

## Изгиб балки

Будем далее называть балкой достаточно жесткое и тонкое упругое тело. Тонкость и жесткость балки понимаются в том смысле, что как поперечные ее размеры, так и перемещения точек в результате приложения к балке усилий считаются достаточно малыми по сравнению с ее длиной. Мы будем предполагать балку прямолинейной, т. е. считать, что отклонениями ее формы от прямолинейного отрезка можно пренебречь. Балка оказывает сопротивление только изгибающим (т. е. изменяющим кривизну) усилиям. Мы будем считать, что растягивающим (т. е. изменяющим длину балки как целого) усилиям балка вовсе не поддается. В этом параграфе содержится формальный вывод дифференциальных соотношений, связывающих нагрузку, приложенную к балке, с деформациями балки.

Предположим, что балка расположена вдоль оси  $Ox$  между точками  $x = 0$  и  $x = 1$ . Вертикальное перемещение точки балки с абсциссой  $x$  будем обозначать через  $v(x)$ .

Положительным на оси  $v$  будем считать направление вниз (рис. 7). Мы ограничимся рассмотрением плоского изгиба, т. е. будем предполагать, что все прикладываемые к балке усилия действуют в плоскости  $xOy$ .

Для каждой системы нагрузок  $R$ , приложенных к балке, будем через  $M_R(x)$  обозначать вызываемый ею (а также порожденными ею реакциями опор) изгибающий момент в сечении  $x$  этой балки.

Рассмотрим теперь две прикладываемые к балке системы нагрузок,  $R$  и  $S$ . Мы будем при этом предполагать, что изгибающие усилия, порождаемые нагрузкой  $S$ , приложенной к предварительно ненагруженной балке, совпадают с дополнительными изгибающими усилиями  $M_{R+S} - M_R$ , возникающими в балке, к которой предварительно приложена нагрузка  $R$ . Иными словами, мы будем считать, что

$$M_R(x) + M_S(x) = M_{R+S}(x). \quad (3.1)$$

Разумеется, такое предположение носит чисто физический характер и должно каждый раз проверяться. Ясно вместе с тем, что если нагрузка  $R$  не очень сильно изменяет прямолинейную форму балки, а нагрузка  $S$  – поперечная, то предположение (3.1) не противоречит обстоятельствам дела.

Из (3.1), предполагая непрерывность зависимости значения изгибающего момента  $M_R(x)$  в каждой точке  $x$  от нагрузки  $R$  и обозначая через  $\alpha R$  нагрузку  $R$ , умноженную на  $\alpha$  (т. е. увеличенную в  $\alpha$  раз, если  $\alpha > 1$ , и уменьшенную в  $1/\alpha$  раз, если  $\alpha < 1$ ), мы можем получить, что

$$M_{\alpha R}(x) = \alpha M_R(x). \quad (3.2)$$

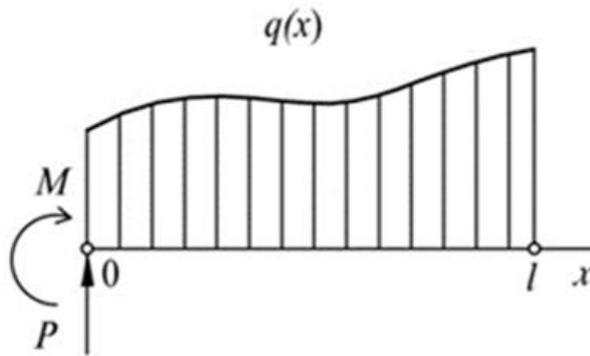


Рис. 3.1

Возьмем балку, на которую действует распределенная нагрузка  $R$ , имеющая некоторую интенсивность  $q(x)$  в каждой точке  $x$ . Пусть характер прикрепления балки к несущим ее конструкциям таков, что реакция левой ее опоры состоит из силы  $P$  и момента  $M$  (рис. 3.1). В этом случае изгибающий момент  $M_R(x)$  в поперечном сечении балки с абсциссой  $x$  равен, как легко подсчитать,

$$M + Px - \int_0^x (x-t)q(t)dt. \quad (3.3)$$

Дифференцируя это выражение по  $x$  (последнее слагаемое дифференцируется, во-первых, как интеграл с переменным верхним пределом  $x$ , а во-вторых, как интеграл, зависящий от параметра  $x$ ), мы получаем

$$\frac{dM_R(x)}{dx} = P + (x-x)q(x) - \int_0^x q(t)dt = P - \int_0^x q(t)dt.$$

Повторное дифференцирование дает нам

$$\frac{d^2M_R(x)}{dx^2} = -q(x). \quad (3.4)$$

Обратимся теперь к деформациям балок.

Пусть приложенная к балке нагрузка  $R$  состоит из двух моментов,

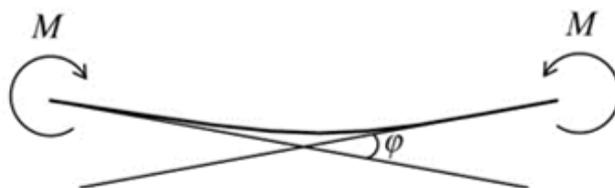


Рис. 3.2

приложенных к ее концам, которые равны по величине  $M$ , противоположны по направлению и изгибают балку выпуклостью вниз (т. е. в направлении возрастания  $v$ ). Будем считать, что никаких других усилий к балке не приложено. В результате действия на балку двух указанных моментов правый конец балки

повернется

относительно левого на некоторый угол, который мы обозначим через  $\varphi$  (рис. 3.2). Этот угол, очевидно, является некоторой функцией изгибающего момента  $M$ :

$$\varphi = \varphi(M) \quad (3.5)$$

Предположим, что  $\varphi$  есть линейная функция  $M$ :

$$\varphi = kM \quad (3.6)$$

Это предположение соответствует закону Гука о пропорциональности деформаций усилиям. В условиях выбранных нами направлений изгибающих моментов и осей координат ( $x$  – направо, а  $y$  – вниз) угол  $\varphi$  оказывается отрицательным. Поэтому должно быть  $k < 0$ . Считая впредь рассматриваемую балку однородной по длине, можно показать, как это делается во всех курсах сопротивления материалов, что

$$k = -\frac{1}{EI}, \quad (3.7)$$

где  $l$  – длина изгибаемой балки;  $I$  – момент инерции ее поперечного сечения относительно горизонтальной прямой, лежащей в плоскости этого сечения и проходящей через его центр тяжести, а  $E$  – модуль Юнга материала балки. В целях полноты изложения напомним этот вывод.

В теории изгиба призматических балок обычно принимается гипотеза

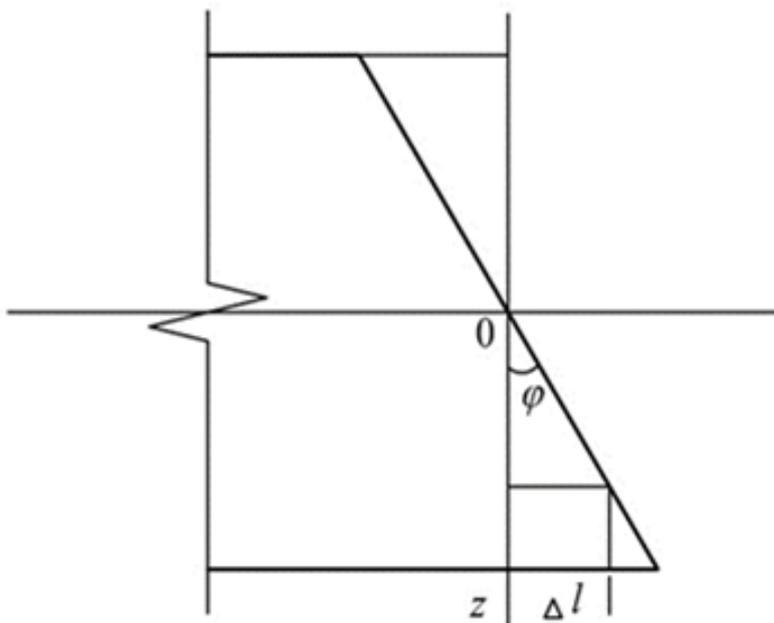


Рис. 3.3

плоских сечений Сен-Венана. Она состоит в предположении, что каждое поперечное сечение ненагруженной балки после приложения к ней изгибающей нагрузки остается плоским и лишь поворачивается около оси изгибающего момента. Формально это равносильно предположению о том, что абсолютное удлинение  $\Delta l$  в направлении каждой нормали к сечению есть линейная функция координаты  $z$ , характеризующей (рис. 3.3) положение этой нормали по высоте балки. Тем самым линейной функцией координаты  $z$  должно быть и нормальное

напряжение  $\sigma$  в каждой точке сечения.

Заметим, что при отсутствии продольной нагрузки на балку равнодействующая внутренних продольных усилий в каждом ее сечении должна быть равна нулю. Значит, при одних значениях  $z$  нормальные напряжения положительны, а при других – отрицательны. В качестве начала отсчета  $z$  выберем тот уровень по высоте балки, на котором нормальные напряжения (а потому – и удлинения) равны нулю.

На рис. 3.3 изображен график удлинения  $\Delta l$  в зависимости от  $z$ . Поскольку балка предполагается жесткой, и углы ее поворота – малыми, угол  $\varphi$  можно по величине отождествить с его тангенсом и (с учетом выбора направлений осей) написать:

$$\Delta l = -\varphi z.$$

А так как напряжение  $\sigma$  определяется соотношением

$$\sigma = -\frac{\Delta l}{l} E,$$

должно быть

$$\sigma = -\frac{\varphi E}{l} z.$$

Обозначим через  $b(z)$  ширину балки на уровне  $z$ . Тогда усилие, действующее в элементарном слое  $dz$ , будет равно

$$ab(z)dz = -\frac{\varphi E}{l} zb(z)dz,$$

а момент всех таких усилий относительно оси  $z = 0$  –

$$M = -\frac{\varphi E}{l} \int_{z_1}^{z_2} z^2 b(z) dz.$$

Последний интеграл есть момент инерции  $I$  сечения относительно нейтрального слоя  $z = 0$ . Таким образом,  $M = -\frac{\varphi EI}{l}$ , что вместе с (3.6) и дает (3.7).

В условиях рассматриваемой на рис. 3.2 нагрузки  $R$  в каждом поперечном сечении балки с абсциссой  $x$  возникает изгибающий момент  $M_R(x)$ , который, очевидно, постоянен по длине балки и равен  $M$ :

$$M_R(x) = M_0 = M. \quad (3.8)$$

Из (3.6), (3.7) и (3.8) следует, что

$$\frac{\varphi}{l} = -\frac{M_0}{EI}. \quad (3.9)$$

Отношение  $\frac{\varphi}{l}$  есть угол поворота балки, отнесенный к единице ее длины, т.

е. средняя кривизна балки. Поскольку в наших условиях балка однородна и действующий в ней изгибающий момент постоянен по ее длине, кривизна балки

во всех ее точках одинакова и равна средней кривизне. Но в условиях предполагаемой жесткости балки ее кривизну можно принять равной второй производной вертикального смещения точки балки по ее длине. Поэтому

$$\frac{\varphi}{l} = -\frac{d^2v}{dx^2}.$$

Вместе с (3.9) это дает нам

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M_0}{EI}. \quad (3.10)$$

Заметим теперь, что кривизна (искривленность) изогнутой балки в некоторой ее точке  $x$  зависит только от изгибающего момента  $M(x)$  в этой точке и не зависит от того, какими будут его значения в остальных точках балки. Физически (т. е. интуитивно) это представляется совершенно очевидным, а с формальной точки зрения соответствует принимаемой при изучении напряжений в теле возможности отсекал любую его часть и заменять ее действие на оставшуюся часть тела надлежащей системой сил.

Значит, для каждой точки  $x$  балки можно написать

$$\frac{d^2v_R(x)}{dx^2} = -\frac{M_R(x)}{EI} \quad (3.11)$$

независимо от приложенной к балке нагрузки  $R$ . Иными словами, функция прогиба  $v(x)$  балки связана с действующим в балке изгибающим моментом  $M(x)$  дифференциальным уравнением

$$\frac{d^2v(x)}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI}. \quad (3.12)$$

Из (3.12) следует, что, какова бы ни была дважды интегрируемая функция  $M(x)$ , описывающая изгибающий момент в балке, можно указать соответствующую ей функцию  $v(x)$ , описывающую прогибы этой балки. Эта функция  $v(x)$  определяется по  $M(x)$  единственным образом с точностью до линейного слагаемого  $Ax + B$ , соответствующего перемещениям балки как твердого тела. Для определения постоянных  $A$  и  $B$  следует указывать те или иные способы закрепления концов балки. Коль скоро эти способы закрепления указаны, функция прогиба  $v(x)$  определяется по функции изгибающего момента  $M(x)$  однозначно.

С другой стороны, из того же равенства (3.12) следует, что по любой дважды дифференцируемой функции  $v(x)$ , для которой выполняются те или иные начальные (или краевые) условия, отвечающие кинематическим условиям закрепления балки, можно указать такую функцию  $M(x)$ , что приложение к балке усилий, приводящих в каждой ее точке  $x$  к изгибающему моменту  $M(x)$ , породит в каждой точке  $x$  вертикальное смещение  $v(x)$ .

Ввиду линейности дифференциального уравнения (3.12) при любых нагрузках  $R$  и  $S$ , для которых выполняется (3.1), должно иметь место и

$$\frac{d^2 v_{R+S}(x)}{dx^2} = -\frac{M_R(x) + M_S(x)}{EI}, \quad (3.13)$$

а при любом вещественном  $\alpha$  из (3.2) следует

$$\frac{d^2 v_{\alpha R}(x)}{dx^2} = -\alpha \frac{M_R(x)}{EI}. \quad (3.14)$$

Отсюда в свою очередь вытекает, что при исключении перемещения балки как твердого тела должно быть

$$v_{R+S}(x) = v_R(x) + v_S(x) \quad (3.15)$$

$$v_{\alpha R}(x) = \alpha v_R(x). \quad (3.16)$$

Тогда дифференциальное уравнение по изгибу балки (3.12) от действия на неё двух нагрузок  $R$  и  $S$ , увеличенных соответственно в  $\alpha$  и  $\beta$  раз примет вид

$$\frac{d^2 v_{\alpha R + \beta S}(x)}{dx^2} = -\frac{\alpha M_R(x) + \beta M_S(x)}{EI}.$$

Решение данного неоднородного линейного с постоянными коэффициентами дифференциального уравнения имеет вид:

$$v_{\alpha R + \beta S}(x) = \alpha v_R(x) + \beta v_S(x) \quad (3.17)$$

Отметим, наконец, что из (3.4) и (3.12) следует

$$EI \frac{d^4 v(x)}{dx^4} = q(x). \quad (3.18)$$

Это соотношение принято называть дифференциальным уравнением изгиба балки.

Введем обозначения, которые упростят дальнейшее изложение решения дифференциального уравнением изгиба балки.

Пусть

$v_P(x)$  – прогиб балки от сосредоточенной нагрузки;

$v_q(x)$  – прогиб балки от распределенной нагрузки;

$v_M(x)$  – прогиб балки от сосредоточенного момента.

Тогда обобщая равенство (3.17), получим

$$v_{\sum \alpha_i P_i + \sum \beta_k M_{k+q}}(x) = \sum \alpha_i v_{P_i}(x) + \sum \beta_k v_{M_k}(x) \quad (3.19)$$

Из равенства (3.19) следует, что прогиб балки от общей нагрузки можно определить как алгебраическую сумму прогибов балки от отдельно взятых элементарных нагрузок.

Обобщая вышесказанное, рассмотрим общую схему для определения прогиба балки  $v_R(x)$  под действием на неё каких-либо элементарных нагрузок.

1) Рассматриваемую балку помещают в удобную для определения её прогиба прямоугольную систему координат, так чтобы начало балки совпало с началом системы координат, а конец помещают на ось абсцисс. В результате чего

точки балки займут отрезок  $[0;l]$  длины  $l$ .

2) На отрезке  $[0;l]$  составляют функцию рассматриваемой нагрузки  $R(x)$ .

3) Для рассматриваемой нагрузки записывают соответствующее дифференциальное уравнение изгиба балки. А для положения концов балки на опорах выписывают соответствующие данному способу краевые условия для функции прогиба балки.

4) Пусть функция прогиба балки  $v(x)$  является непрерывной функцией и имеет непрерывные производные  $(n-1)$ -го порядка, где  $n$ -порядок дифференциального уравнения изгиба балки внутри отрезка  $[0,l]$ , а  $n$ -я производная функции  $v(x)$  – кусочно-непрерывная, кусочно-монотонная и ограничена на отрезке  $[0;l]$  функция. Тогда согласно теории рядов Фурье можно выбирать базис пространства  $C_{[0;l]} - \{v_1(x), v_2(x), \dots, v_n(x), \dots\}$ . Базис пространства выбирают таким образом, чтобы его базисные элементы  $v_k(x)$  удовлетворяли краевым условиям рассматриваемого дифференциального уравнения. А их  $n$ -е производные составляли ортогональную систему функций

$$\frac{d^n v_k(x)}{dx^n} = \lambda_k \varphi_k(x),$$

где  $n$ -порядок дифференциального уравнения.

Выбрав базис  $\{v_k(x)\}$ , составляют формальный функциональный ряд – разложение функции прогиба балки  $v(x)$  по этому базису:

$$v(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k v_k(x),$$

где  $b_k$  – неизвестные коэффициенты.

5) Раскладывают функцию нагрузки на балку  $R(x)$  в ряд Фурье по ортогональной системе функций  $\{\varphi_k(x)\}$  на отрезке  $[0;l]$ .

$$R(x) = \sum_{k=1}^{\infty} m_k \varphi_k(x).$$

6) Подставив полученные ряды для  $v(x)$  и  $R(x)$  в рассматриваемое дифференциальное уравнение, получают равенство, из которого находят коэффициенты  $b_k$ .

Найденные коэффициенты  $b_k$  подставляют в разложение функции прогиба балки  $v(x)$  по базису и окончательно получают функцию прогиба балки  $v(x)$  в виде ряда.

7) Используя признак Вейерштрасса о сходимости функциональных рядов, теоремы о дифференцировании функциональных рядов и теорему Дирихле о сходимости рядов Фурье, выясняют, в каких точках  $x$  для  $v(x)$  не выполняется сходимость полученного разложения к решению рассматриваемого дифференциального уравнения. Если найденная функция прогиба балки  $v(x)$  не удовлетворяет своему дифференциальному уравнению только в конечном числе точек на отрезке  $[0;l]$ , то функция  $v(x)$  является функцией прогиба рассматриваемой балки при заданной нагрузке.

8) Для определения прогиба балки в конкретной точке  $x_0 \in [0; l]$ , число  $x_0$  подставляют в функциональный ряд, представляющий функцию прогиба балки  $v(x)$  и получают числовой ряд, для которого вычисляют точную сумму или приближенную, с заданной точностью вычисления.

Для точного вычисления прогибов балки в точке используют формулы известные для некоторых сумм числовых рядов. Приведем некоторые из них, которые часто встречаются:

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2};$$

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2};$$

$$\frac{\pi^2}{96} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4}.$$

### Свободно опертая балка

Пусть балка длины  $l$ , находящаяся под воздействием некоторой нагрузки, свободно оперта по концам. Это значит, что на обоих концах балки обращаются в нуль как вертикальные ее смещения

$$v(0) = v(l) = 0, \tag{3.20}$$

так и изгибающие моменты

$$M(0) = M(l) = 0 \tag{3.21}$$

(т. е. кривизна балки; см. рис. 3.4).

Граничные условия (3.21) можно заменить на равенство нулю вторых производных от вертикальных перемещений на концах балки

$$v''(0) = v''(l) = 0.$$

Действуя в соответствии с намеченным в § 1 плане решения задачи, выберем в качестве функции состояния балки функцию ее прогиба  $v(x)$  и займемся подбором ортогональной системы функций, по которой будем разлагать эту функцию прогиба.



Рис. 3.4.

Рассмотрим для этого однородную по длине двухпролетную неразрезную балку с левым концом в  $x = -l$  и правым – в  $x = l$ , одинаково опертую обоими своими концами на опоры и имеющую промежуточную опору при  $x = 0$ , препятствующую вертикальному смещению балки в этой точке:  $v(0) = 0$ . Пусть

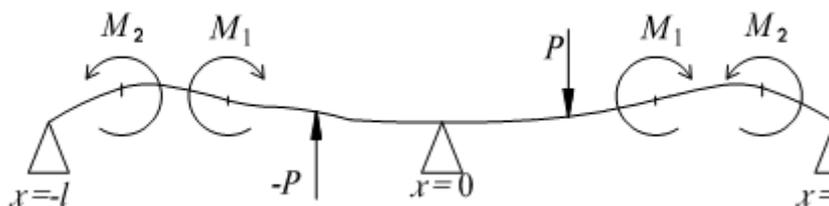


Рис. 3.5

эта балка загружена нечетным образом, т. е. каждой силе, приложенной к ней в точке,  $x=c$ , соответствует равная ей по величине и противоположная по направлению сила, приложенная к балке в точке  $x = -c$ , а каждому моменту, приложенному к балке в точке  $x = c$ , – равный ему по величине и совпадающий по направлению момент, приложенный в точке  $x = -c$  (рис. 3.5).

Левая половина рассматриваемой неразрезной балки воздействует на правую ее половину лишь некоторой вертикальной («перерезывающей») силой и не прилагает к ней никакого изгибающего момента. Поэтому, если удалить левую половину балки, заменив ее соответствующей реакцией опоры, расположенной в точке  $x = 0$ , то ни на изгибающих усилиях в правой половине балки, ни на значениях функции прогиба  $v(x)$  при  $x > 0$  это никак не скажется.

Наоборот, если рассматривать первоначально лишь правую часть балки, то присоединение к ней по нечетности левой части не изменит имеющейся картины изгиба.

Таким образом, естественно считать балку с левым концом в  $x = 0$  и правым в  $x = l$  и свободно опертую на опоры своими концами половиной описанной выше «нечетной» неразрезной балки. Будем рассматривать разложение функции прогиба  $v(x)$  такой балки на сегменте  $[0, l]$  в ряд Фурье по синусам:

$$v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{\pi n x}{l}. \quad (3.22)$$

Заметим, что функция прогиба  $v(x)$  является непрерывной функцией и поэтому, согласно теореме Дирихле, действительно может быть разложена в ряд Фурье (и в том числе в ряд Фурье по синусам (3.22)), который везде сходится к этой функции.

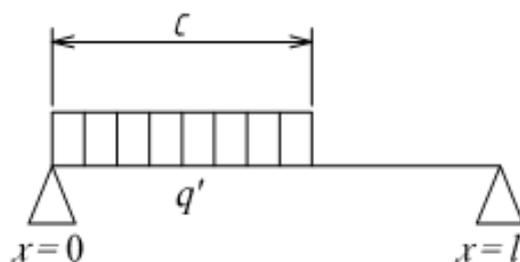


Рис. 3.6

Возникает соблазн определить коэффициенты этого разложения непосредственно на основании дифференциального уравнения изгиба балки (3.17).

В качестве примера, однако, возьмем случай, когда балка загружена равномерно распределенной нагрузкой интенсивности  $q$  на участке от 0 до  $c < l$  и никак не загружена в оставшейся части (рис. 3.6).

Чтобы воспользоваться при этом дифференциальным уравнением изгиба (3.17), нужно четыре раза продифференцировать почленно ряд, описывающий функцию прогиба.

Но в рассматриваемом случае все четвертые производные членов ряда для  $v(x)$ , являющихся синусами с некоторыми коэффициентами, суть те же синусы, снабженные другими коэффициентами, так что являются во всяком случае непрерывными функциями. Следовательно, и их частичные суммы также непрерывны. Но в действительности эта сумма равна  $q(x)$ , а эта функция неразрывна.

Полученное противоречие показывает, что теорема о почленном дифференцировании рядов не дает нам оснований воспользоваться в этом случае дифференциальным уравнением изгиба (3.17) для нахождения коэффициентов ряда из (3.22).

Конечно, все сказанное не означает, что при использовании здесь для наших целей уравнения (3.17) коэффициенты  $b_n$  из разложения (3.22) будут определены неверно и что пользоваться уравнением (3.17) заведомо нельзя. Более того, описанный путь в данном случае приводит на самом деле к верному ответу. Однако правомерность такого пути и обоснованность ответа могут быть установлены лишь на основании более тонких и более частных соображений, чем общая теорема о почленном дифференцировании рядов.

### **Первая возможность ограничиться двукратным дифференцированием**

В соответствии со сказанным в предыдущем параграфе естественно попытаться рассматривать такие соотношения, описывающие состояние деформированной балки, которые содержат производные от функции прогиба менее чем четвертого порядка. Такого типа соотношения существуют. Одно из них уже фактически имеется в нашем распоряжении – это равенство (3.12):

$$\frac{d^2 v(x)}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI}. \quad (3.23)$$

Пусть теперь на балку действует некоторая нагрузка  $R$ , приводящая к изгибающему моменту  $M_R(x)$  в каждой ее точке  $x$ . Найдем из соображений статики (в той мере, какой это нам удастся) аналитическое выражение для момента  $M_R(x)$  и разложим его в ряд Фурье на  $[0, l]$ , по синусам:

$$M_R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} m_{R,n} \sin \frac{\pi n x}{l}. \quad (3.24)$$

Если приложенная к балке нагрузка  $R$  не содержит сосредоточенных моментов, то  $M_R(x)$  является непрерывной функцией  $x$ , так что ряд Фурье этой функции сходится к ней равномерно. Разложением функции прогиба  $v_R(x)$  от нагрузки  $R$  пусть будет

$$v_R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{R,n} \sin \frac{\pi n x}{l}$$

Дифференцируя этот ряд почленно два раза (и запоминая, что это дифференцирование накладывает на нас обязательство проверить впоследствии его законность), мы получаем

$$\frac{d^2 v_R(x)}{dx^2} = -\sum_{n=1}^{\infty} b_{R,n} \left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 \sin \frac{\pi n x}{l}.$$

Подставив теперь в (3.23) вместо функций  $M(x)$  и  $\frac{d^2 v_R(x)}{dx^2}$  их разложения в ряды Фурье, мы будем иметь

$$-\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 \sum_{n=1}^{\infty} b_{R,n} n^2 \sin \frac{\pi n x}{l} = -\frac{1}{EI} \sum_{n=1}^{\infty} m_{R,n} \sin \frac{\pi n x}{l}.$$

Если оба эти ряда сходятся равномерно, то приравнивание, в соответствии со сказанным в [14], их коэффициентов дает нам

$$-\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 b_{R,n} n^2 = -\frac{1}{EI} m_{R,n}.$$

Откуда

$$b_{R,n} = \frac{l^2}{\pi^2 EI} \frac{m_{R,n}}{n^2} \quad (3.25)$$

и окончательно

$$v_R(x) = \frac{l^2}{\pi^2 EI} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{m_{R,n}}{n^2} \sin \frac{\pi n x}{l}. \quad (3.26)$$