

Лекция №14 Дифференциал функции.

1. Определение дифференциала и его геометрический смысл.

Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную в точке x :

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x)$$

Тогда можно записать: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha$, где $\alpha \rightarrow 0$, при $\Delta x \rightarrow 0$.

Следовательно: $\Delta y = f'(x) \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$.

Величина $\alpha \Delta x$ - бесконечно малая более высокого порядка, чем $f'(x)\Delta x$, т.е. $f'(x)\Delta x$ - главная часть приращения Δy .

Определение. Дифференциалом функции $f(x)$ в точке x называется главная линейная часть приращения функции.

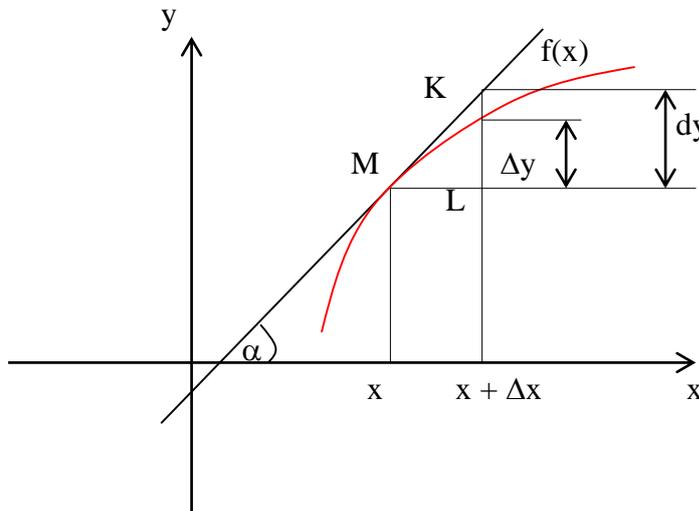
Обозначается dy или $df(x)$.

Из определения следует, что $dy = f'(x)\Delta x$ или

$$dy = f'(x)dx.$$

Можно также записать: $f'(x) = \frac{dy}{dx}$

Геометрический смысл дифференциала.



Из треугольника ΔMKL : $KL = dy = \operatorname{tg} \alpha \cdot \Delta x = y' \cdot \Delta x$

Таким образом, дифференциал функции $f(x)$ в точке x равен приращению ординаты касательной к графику этой функции в рассматриваемой точке.

2. Свойства дифференциала.

Если $u = f(x)$ и $v = g(x)$ - функции, дифференцируемые в точке x , то непосредственно из определения дифференциала следуют следующие свойства:

1) $d(u \pm v) = (u \pm v)'dx = u'dx \pm v'dx = du \pm dv$

2) $d(uv) = (uv)'dx = (u'v + v'u)dx = vdu + u dv$

3) $d(Cu) = Cdu$

$$4) d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - u dv}{v^2}$$

3. Дифференциал сложной функции. Инвариантная форма записи дифференциала.

Пусть $y = f(x)$, $x = g(t)$, т.е y - сложная функция.

Тогда

$$dy = f'(x)g'(t)dt = f'(x)dx.$$

Видно, что форма записи дифференциала dy не зависит от того, будет ли x независимой переменной или функцией какой- то другой переменной, в связи с чем эта форма записи называется **инвариантной формой записи дифференциала**.

Однако, если x - независимая переменная, то

$$dx = \Delta x, \text{ но}$$

если x зависит от t , то $\Delta x \neq dx$.

Таким образом форма записи $dy = f'(x)\Delta x$ не является инвариантной.

Пример. Найти производную функции $y = x \cos x \sin x + \frac{1}{2} \cos^2 x$.

Сначала преобразуем данную функцию: $y = \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} \cos^2 x$

$$y' = \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{2} x^2 \cos 2x + \frac{1}{2} 2 \cos x (-\sin x) = \frac{1}{2} \sin 2x + x \cos 2x - \sin x \cos x = x \cos 2x.$$

Пример. Найти производную функции $y = \frac{x^2 e^{x^2}}{x^2 + 1}$.

$$y' = \frac{(2xe^{x^2} + x^2 2xe^{x^2})(x^2 + 1) - (2x)x^2 e^{x^2}}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2x^3 e^{x^2} + 2x^5 e^{x^2} + 2xe^{x^2} + 2x^3 e^{x^2} - 2x^3 e^{x^2}}{(x^2 + 1)^2} = \frac{2xe^{x^2}(x^4 + 1 + x^2)}{(x^2 + 1)^2}$$

Пример. Найти производную функции $y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \frac{x}{\sin x}$

$$y' = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{\sin x - \sin x + x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{x \cos x}{\sin^2 x}$$

Пример. Найти производную функции $y = \operatorname{arctg} \frac{2x^4}{1-x^8}$

$$y' = \frac{1}{\left(1 + \frac{4x^8}{(1-x^8)^2}\right)} \cdot \frac{8x^3(1-x^8) - (-8x^7)2x^4}{(1-x^8)^2} = \frac{(1-x^8)^2(8x^3-8x^{11}+16x^{11})}{(1+x^8)^2(1-x^8)^2} = \frac{8x^3+8x^{11}}{(1+x^8)^2} =$$

$$= \frac{8x^3(1+x^8)}{(1+x^8)^2} = \frac{8x^3}{1+x^8}$$

Пример. Найти производную функции $y = x^2 e^{x^2} \ln x$

$$y' = (x^2 e^{x^2})' \ln x + x^2 e^{x^2} \frac{1}{x} = (2xe^{x^2} + x^2 e^{x^2} 2x) \ln x + xe^{x^2} = 2xe^{x^2} (1+x^2) \ln x + xe^{x^2} =$$

$$= xe^{x^2} (1 + 2 \ln x + 2x^2 \ln x)$$