

## Лекция №2

### Интегрирование рациональной дроби.

#### 1. Интегрирование простейших дробей

**Определение:** Элементарными называются дроби следующих четырех типов:

$$\begin{array}{ll} \text{I. } \frac{1}{ax+b}; & \text{III. } \frac{Mx+N}{ax^2+bx+c}; \\ \text{II. } \frac{1}{(ax+b)^m}; & \text{IV. } \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n} \end{array}$$

$m, n$  – натуральные числа ( $m \geq 2, n \geq 2$ ) и  $b^2 - 4ac < 0$ .

Первые два типа интегралов от элементарных дробей довольно просто приводятся к табличным подстановкой  $t = ax + b$ .

$$\text{I. } \int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{t} = \frac{1}{a} \ln|t| + C = \frac{1}{a} \ln|ax+b| + C.$$

$$\text{II. } \int \frac{dx}{(ax+b)^m} = \frac{1}{a} \int \frac{dt}{t^m} = -\frac{1}{a(m-1)t^{m-1}} + C = -\frac{1}{a(m-1)(ax+b)^{m-1}} + C;$$

Рассмотрим метод интегрирования элементарных дробей вида III.

Интеграл дроби вида III может быть представлен в виде:

$$\begin{aligned} \int \frac{Ax+B}{x^2+px+q} dx &= \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)}{x^2+px+q} dx = \frac{A}{2} \int \frac{2x+p}{x^2+px+q} dx + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dx}{x^2+px+q} = \\ &= \frac{A}{2} \ln|x^2+px+q| + \left(B - \frac{Ap}{2}\right) \int \frac{dx}{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right)} = \frac{A}{2} \ln|x^2+px+q| + \frac{2B - Ap}{\sqrt{4q - p^2}} \cdot \\ &\cdot \operatorname{arctg} \frac{2x+p}{\sqrt{4q - p^2}} + C \end{aligned}$$

Здесь в общем виде показано приведение интеграла дроби вида III к двум табличным интегралам.

Рассмотрим применение указанной выше формулы на примерах.

Пример.

$$\begin{aligned} \int \frac{7x-2}{3x^2-5x+4} dx &= \int \frac{84x-24}{36x^2-60x+48} dx = \int \frac{84x-24}{(6x-5)^2+23} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = 6x-5; \quad du = 6dx; \\ x = \frac{u+5}{6}; \end{array} \right\} = \\ &= \frac{1}{6} \int \frac{14u+70-24}{u^2+23} du = \frac{7}{3} \int \frac{udu}{u^2+23} + \frac{23}{3} \int \frac{du}{u^2+23} = \frac{7}{6} \ln(u^2+23) + \frac{23}{3\sqrt{23}} \operatorname{arctg} \frac{u}{\sqrt{23}} + C = \\ &= \frac{7}{6} \ln|36x^2-60x+48| + \frac{\sqrt{23}}{3} \operatorname{arctg} \frac{6x-5}{\sqrt{23}} + C. \end{aligned}$$

Вообще говоря, если у трехчлена  $ax^2 + bx + c$  выражение  $b^2 - 4ac > 0$ , то дробь по определению не является элементарной, однако, тем не менее ее можно интегрировать указанным выше способом.

Пример.

$$\begin{aligned} \int \frac{5x-3}{x^2+6x-40} dx &= \int \frac{5x-3}{(x+3)^2-49} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x+3; \quad du = dx; \\ x = u-3; \end{array} \right\} = \int \frac{5u-15-3}{u^2-49} du = 5 \int \frac{udu}{u^2-49} - \\ &- 18 \int \frac{du}{u^2-49} = \frac{5}{2} \ln|u^2-49| - \frac{18}{14} \ln \left| \frac{u-7}{u+7} \right| + C = \frac{5}{2} \ln|x^2+6x-40| - \frac{9}{7} \ln \left| \frac{x-4}{x+10} \right| + C. \end{aligned}$$

Пример.

$$\int \frac{3x+4}{\sqrt{7-x^2+6x}} dx = \int \frac{3x+4}{\sqrt{16-(x-3)^2}} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x-3; \quad du = dx; \\ x = u+3; \end{array} \right\} = \int \frac{3u+9+4}{\sqrt{16-u^2}} du = 3 \int \frac{udu}{\sqrt{16-u^2}} +$$

$$+ 13 \int \frac{du}{\sqrt{16-u^2}} = -3\sqrt{16-u^2} + 13 \arcsin \frac{u}{4} + C = -3\sqrt{7-x^2-6x} + 13 \arcsin \frac{x-3}{4} + C.$$

Рассмотрим теперь методы интегрирования простейших дробей IV типа. Сначала рассмотрим частный случай при  $M = 0, N = 1$ .

Тогда интеграл вида  $\int \frac{dx}{(ax^2+bx+c)^n}$  можно путем выделения в знаменателе полного квадрата представить в виде  $\int \frac{du}{(u^2+s)^n}$ . Сделаем следующее преобразование:

$$\int \frac{du}{(u^2+s)^n} = \frac{1}{s} \int \frac{s+u^2-u^2}{(u^2+s)^n} du = \frac{1}{s} \int \frac{du}{(u^2+s)^{n-1}} - \frac{1}{s} \int \frac{u^2 du}{(u^2+s)^n}.$$

Второй интеграл, входящий в это равенство, будем брать по частям.

Обозначим: 
$$\left\{ \begin{array}{l} dv_1 = \frac{udu}{(u^2+s)^n}; \quad u_1 = u; \quad du_1 = du; \\ v_1 = \int \frac{udu}{(u^2+s)^n} = -\frac{1}{2(n-1)(u^2+s)^{n-1}}; \end{array} \right.$$

$$\int \frac{u^2 du}{(u^2+s)^n} = -\frac{u}{(2n-2)(u^2+s)^{n-1}} + \frac{1}{2n-2} \int \frac{du}{(u^2+s)^{n-1}};$$

Для исходного интеграла получаем:

$$\int \frac{du}{(u^2+s)^n} = \frac{1}{s} \int \frac{du}{(u^2+s)^{n-1}} + \frac{u}{s(2n-2)(u^2+s)^{n-1}} - \frac{1}{s(2n-2)} \int \frac{du}{(u^2+s)^{n-1}}$$

$$\int \frac{du}{(u^2+s)^n} = \frac{u}{s(2n-2)(u^2+s)^{n-1}} + \frac{2n-3}{s(2n-2)} \int \frac{du}{(u^2+s)^{n-1}}.$$

Полученная формула называется **рекуррентной**. Если применить ее  $n-1$  раз, то получится табличный интеграл  $\int \frac{du}{u^2+s}$ .

Вернемся теперь к интегралу от элементарной дроби вида IV в общем случае.

$$\int \frac{Mx+N}{(ax^2+bx+c)^n} dx = (4a)^n \int \frac{Mx+N}{[(2ax+b)^2+(4ac-b^2)]^n} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = 2ax+b; \quad du = 2adx; \\ x = \frac{u-b}{2a}; \quad s = 4ac-b^2; \end{array} \right\} =$$

$$= \frac{(4a)^n}{2a} \int \frac{M(u-b)+N}{(u^2+s)^n} du = \frac{(4a)^n}{2a} \left[ \frac{M}{2a} \int \frac{udu}{(u^2+s)^n} + \frac{2aN-Mb}{2a} \int \frac{du}{(u^2+s)^n} \right]$$

В полученном равенстве первый интеграл с помощью подстановки  $t = u^2 + s$  приводится к табличному  $\int \frac{dt}{t^n}$ , а ко второму интегралу применяется рассмотренная выше рекуррентная формула.

Несмотря на кажущуюся сложность интегрирования элементарной дроби вида IV, на практике его достаточно легко применять для дробей с небольшой степенью  $n$ , а универсальность и общность подхода делает возможным очень простую реализацию этого метода на ЭВМ.

Пример:

$$\int \frac{3x+5}{(x^2-4x+7)^2} dx = \int \frac{3x+5}{((x-2)^2+3)^2} dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x-2; \quad du = dx; \\ x = u+2; \end{array} \right\} = \int \frac{3u+6+5}{(u^2+3)^2} du =$$

$$= 3 \int \frac{udu}{(u^2+3)^2} + 11 \int \frac{du}{(u^2+3)^2} = \left\{ \begin{array}{l} t = u^2+3; \\ dt = 2udu; \end{array} \right\} = \frac{3}{2} \int \frac{dt}{t^2} + 11 \left[ \frac{u}{3 \cdot 2(u^2+3)} + \frac{1}{3 \cdot 2} \int \frac{du}{u^2+3} \right] =$$

$$= -\frac{3}{2t} + \frac{11u}{6(u^2+3)} + \frac{11}{6\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{u}{\sqrt{3}} + C = -\frac{3}{2(x^2-4x+7)} + \frac{11(x-2)}{6(x^2-4x+7)} + \frac{11}{6\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{x-2}{\sqrt{3}} + C.$$

## 2. Интегрирование рациональных дробей.

Для того, чтобы проинтегрировать рациональную дробь необходимо разложить ее на элементарные дроби.

**Теорема:** Если  $R(x) = \frac{Q(x)}{P(x)}$  - правильная рациональная дробь, знаменатель  $P(x)$  которой

представлен в виде произведения линейных и квадратичных множителей (отметим, что любой многочлен с действительными коэффициентами может быть представлен в таком виде:  $P(x) = (x-a)^\alpha \dots (x-b)^\beta (x^2+px+q)^\lambda \dots (x^2+rx+s)^\mu$ ), то эта дробь может быть разложена на элементарные по следующей схеме:

$$\frac{Q(x)}{P(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \dots + \frac{A_\alpha}{(x-a)^\alpha} + \dots + \frac{B_1}{(x-b)} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \dots + \frac{B_\beta}{(x-b)^\beta} + \frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q} +$$

$$+ \frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2} + \dots + \frac{M_\lambda x+N_\lambda}{(x^2+px+q)^\lambda} + \dots + \frac{R_1x+S_1}{x^2+rx+s} + \frac{R_2x+S_2}{(x^2+rx+s)^2} + \dots + \frac{R_\mu x+S_\mu}{(x^2+rx+s)^\mu}$$

где  $A_i, B_i, M_i, N_i, R_i, S_i$  - некоторые постоянные величины.

При интегрировании рациональных дробей прибегают к разложению исходной дроби на элементарные. Для нахождения величин  $A_i, B_i, M_i, N_i, R_i, S_i$  применяют так называемый **метод неопределенных коэффициентов**, суть которого состоит в том, что для того, чтобы два многочлена были тождественно равны, необходимо и достаточно, чтобы были равны коэффициенты при одинаковых степенях  $x$ .

Применение этого метода рассмотрим на конкретном примере.

Пример.

$$\int \frac{9x^3 - 30x^2 + 28x - 88}{(x^2 - 6x + 8)(x^2 + 4)} dx$$

Т.к.  $(x^2 - 6x + 8)(x^2 + 4) = (x-2)(x-4)(x^2 + 4)$ , то

$$\frac{9x^3 - 30x^2 + 28x - 88}{(x-2)(x-4)(x^2 + 4)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-4} + \frac{Cx+D}{x^2 + 4}$$

Приводя к общему знаменателю и приравнявая соответствующие числители, получаем:

$$A(x-4)(x^2+4) + B(x-2)(x^2+4) + (Cx+D)(x^2-6x+8) = 9x^3 - 30x^2 + 28x - 88$$

$$(A+B+C)x^3 + (-4A-2B-6C+D)x^2 + (4A+4B+8C-6D)x + (-16A-8B+8D) =$$

$$= 9x^3 - 30x^2 + 28x - 88.$$

$$\begin{cases} A+B+C=9 \\ -4A-2B-6C+D=-30 \\ 4A+4B+8C-6D=28 \\ -16A-8B+8D=-88 \end{cases} \quad \begin{cases} C=9-A-B \\ D=-30+4A+2B+54-6A-6B \\ 2A+2B+4C-3D=14 \\ 2A+B-D=11 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C=9-A-B \\ D=24-2A-4B \\ 2A+2B+36-4A-4B-72+6A+12B=14 \\ 2A+B-24+2A+4B=11 \end{cases} \quad \begin{cases} C=9-A-B \\ D=24-2A-4B \\ 4A+10B=50 \\ 4A+5B=35 \end{cases}$$

$$\begin{cases} C = 9 - A - B \\ D = 24 - 2A - 4B \\ 4A + 10B = 50 \\ 50 - 10B + 5B = 35 \end{cases} \quad \begin{cases} C = 9 - A - B \\ D = 24 - 2A - 4B \\ 4A + 10B = 50 \\ B = 3 \end{cases} \quad \begin{cases} A = 5 \\ B = 3 \\ C = 1 \\ D = 2 \end{cases}$$

Итого:

$$\int \frac{5}{x-2} dx + \int \frac{3}{x-4} dx + \int \frac{x+2}{x^2+4} dx = 5 \ln|x-2| + 3 \ln|x-4| + \int \frac{x}{x^2+4} dx + \int \frac{2}{x^2+4} dx =$$

$$= 5 \ln|x-2| + 3 \ln|x-4| + \frac{1}{2} \ln(x^2+4) + \operatorname{arctg} \frac{x}{2} + C.$$

Пример.

$$\int \frac{6x^5 - 8x^4 - 25x^3 + 20x^2 - 76x - 7}{3x^3 - 4x^2 - 17x + 6} dx$$

Т.к. дробь неправильная, то предварительно следует выделить у нее целую часть:

$$\begin{array}{r} 6x^5 - 8x^4 - 25x^3 + 20x^2 - 76x - 7 \\ - (2x^2 + 3)(3x^3 - 4x^2 - 17x + 6) \\ \hline 6x^5 - 8x^4 - 34x^3 + 12x^2 \\ - (9x^3 + 8x^2 - 76x - 7) \\ \hline 9x^3 - 12x^2 - 51x + 18 \\ - (20x^2 - 25x - 25) \\ \hline \end{array}$$

$$\int \left[ 2x^2 + 3 + \frac{20x^2 - 25x - 25}{3x^3 - 4x^2 - 17x + 6} \right] dx = \int 2x^2 dx + \int 3 dx + 5 \int \frac{4x^2 - 5x - 5}{3x^3 - 4x^2 - 17x + 6} dx = \frac{2}{3} x^3 + 3x +$$

$$+ 5 \int \frac{4x^2 - 5x - 5}{3x^3 - 4x^2 - 17x + 6} dx$$

Разложим знаменатель полученной дроби на множители. Видно, что при  $x = 3$  знаменатель дроби превращается в ноль. Тогда:

$$\begin{array}{r} 3x^3 - 4x^2 - 17x + 6 \\ \underline{3x^3 - 9x^2} \\ 5x^2 - 17x \\ \underline{5x^2 - 15x} \\ -2x + 6 \\ \underline{-2x + 6} \\ 0 \end{array} \quad \left| \begin{array}{r} x - 3 \\ \hline 3x^2 + 5x - 2 \end{array} \right.$$

Таким образом  $3x^3 - 4x^2 - 17x + 6 = (x-3)(3x^2 + 5x - 2) = (x-3)(x+2)(3x-1)$ . Тогда:

$$\frac{4x^2 - 5x - 5}{(x-3)(x+2)(3x-1)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{3x-1}$$

$$A(x+2)(3x-1) + B(x-3)(3x-1) + C(x-3)(x+2) = 4x^2 - 5x - 5$$

Для того, чтобы избежать при нахождении неопределенных коэффициентов раскрытия скобок, группировки и решения системы уравнений (которая в некоторых случаях может оказаться достаточно большой) применяют так называемый **метод произвольных значений**. Суть метода состоит в том, что в полученное выше выражение подставляются поочередно несколько (по числу неопределенных коэффициентов) произвольных значений  $x$ . Для упрощения вычислений принято в качестве произвольных значений принимать точки, при которых знаменатель дроби равен нулю, т.е. в нашем случае  $-3, -2, 1/3$ . Получаем:

$$\begin{cases} 40A = 16 \\ 35B = 21 \\ C = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} A = 2/5 \\ B = 3/5 \\ C = 1 \end{cases}$$

Окончательно получаем:

$$\int \frac{6x^5 - 8x^4 - 25x^3 + 20x^2 - 76x - 7}{3x^3 - 4x^2 - 17x + 6} dx = \frac{2}{3} x^3 + 3x + 3 \int \frac{dx}{x+2} + 2 \int \frac{dx}{x-3} + 5 \int \frac{dx}{3x-1} =$$

$$= \frac{2}{3}x^3 + 3x + 3\ln|x+2| + 2\ln|x-3| + \frac{5}{3}\ln|3x-1| + C.$$

Пример.

$$\int \frac{3x^4 + 14x^2 + 7x + 15}{(x+3)(x^2+2)^2} dx = \int \frac{A}{x+3} dx + \int \frac{Bx+C}{(x^2+2)^2} dx + \int \frac{Dx+E}{x^2+2} dx$$

Найдем неопределенные коэффициенты:

$$A(x^2+2)^2 + (Bx+C)(x+3) + (Dx+E)(x+3)(x^2+2) = 3x^4 + 14x^2 + 7x + 15$$

$$Ax^4 + 4Ax^2 + 4A + Bx^2 + 3Bx + Cx + 3C + Dx^4 + 2Dx^2 + 3Dx^3 + 6Dx + Ex^3 + 2Ex + 3Ex^2 + 6E =$$

$$= (D+A)x^4 + (3D+E)x^3 + (A+B+2D+3E+4A)x^2 + (3B+C+6D+2E)x + (2A+3C+6E+4A)$$

$$\begin{cases} D+A=3 \\ 3D+E=0 \\ B+2D+3E+4A=14 \\ 3B+C+6D+2E=7 \\ 3C+6E+4A=15 \end{cases} \quad \begin{cases} D=3-A \\ E=-9+3A \\ B+6-2A-27+9A+4A=14 \\ 3B+C+18-6A-18+6A=7 \\ 3C-54+18A+4A=15 \end{cases}$$

$$\begin{cases} D=3-A \\ E=-9+3A \\ B+11A=35 \\ 3B+C=7 \\ 3C+22A=69 \end{cases} \quad \begin{cases} D=3-A \\ E=-9+3A \\ 11A=35-B \\ C=7-3B \\ 21-9B+70-2B=69 \end{cases} \quad \begin{cases} A=3 \\ B=2 \\ C=1 \\ D=0 \\ E=0 \end{cases}$$

Тогда значение заданного интеграла:

$$3\int \frac{dx}{x+3} + \int \frac{2x+1}{(x^2+2)^2} dx = 3\int \frac{dx}{x+3} + 2\int \frac{x}{(x^2+2)^2} dx + \int \frac{dx}{(x^2+2)^2} = 3\ln|x+3| - \frac{1}{x^2+2} +$$

$$+ \frac{x}{4(x^2+2)} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{2}} + C.$$