Лекция №8 Тема 4.1. Основные понятия; частные производные.

Функция n действительных переменных как отображение подмножества E^n в R. Геометрическая интерпретация функции двух переменных.

Предел и непрерывность функции. Точки и линии разрыва. Теоремы о пределах для функций нескольких переменных. Свойства непрерывных функций. Частные производные функций нескольких переменных.

Функции двух переменных

1. Определение функции многих переменных.

При рассмотрении функций нескольких переменных ограничимся подробным описанием функций двух переменных, т.к. все полученные результаты будут справедливы для функций произвольного числа переменных.

Определение: Если каждой паре независимых друг от друга чисел (x, y) из некоторого множества по какому - либо правилу ставится в соответствие одно или несколько значений переменной z, то переменная z называется **функцией двух переменных.**

$$z = f(x, y)$$

Определение: Если паре чисел (x, y) соответствует одно значение z, то функция называется **однозначной**, а если более одного, то – **многозначной**.

Определение: Областью определения функции z называется совокупность пар (x, y), при которых функция z существует.

Определение: Окрестностью точки $M_0(x_0, y_0)$ радиуса r называется совокупность всех точек (x, y), которые удовлетворяют условию $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2} < r$.

Определение: Число A называется **пределом** функции f(x, y) при стремлении точки M(x, y) к точке $M_0(x_0, y_0)$, если для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $r > 0$, что для любой точки M(x, y), для которых верно условие

$$MM_0 < r$$

также верно и условие $|f(x,y) - A| < \varepsilon$.

Записывают: $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = A$

Определение: Пусть точка $M_0(x_0, y_0)$ принадлежит области определения функции f(x, y). Тогда функция z = f(x, y) называется **непрерывной** в точке $M_0(x_0, y_0)$, если

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y) = f(x_0, y_0) \qquad (1)$$

причем точка M(x, y) стремится к точке $M_0(x_0, y_0)$ произвольным образом.

Если в какой – либо точке условие (1) не выполняется, то эта точка называется **точкой разрыва** функции f(x, y). Это может быть в следующих случаях:

1) Функция z = f(x, y) не определена в точке $M_0(x_0, y_0)$.
2) Не существует предел $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)$.
3) Этот предел существует, но он не равен $f(x_0, y_0)$.

Свойство. Если функция f(x, y, …) определена и непрерывна в замкнутой и ограниченной области D, то в этой области найдется по крайней мере одна точка $N(x_0, y_0, \ldots)$, такая, что для остальных точек верно неравенство

$$f(x_0, y_0, \ldots) \ge f(x, y, \ldots)$$

а также точка $N_1(x_{01}, y_{01}, \ldots)$, такая, что для всех остальных точек верно неравенство

$$f(x_{01}, y_{01}, \ldots) \le f(x, y, \ldots)$$

тогда $f(x_0, y_0, \ldots) = M$ – **наибольшее значение** функции, а $f(x_{01}, y_{01}, \ldots) = m$ – **наименьшее значение** функции f(x, y, …) в области D.

Непрерывная функция в замкнутой и ограниченной области D достигает по крайней мере один раз наибольшего значения и один раз наименьшего.

Свойство. Если функция f(x, y, …) определена и непрерывна в замкнутой ограниченной области D, а M и m – соответственно наибольшее и наименьшее значения функции в этой области, то для любой точки $\mu \in [m, M]$ существует точка $N_0(x_0, y_0, \ldots)$ такая, что $f(x_0, y_0, \ldots) = \mu$.

Проще говоря, непрерывная функция принимает в области D все промежуточные значения между M и m. Следствием этого свойства может служить заключение, что если числа M и m разных знаков, то в области D функция по крайней мере один раз обращается в ноль.

Свойство. Функция f(x, y, …), непрерывная в замкнутой ограниченной области D, **ограничена** в этой области, если существует такое число К, что для всех точек области верно неравенство $|f(x, y, ...)| < K$.

Свойство. Если функция f(x, y, …) определена и непрерывна в замкнутой ограниченной области D, то она **равномерно непрерывна** в этой области, т.е. для любого положительного числа ε существует такое число Δ > 0, что для любых двух точек (x_1, y_1) и (x_2, y_2) области, находящихся на расстоянии, меньшем Δ, выполнено неравенство

$$|f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)| < \varepsilon$$

Приведенные выше свойства аналогичны свойствам функций одной переменной, непрерывных на отрезке. См. Свойства функций, непрерывных на отрезке.

2. Производные и дифференциалы функций нескольких переменных.

Определение. Пусть в некоторой области задана функция z = f(x, y). Возьмем произвольную точку M(x, y) и зададим приращение Δx к переменной x. Тогда величина $\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y)$ называется **частным приращением функции по х.**

Можно записать

$$\frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Тогда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$ называется **частной производной** функции z = f(x, y) по х.

Обозначение: $\frac{\partial z}{\partial x}$; z'_x; $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$; $f'_x(x, y)$.

Аналогично определяется частная производная функции по у.

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}$$

Геометрическим смыслом частной производной (допустим $\frac{\partial z}{\partial x}$) является тангенс угла наклона касательной, проведенной в точке $N_0(x_0, y_0, z_0)$ к сечению поверхности плоскостью $y = y_0$.

3. Полное приращение и полный дифференциал.

Определение. Для функции f(x, y) выражение $\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y)$ называется **полным приращением**.

Если функция f(x, y) имеет непрерывные частные производные, то

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) + f(x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) = [f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y)] +$$
$$+ [f(x, y + \Delta y) - f(x, y)]$$

Применим теорему Лагранжа (см. Теорема Лагранжа.) к выражениям, стоящим в квадратных скобках.

$$f(x, y + \Delta y) - f(x, y) = \Delta y \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y}$$

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y + \Delta y) = \Delta x \frac{\partial f(\bar{x}, y + \Delta y)}{\partial x}$$

здесь $\bar{y} \in (y, y + \Delta y);$ $\quad \bar{x} \in (x, x + \Delta x)$

Тогда получаем

$$\Delta z = \Delta x \frac{\partial f(\bar{x}, y + \Delta y)}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y}$$

Т.к. частные производные непрерывны, то можно записать равенства:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\partial f(\bar{x}, y + \Delta y)}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$$

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \frac{\partial f(x, \bar{y})}{\partial y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$$

Определение. Выражение $\Delta z = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Delta y + \alpha_1 \Delta x + \alpha_2 \Delta y$ называется **полным приращением** функции f(x, y) в некоторой точке (x, y), где α_1 и α_2 – бесконечно малые функции при $\Delta x \to 0$ и $\Delta y \to 0$ соответственно.