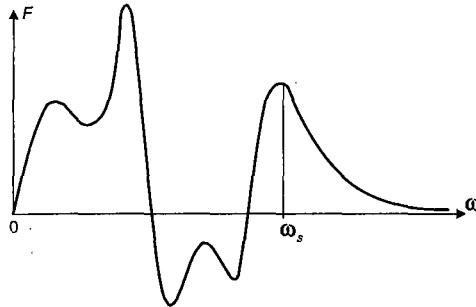


Рис. 10.25. Типичный график подынтегральной функции

Наиболее сложным является интегрирование на отрезке $[0, \omega_s]$, поскольку на этом участке функция сильно осциллирует и имеет острые пики. Такой характер подынтегральной функции затрудняет процедуру численного интегрирования. Наиболее предпочтительными при интегрировании таких функций являются адаптивные квадратурные процедуры, целью которых служит получение результата с предписанной точностью за малое (по возможности) машинное время. Описание такой процедуры дано в [44], стр. 108.

На интервале $[\omega_s, \infty]$ подынтегральная функция убывает и является достаточно пологой. Сложность при вычислении этого интеграла заключается в том, что он имеет бесконечный верхний предел, который при численном интегрировании следует заменить конечным. Однако здесь можно воспользоваться свойством асимптотически экспоненциального затухания, что дает возможность получить хорошую оценку «реального верхнего предела» интегрирования.

Формирование матрицы ковариаций обобщенных координат размером $m \times m$ (m — число обобщенных координат) требует значительных вычислительных ресурсов. С целью сокращения объема вычислений полезно рассмотреть возможные упрощения вычислительного процесса. Подобный анализ содержится в работах [45, 46], который показывает, что величина

взаимной корреляции r -й и s -й форм собственных колебаний $\langle y_r, y_s \rangle$ по отношению к основным членам $\langle y_r, y_r \rangle$ и $\langle y_s, y_s \rangle$ может быть оценена с использованием приближенной зависимости

$$\langle y_r, y_s \rangle / \langle y_r, y_r \rangle \cong \frac{1}{1 + \frac{1}{\gamma^2} \left(1 - \frac{\omega_r}{\omega_s}\right)^2} = \Delta_{rs}. \quad (10.169)$$

Использование формулы (10.169) позволяет предварительно оценить величину побочных элементов матрицы ковариаций и не вычислять те интегралы, для которых оценка (10.169) дает малое, по сравнению с единицей, значение. Так, например, при $\omega_r = 3\omega_s$ и $\gamma = 0,1$ оценка (10.169) дает значение 0,005, и соответствующий интеграл вряд ли следует учитывать.