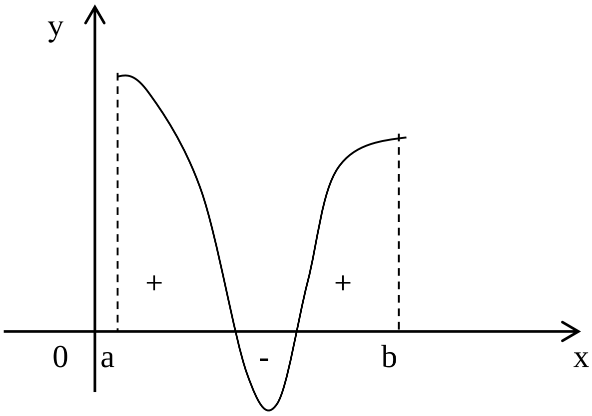
Геометрические приложения определённого интеграла.

1. Вычисление площадей плоских фигур.

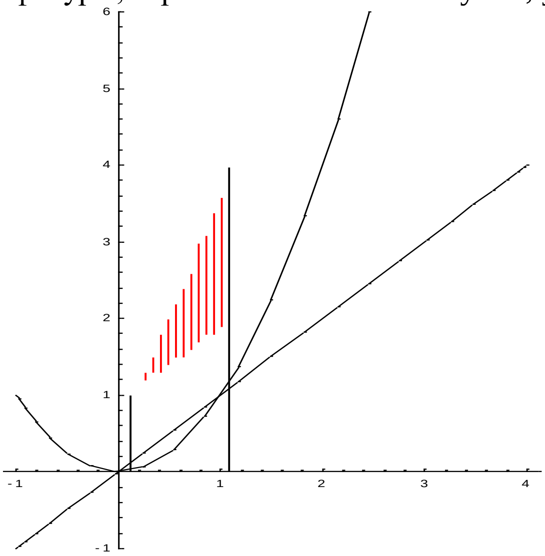


Известно, что определенный интеграл на отрезке представляет собой площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком функции f(x). Если график расположен ниже оси Ох, т.е. $f(x) < 0$, то площадь имеет знак “-“, если график расположен выше оси Ох, т.е. $f(x) > 0$, то площадь имеет знак “+”.

Для нахождения суммарной площади используется формула $S = \left|\int_a^b f(x)dx\right|$.

Площадь фигуры, ограниченной некоторыми линиями может быть найдена с помощью определенных интегралов, если известны уравнения этих линий.

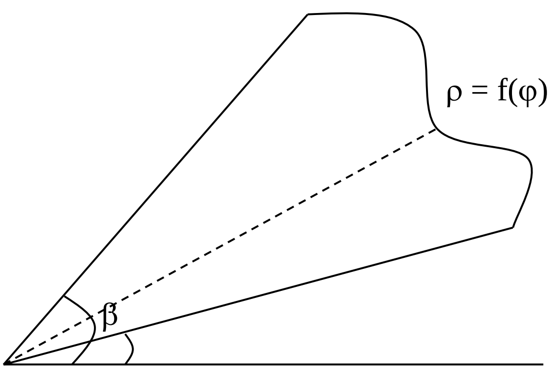
Пример. Найти площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x$, $y = x^2$, $x = 2$.



Искомая площадь (заштрихована на рисунке) может быть найдена по формуле:

$$S = \int_1^2 x^2 dx - \int_1^2 x dx = \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right]\Big|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{4}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}(\text{ед}^2)$$

Нахождение площади криволинейного сектора.



α

O ρ

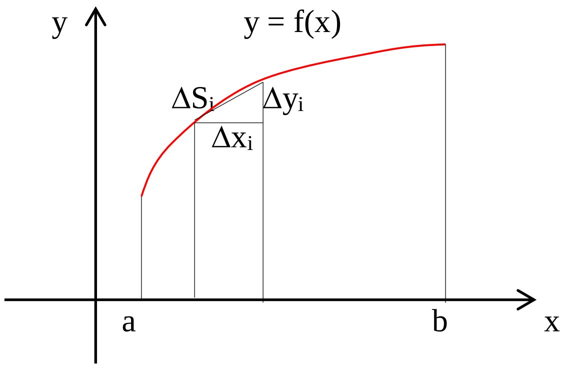
Для нахождения площади криволинейного сектора введем полярную систему координат. Уравнение кривой, ограничивающей сектор в этой системе координат, имеет вид $\rho = f(\varphi)$, где ρ - длина радиус – вектора, соединяющего полюс с произвольной точкой кривой, а φ - угол наклона этого радиус – вектора к полярной оси.

Подробнее о полярной системе координат и ее связи с декартовой прямоугольной системой координат см. Полярная система координат. “Курс высшей математики. Часть 1.”

Площадь криволинейного сектора может быть найдена по формуле

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f^2(\varphi)d\varphi$$

2. Вычисление длины дуги кривой.



Длина ломаной линии, которая соответствует дуге, может быть найдена как $S_n = \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i$.

Тогда длина дуги равна $S = \lim_{\max \Delta S_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i$.

Из геометрических соображений: $\Delta S_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i}\right)^2} \cdot \Delta x_i$

В то же время $\frac{\Delta y_i}{\Delta x_i} = \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x_i}$

Тогда можно показать (см. Интегрируемая функция.), что

$$S = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx$$

Т.е. $S = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$

Если уравнение кривой задано параметрически, то с учетом правил вычисления производной параметрически заданной функции (см. Производная фунции, заданной параметрически.), получаем

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}dt,$$

где $x = \varphi(t)$ и $y = \psi(t)$.

Если задана **пространственная кривая**, и $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ и $z = Z(t)$, то

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2 + [Z'(t)]^2}dt$$

Если кривая задана в **полярных координатах**, то

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho'^2 + \rho^2}d\varphi, \quad \rho = f(\varphi).$$

Пример: Найти длину окружности, заданной уравнением $x^2 + y^2 = r^2$.

1 способ. Выразим из уравнения переменную у. $y = \sqrt{r^2 - x^2}$

Найдем производную $y' = -\dfrac{x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$

Тогда $\dfrac{1}{4}S = \int_0^r \sqrt{1 + \dfrac{x^2}{r^2 - x^2}}dx = \int_0^r \dfrac{r}{\sqrt{r^2 - x^2}}dx = r \cdot \arcsin\dfrac{x}{r}\Big|_0^r = r\dfrac{\pi}{2}$

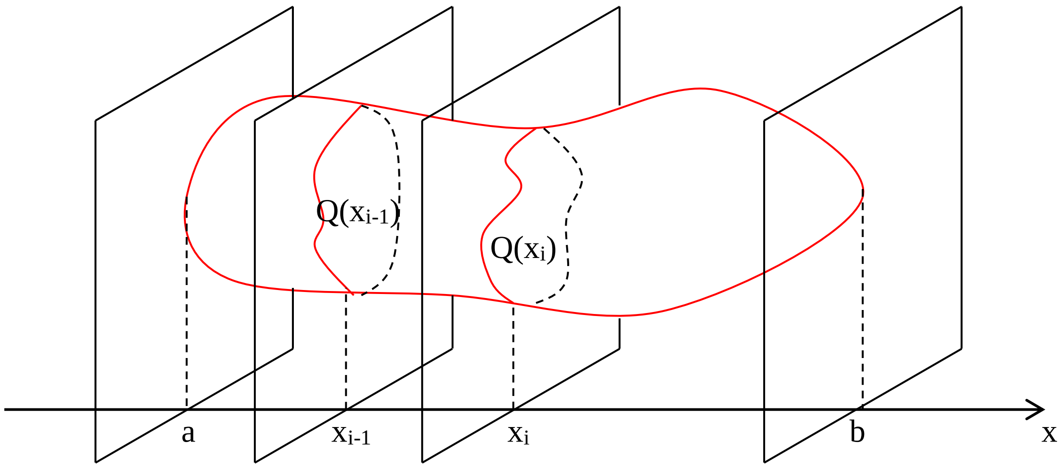
Тогда S = 2πr. Получили общеизвестную формулу длины окружности.

2 способ. Если представить заданное уравнение в полярной системе координат, то получим: $r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi = r^2$, т.е. функция $\rho = f(\varphi) = r$, $\rho' = \dfrac{df(\varphi)}{d\varphi} = 0$ тогда

$$S = \int_0^{2\pi} \sqrt{0 + r^2}d\varphi = r\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi r$$

3. Вычисление объемов тел.

Вычисление объема тела по известным площадям его параллельных сечений.



Пусть имеется тело объема V. Площадь любого поперечного сечения тела Q, известна как непрерывная функция Q = Q(x). Разобьем тело на “слои” поперечными сечениями, проходящими через точки x_i разбиения отрезка [a, b]. Т.к. на каком- либо промежуточном отрезке разбиения $[x_{i-1}, x_i]$ функция Q(x) непрерывна, то принимает на нем наибольшее и наименьшее значения. Обозначим их соответственно M_i и m_i.

Если на этих наибольшем и наименьшем сечениях построить цилиндры с образующими, параллельными оси x, то объемы этих цилиндров будут соответственно равны $M_i\Delta x_i$ и $m_i\Delta x_i$ здесь $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Произведя такие построения для всех отрезков разбиения, получим цилиндры, объемы которых равны соответственно $\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i$ и $\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i$.

При стремлении к нулю шага разбиения λ, эти суммы имеют общий предел:

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta x_i = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta x_i = \int_a^b Q(x)dx$$

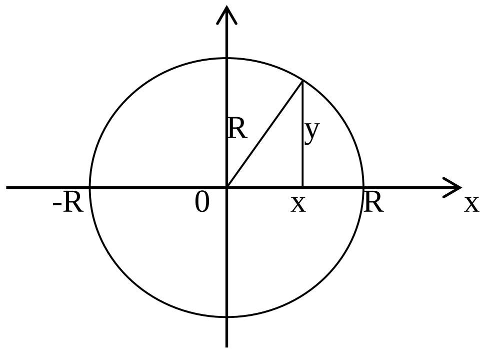
Таким образом, объем тела может быть найден по формуле:

$$V = \int_a^b Q(x)dx$$

Недостатком этой формулы является то, что для нахождения объема необходимо знать функцию Q(x), что весьма проблематично для сложных тел.

Пример: Найти объем шара радиуса R.

у



В поперечных сечениях шара получаются окружности переменного радиуса y. В зависимости от текущей координаты x этот радиус выражается по формуле $\sqrt{R^2 - x^2}$.

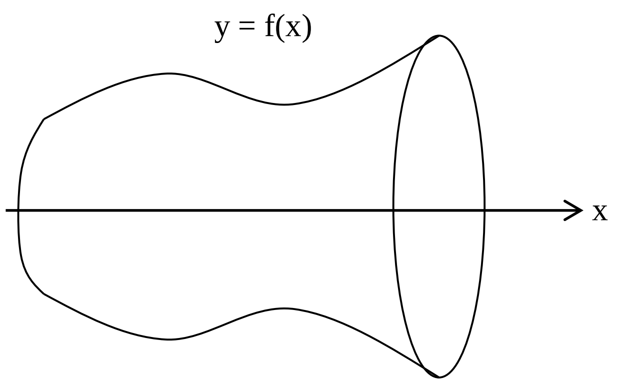
Тогда функция площадей сечений имеет вид: Q(x) = $\pi\left(R^2 - x^2\right)$.

Получаем объем шара:

$$V = \int_{-R}^{R} \pi(R^2 - x^2)dx = \pi(R^2 x - \frac{x^3}{3})\Big|_{-R}^{R} = \pi\left(R^3 - \frac{R^3}{3}\right) - \pi\left(-R^3 + \frac{R^3}{3}\right) = \frac{4\pi R^3}{3}.$$

4. Объем тел вращения.

Рассмотрим кривую, заданную уравнением y = f(x). Предположим, что функция f(x) непрерывна на отрезке [a, b]. Если соответствующую ей криволинейную трапецию с основаниями a и b вращать вокруг оси Ox, то получим так называемое **тело вращения**.



Т.к. каждое сечение тела плоскостью x = const представляет собой круг радиуса $R = |f(x)|$, то объем тела вращения может быть легко найден по полученной выше формуле:

$$V = \pi\int_{a}^{b} f^2(x)dx$$