Лекция №4
Интегрирование иррациональных выражений. Общие замечания по методам интегрирования.

4. Интегрирование некоторых иррациональных функций.

Далеко не каждая иррациональная функция может иметь интеграл, выраженный элементарными функциями. Для нахождения интеграла от иррациональной функции следует применить подстановку, которая позволит преобразовать функцию в рациональную, интеграл от которой может быть найден как известно всегда.

Рассмотрим некоторые приемы для интегрирования различных типов иррациональных функций.

Интеграл вида $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$ *где* n- *натуральное число.*

С помощью подстановки $\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}} = t$ функция рационализируется.

$$\frac{ax+b}{cx+d} = t^n; \qquad x = \frac{t^n - b}{a - ct^n}; \qquad dx = \left(\frac{t^n - b}{a - ct^n}\right)' dt;$$

Тогда $\int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx = \int R\left(\frac{t^n - b}{a - ct^n}, t\right)\left(\frac{t^n - b}{a - ct^n}\right)' dt = \int r(t)dt.$

Пример.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-2x} - \sqrt[4]{1-2x}} = \left\{\sqrt[4]{1-2x} = t; \quad dt = \frac{-2dx}{4\left(\sqrt[4]{1-2x}\right)^3} = \frac{-dx}{2t^3};\right\} = \int \frac{-2t^3 dt}{t^2 - t} = -2\int \frac{t^2 dt}{t-1} =$$
$$= -2\int\left(t + \frac{t}{t-1}\right)dt = -2\int tdt - 2\int \frac{t}{t-1}dt = -t^2 - 2\int\left(1 + \frac{1}{t-1}\right)dt = -t^2 - 2t - 2\ln|t-1| + C =$$
$$= -\sqrt{1-2x} - 2\sqrt[4]{1-2x} - 2\ln\left|\sqrt[4]{1-2x} - 1\right| + C.$$

Если в состав иррациональной функции входят корни различных степеней, то в качестве новой переменной рационально взять корень степени, равной наименьшему общему кратному степеней корней, входящих в выражение.

Проиллюстрируем это на примере.

Пример.

$$\int \frac{\sqrt[3]{x-1} + \sqrt[4]{x-1}}{(x-1)\left(1 + \sqrt[6]{x-1}\right)}dx = \left\{\begin{matrix}\sqrt[12]{x-1} = t; \quad x - 1 = t^{12}; \\ dx = 12t^{11}dt;\end{matrix}\right\} = \int \frac{(t^4 + t^3)12t^{11}dt}{t^{12}(1+t^2)} = 12\int \frac{t^3 + t^2}{t^2 + 1}dt =$$
$$= 12\left(\int \frac{t^3}{t^2+1}dt + \int \frac{t^2}{t^2+1}dt\right) = 12\left(\int\left(t - \frac{t}{t^2+1}\right)dt + \int\left(1 - \frac{1}{t^2+1}\right)dt\right) = 12\int tdt - 12\int \frac{tdt}{t^2+1} + 12\int dt -$$
$$-12\int \frac{dt}{1+t^2} = 6t^2 + 12t - 6\ln(t^2+1) - 12arctgt + C = 6\sqrt[6]{x-1} + 12\sqrt[12]{x-1} - 6\ln(\sqrt[6]{x-1} + 1) -$$
$$-12arctg\sqrt[12]{x-1} + C.$$

Интегралы вида $\int R\left(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\right)dx$.

Существует несколько способов интегрирования такого рода функций. В зависимости от вида выражения, стоящего под знаком радикала, предпочтительно применять тот или иной способ.

Как известно, квадратный трехчлен путем выделения полного квадрата может быть приведен к виду:

$$\pm u^2 \pm m^2.$$

Таким образом, интеграл приводится к одному из трех типов:

1) $\int R(u, \sqrt{m^2 - u^2})du;$

2) $\int R(u, \sqrt{m^2 + u^2})du;$

3) $\int R(u, \sqrt{u^2 - m^2})du;$

1 способ. Тригонометрическая подстановка.

Теорема: Интеграл вида $\int R(u, \sqrt{m^2 - u^2})du$ подстановкой $u = m\sin t$ или $u = m\cos t$ сводится к интегралу от рациональной функции относительно sint или cost.

Пример:

$$\int \sqrt{a^2 - x^2}dx = \left\{\begin{matrix} x = a\sin t; \\ dx = a\cos tdt \end{matrix}\right\} = \int \sqrt{a^2 - a^2\sin^2 t}\, a\cos tdt = \int a^2\cos^2 tdt = \frac{a^2}{2}\int (1 + \cos 2t)dt =$$

$$= \frac{a^2 t}{2} + \frac{a^2}{4}\sin 2t + C = \frac{a^2 t}{2} + \frac{a^2}{2}\sin t\cos t + C = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

Теорема: Интеграл вида $\int R(u, \sqrt{m^2 + u^2})du$ подстановкой $u = mtgt$ или $u = mctgt$ сводится к интегралу от рациональной функции относительно sint и cost.

Пример:

$$\int \frac{dx}{x^4\sqrt{a^2 + x^2}} = \left\{\begin{matrix} x = atgt; dx = \dfrac{a}{\cos^2 t}dt; \\ \sqrt{a^2 + x^2} = \dfrac{a}{\cos t}; \end{matrix}\right\} = \int \frac{a\cos tdt}{\cos^2 t a^4 tg^4 ta} = \int \frac{\cos^3 tdt}{a^4\sin^4 t} = \frac{1}{a^4}\int \frac{(1 - \sin^2 t)d\sin t}{\sin^4 t} =$$

$$= -\frac{1}{3a^4\sin^3 t} + \frac{1}{a^4\sin t} + C = \left\{\sin t = \sqrt{1 - \frac{a^2}{a^2 + x^2}} = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}\right\} = -\frac{(a^2 + x^2)^{3/2}}{3a^4x^3} + \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{a^4 x} + C.$$

Теорема: Интеграл вида $\int R(u, \sqrt{u^2 - m^2})du$ подстановкой $u = \frac{1}{\sin t}$ или $u = \frac{1}{\cos t}$ сводится к интегралу от рациональной функции относительно sint или cost.

Пример:

$$\int \frac{dx}{x(x^2 - 4)^{5/2}} = \left\{\begin{matrix} x = \dfrac{2}{\cos t}; dx = \dfrac{2\sin t}{\cos^2 t}dt; \\ \sqrt{x^2 - 4} = 2tgt; \end{matrix}\right\} = \int \frac{2\sin t\cos tdt}{\cos^2 t \cdot 2 \cdot 2^5 tg^5 t} = \frac{1}{32}\int ctg^4 tdt =$$

$$= \frac{1}{32}\int ctg^2 t\left(\frac{1}{\sin^2 t} - 1\right)dt = -\frac{1}{32}\int ctg^2 td(ctgt) - \frac{1}{32}\int ctg^2 tdt = -\frac{1}{96}ctg^3 t - \frac{1}{32}\int\left(\frac{1}{\sin^2 t} - 1\right)dt =$$

$$= -\frac{1}{96}ctg^3 t + \frac{1}{32}ctgt + \frac{t}{32} + C = \left\{ctgt = \frac{2}{\sqrt{x^2 - 4}}\right\} = -\frac{1}{12(x^2 - 4)^{3/2}} + \frac{1}{16\sqrt{x^2 - 4}} +$$

$$+ \frac{1}{32}\arccos\frac{2}{x} + C.$$

2 способ. Подстановки Эйлера. (1707-1783)

1) Если a>0, то интеграл вида $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx$ рационализируется подстановкой $\sqrt{ax^2 + bx + c} = t \pm x\sqrt{a}$.

2) Если a<0 и c>0, то интеграл вида $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c})dx$ рационализируется подстановкой $\sqrt{ax^2 + bx + c} = tx \pm \sqrt{c}$.

3) Если a<0 , а подкоренное выражение раскладывается на действительные множители $a(x - x_1)(x - x_2)$, то интеграл вида $\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c})dx$ рационализируется подстановкой $\sqrt{ax^2+bx+c} = t(x-x_1)$.

Отметим, что подстановки Эйлера неудобны для практического использования, т.к. даже при несложных подинтегральных функциях приводят к весьма громоздким вычислениям. Эти подстановки представляют скорее теоретический интерес.

3 способ. Метод неопределенных коэффициентов.

Рассмотрим интегралы следующих трех типов:

$$I.\int \frac{P(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}; \qquad II.\int P(x)\sqrt{ax^2+bx+c}dx; \qquad III.\int \frac{dx}{(x-\alpha)^n\sqrt{ax^2+bx+c}};$$

где P(x) – многочлен, n – натуральное число.

Причем интегралы II и III типов могут быть легко приведены к виду интеграла I типа.

Далее делается следующее преобразование:

$$\int \frac{P(x)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}} = Q(x)\sqrt{ax^2+bx+c} + \lambda\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}};$$

в этом выражении Q(x)- некоторый многочлен, степень которого ниже степени многочлена P(x), а λ - некоторая постоянная величина.

Для нахождения неопределенных коэффициентов многочлена Q(x), степень которого ниже степени многочлена P(x), дифференцируют обе части полученного выражения, затем умножают на $\sqrt{ax^2+bx+c}$ и, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, определяют λ и коэффициенты многочлена Q(x).

Данный метод выгодно применять, если степень многочлена P(x) больше единицы. В противном случае можно успешно использовать методы интегрирования рациональных дробей, рассмотренные выше, т.к. линейная функция является производной подкоренного выражения.

Пример.

$$\int \frac{3x^3-7x^2+1}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx = (Ax^2+Bx+C)\sqrt{x^2-2x+5} + \lambda\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-2x+5}}.$$

Теперь продифференцируем полученное выражение, умножим на $\sqrt{ax^2+bx+c}$ и сгруппируем коэффициенты при одинаковых степенях x.

$$\frac{3x^3-7x^2+1}{\sqrt{x^2-2x+5}} = (2Ax+B)\sqrt{x^2-2x+5} + \frac{Ax^2+Bx+C}{\sqrt{x^2-2x+5}}(x-1) + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2-2x+5}}$$

$$(2Ax+B)(x^2-2x+5)+(Ax^2+Bx+C)(x-1)+\lambda = 3x^3-7x^2+1$$

$$2Ax^3-4Ax^2+10Ax+Bx^2-2Bx+5B+Ax^3+Bx^2+Cx-Ax^2-Bx-C+\lambda = 3x^3-7x^2+1$$

$$3Ax^3-(5A-2B)x^2+(10A-3B+C)x+5B-C+\lambda = 3x^3-7x^2+1$$

$$\begin{cases} A=1 \\ 5A-2B=7 \\ 10A-3B+C=0 \\ 5B-C+\lambda=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=-13 \\ \lambda=-7 \end{cases}$$

Итого $\int \frac{3x^3-7x^2+1}{\sqrt{x^2-2x+5}}dx = (x^2-x-13)\sqrt{x^2-2x+5} - 7\int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2+4}} =$

$= (x^2-x-13)\sqrt{x^2-2x+5} - 7\ln(x-1+\sqrt{x^2-2x+5}) + C.$

Пример.

$$\int (4x^2-6x)\sqrt{x^2+3}dx = \int \frac{(4x^2-6x)(x^2+3)}{\sqrt{x^2+3}}dx = (Ax^3+Bx^2+Cx+D)\sqrt{x^2+3} + \lambda \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+3}}$$

$$\frac{4x^4-6x^3+12x^2-18x}{\sqrt{x^2+3}} = (3Ax^2+2Bx+C)\sqrt{x^2+3} + \frac{(Ax^3+Bx^2+Cx+D)x}{\sqrt{x^2+3}} + \frac{\lambda}{\sqrt{x^2+3}}$$

$$4x^4-6x^3+12x^2-18x = (3Ax^2+2Bx+C)(x^2+3) + Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+\lambda$$

$$4x^4-6x^3+12x^2-18x = 3Ax^4+2Bx^3+Cx^2+9Ax^2+6Bx+3C+Ax^4+Bx^3+Cx^2+Dx+\lambda$$

$$4x^4-6x^3+12x^2-18x = 4Ax^4+3Bx^3+(2C+9A)x^2+(6B+D)x+3C+\lambda$$

$$A=1;\quad B=-2;\quad C=3/2;\quad D=-6;\quad \lambda=-9/2;$$

$$\int (4x^2-6x)\sqrt{x^2+3}dx = \left(x^3-2x^2+\frac{3}{2}x-6\right)\sqrt{x^2+3} - \frac{9}{2}\ln\left|x+\sqrt{x^2+3}\right| + C.$$

Пример.

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}} = \left\{\begin{aligned} &x=\frac{1}{v}; \\ &dx=-\frac{dv}{v^2} \end{aligned}\right\} = -\int \frac{v^3 dv}{v^2\sqrt{\frac{1}{v^2}-1}} = -\int \frac{v^2 dv}{\sqrt{1-v^2}} = (Av+B)\sqrt{1-v^2} + \lambda \int \frac{dv}{\sqrt{1-v^2}}$$

$$-\frac{v^2}{\sqrt{1-v^2}} = A\sqrt{1-v^2} - \frac{(Av+B)v}{\sqrt{1-v^2}} + \frac{\lambda}{\sqrt{1-v^2}}$$

$$-v^2 = A - Av^2 - Av^2 - Bv + \lambda$$

$$-v^2 = -2Av^2 - Bv + A + \lambda$$

$$A=1/2;\quad B=0;\quad \lambda=-1/2;$$

$$-\int \frac{v^2 dv}{\sqrt{1-v^2}} = \frac{v\sqrt{1-v^2}}{2} - \frac{1}{2}\arcsin v = \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2} - \arcsin\frac{1}{x}\right) + C$$

Второй способ решения того же самого примера.

$$\int \frac{dx}{x^3\sqrt{x^2-1}} = \left\{\begin{aligned} &x=\frac{1}{\cos t}; dx=\frac{tgt}{\cos t}dt; \\ &\sqrt{x^2-1}=tgt; \end{aligned}\right\} = \int \frac{\frac{\sin t}{\cos^2 t}}{\frac{1}{\cos^3 t}\cdot tgt}dt = \int \frac{\sin t\cos^4 t}{\cos^2 t\sin t}dt = \int \cos^2 t dt =$$

$$= \int \frac{1}{2}(1+\cos 2t)dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t = \left\{\sin 2t = 2\sin t\cos t = 2\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\arccos\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{x^2-1}}{x^2}\right) + C.$$

С учетом того, что функции arcsin и arccos связаны соотношением $\arcsin\frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} - \arccos\frac{1}{x}$, а постоянная интегрирования С – произвольное число, ответы, полученные различными методами, совпадают.

Как видно, при интегрировании иррациональных функций возможно применять различные рассмотренные выше приемы. Выбор метода интегрирования обуславливается в основном наибольшим удобством, очевидностью применения того или иного метода, а также сложностью вычислений и преобразований.

Пример.

$$\int \frac{dx}{(1-x^2)^{3/2}} = \left\{\begin{aligned} &x=\sin t; \\ &dx=\cos t dt; \\ &\cos t=\sqrt{1-x^2} \end{aligned}\right\} = \int \frac{\cos t dt}{\cos^3 t} = \int \frac{dt}{\cos^2 t} = tgt + C = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + C.$$

6. Несколько примеров интегралов, не выражающихся через элементарные функции.

К таким интегралам относится интеграл вида $\int R(x, \sqrt{P(x)})dx$, где P(x)- многочлен степени выше второй. Эти интегралы называются **эллиптическими.**

Если степень многочлена P(x) выше четвертой, то интеграл называется **ультраэллиптическим.**

Если все – таки интеграл такого вида выражается через элементарные функции, то он называется **псевдоэллиптическим.**

Не могут быть выражены через элементарные функции следующие интегралы:

1) $\int e^{-x^2} dx$ - интеграл Пуассона (Симеон Дени Пуассон – французский математик (1781-1840))
2) $\int \sin x^2 dx; \quad \int \cos x^2 dx$ - интегралы Френеля (Жан Огюстен Френель – французский ученый (1788-1827) - теория волновой оптики и др.)
3) $\int \frac{dx}{\ln x}$ - интегральный логарифм
4) $\int \frac{e^x}{x} dx$ - приводится к интегральному логарифму
5) $\int \frac{\sin x}{x} dx$ - интегральный синус
6) $\int \frac{\cos x}{x} dx$ - интегральный косинус